Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giorgio M. Ferrero

Teoremi di confronto relativi alla pressione e all'energia in magnetofluidodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.2, p. 185–192.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_2_185_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Teoremi di confronto relativi alla pressione e all'energia in Magnetofluidodinamica.

Nota di GIORGIO M. FERRERO (a Torino) (*) (**)

Sunto. - *Studiando il comportamento della pressione e dell'energia si stabiliscono in corrispondenza due teoremi di confronto, servendosi del cosidetto «principio di massimo».*

In base a tali teoremi si segnalano le particolari proprietà di un fluido soggetto a una notevole classe di campi magnetici.

§ 1. - Equazioni fondamentali.

Al solito si considerano le equazioni di ALFVÉN (invarianti, al pari delle equazioni dell'Idrodinamica ordinaria, rispetto alla trasformazione di GALILEO).

Ponendosi dal punto di vista del «continuo» si fa l'ipotesi che il fluido sia *incompressibile* (per cui la densità ρ di esso è costante), *viscoso* (con viscosità ν costante), in *moto stazionario* e che le forze di natura meccanica, cui è soggetto, siano *conservative*, derivanti dal potenziale Ω secondo la

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} \Omega. \tag{1}$$

Allora le equazioni di ALFVÉN, nel sistema GIORGI, sono.

$$\boxed{\begin{aligned}
&\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} && (2)\\
&\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 && (3)\\
&\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad}\left(\Omega + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{B} + \nu \Delta_2 \boldsymbol{v} && (4)\\
&\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 && (5)
\end{aligned}}$$

in cui i simboli introdotti hanno il ben noto significato.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 3 marzo 1964.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca matematica n° 3 del C. N. R.

§ 2. Comportamento della pressione.

Poichè l'accelerazione in un moto (euleriano) stazionario si può scrivere nella forma

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2,$$

considerandone la divergenza di ambo i membri, si ha

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}) + \frac{1}{2} \triangle_2 v^2, \tag{7}$$

cioè

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{v} \right), \tag{8}$$

poichè

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}) = \operatorname{div} \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{v} \right) - \frac{1}{2} \triangle_2 v^2 ;$$

ove $\alpha = \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}$ è l'omografia vettoriale (o tensore) di deformazione del fluido.

D'altra parte se si considera la divergenza di ambo i membri della (4) e si tien conto della (5), si ha

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = - \triangle_2 \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{div} (\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H}),$$

che si può ancora scrivere nella forma

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = - \triangle_2 \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} \right) - \frac{\mu}{2\rho} \triangle_2 H^2 \tag{9}$$

essendo $\beta = \frac{d\boldsymbol{H}}{dP}$ un'omografia vettoriale dipendente dal campo magnetico $\boldsymbol{H}$ [1].

[1] Il vettore $\frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H}$ viene scritto da alcuni Autori della m.f.d. con altra notazione (ad es. SHIH-I-PAI usa la scrittura $(\boldsymbol{H} \cdot \nabla)\boldsymbol{H}$, mentre COWLING e FERRARO scrivono $\operatorname{div} (\boldsymbol{H}\boldsymbol{H})$).

Dal confronto della (8) colla (9) si ricava

$$\triangle_2\left(p + \rho\Omega + \frac{\mu H^2}{2}\right) = \mu \operatorname{div}\left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}\right) - \rho \operatorname{div}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}\right). \tag{10}$$

Alle grandezze scalari $\operatorname{div}\left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}\right)$ e $\operatorname{div}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}\right)$ si può dare una forma molto significativa.

Invero, rispetto ad un riferimento cartesiano ortogonale di versori $\boldsymbol{i}_k$, indicando con x_k le coordinate e con H_k le componenti di $\boldsymbol{H}$ $(k = 1, 2, 3)$, tenendo presente la solenoidalità di $\boldsymbol{H}$, si può scrivere che

$$\operatorname{div}\left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}\right) = \operatorname{div} \sum_1^3{}_k H_k \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_k} = \sum_1^3{}_k \operatorname{grad} H_k \times \frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{i}_k =$$

$$= \sum_1^3{}_k \frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{i}_k \times K\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{i}_k = \mathfrak{I}_1\left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\right)^2,$$

cioè

$$\operatorname{div}\left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}\right) = \mathfrak{I}_1\beta^2 \tag{11}$$

e così

$$\operatorname{div}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}\right) = \mathfrak{I}_1\alpha^2, \tag{12}$$

avendo indicato con $\mathfrak{I}_1$ l'invariante lineare di $\left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\right)^2$ e di $\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right)^2$.

Se si pone

$$\mathfrak{P} = p + \rho\Omega + \frac{1}{2}\mu H^2, \tag{13}$$

che rappresenta la pressione totale del fluido soggetto all'azione del campo magnetico $\boldsymbol{H}$, all'equazione (10) si può dare la forma più semplice

$$\triangle_2\mathfrak{P} = \mu\mathfrak{I}_1\beta^2 - \rho\mathfrak{I}_1\alpha^2. \tag{14}$$

Applicando ad essa il noto «principio di massimo» (cfr. ad es. [1], parte II, pag. 326), si ha il seguente

Teorema sulla pressione in m.f.d.:

«In ogni regione del fluido in cui è $\mu\mathfrak{I}_1\beta^2 \geq \rho\mathfrak{I}_1\alpha^2$ la pressione totale $\mathfrak{P}$ di esso non può assumere un valore massimo; mentre in ogni regione del fluido in cui è $\mu \mathfrak{J}_1 \beta^2 \leq \rho \mathfrak{J}_1 \alpha^2$ essa non può assumere un valore minimo ».

Invero, se per assurdo $\mathfrak{P}$, che *non è costante,* avesse un massimo in una regione del fluido in cui è $\mu \mathfrak{J}_1 \beta^2 \geq \rho \mathfrak{J}_1 \alpha^2$, per la (14) sarebbe $\triangle_2 \mathfrak{P} \geq 0$ e quindi, per il citato principio di massimo, $\mathfrak{P}$ sarebbe costante contro l'ipotesi.

Un analogo ragionamento si ripete nell'altro caso.

Se in una regione del fluido è proprio $\mu \mathfrak{J}_1 \beta^2 = \rho \mathfrak{J}_1 \alpha^2$, per il teorema dimostrato, $\mathfrak{P}$ in tale regione non ha né massimi né minimi e ciò era da attendersi in quanto in tal caso dalla (14) risulta che $\triangle_2 \mathfrak{P} = 0$ cioè che $\mathfrak{P}$ è una funzione armonica.

È bene notare che il risultato stabilito in sostanza dipende dal rapporto

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\mathfrak{J}_1 \beta^2}{\mathfrak{J}_1 \alpha^2},$$

che è un invariante, nel senso che ha carattere « intrinseco »; quindi il comportamento di $\mathfrak{P}$ dipende solo da $\boldsymbol{v}$ e da $\boldsymbol{H}$.

Il teorema stabilito assume una significativa espressione in un particolare caso che si vuol segnalare.

Caso dei campi $\dfrac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} = 0$.

Quando il fluido è soggetto a campi magnetici caratterizzati dall'equazione $\dfrac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} = 0$, allora tutto accade come nell'Idrodinamica ordinaria tenendo presente che nella pressione $\mathfrak{P}$ si deve tener conto della pressione magnetica.

Invero, essendo la forza magnetica di LORENTZ

$$\boldsymbol{F}_m = \mu(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H}) = \mu\left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} - \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\, H^2\right),$$

nel caso attuale si ha

$$\boldsymbol{F}_m = -\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right).$$

In tali ipotesi la (14) è semplicemente

$$\triangle_2 \mathfrak{P} = -\rho \mathfrak{J}_1 \alpha^2 \tag{15}$$

cioè

$$\triangle_2 \mathcal{S} = -\rho \operatorname{div}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}\right). \tag{15}$$

Ma nell'Idrodinamica ordinaria si ha proprio un'equazione formalmente identica alla (15'), colla variante che mentre ora $\mathcal{S}$ è data dalla (13), nel caso idrodinamico è $\mathcal{S} = p + \rho\Omega$, (cfr. [3]) e quindi il teorema sulla pressione, per i campi per cui è $\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} = 0$, si riduce all'analogo teorema che sussiste nell'Idrodinamica ordinaria (cfr. [3]).

È ben noto che per i campi «*force-free*», cioè non soggetti a forze, (cfr. [2]), per cui è

$$\boldsymbol{F}_m = 0$$

vale ancora la (15') con addirittura $\mathcal{S} = p + \rho\Omega$. Cioè si ha in tal caso la coincidenza completa col caso idrodinamico.

§ 3. - Comportamento dell'energia per un fluido non viscoso.

È noto che nell'ordinaria Idrodinamica per un fluido incompressibile, non viscoso, in moto stazionario sussiste il teorema di Bernoulli.

Nelle stesse ipotesi *(incompressibilità, assenza di viscosità, moto stazionario)* in m.f.d. tale teorema vale ancora anche quando il fluido sia soggetto a un campo magnetico che non sia «force-free» (1), quando è $\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} = 0$ (2).

Le equazioni sono ancora le (2)-(5) con $\nu = 0$.

Considerando un generico filetto fluido e denotando con s l'ascissa curvilinea relativa ad esso a partire da un punto generico, si può scrivere

$$\boldsymbol{a} = v\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}. \tag{16}$$

(1) In tal caso si sa che vale il teorema di Bernoulli come nell'Idrodinamica.

(2) W. B. Thomson ha trovato che tale teorema in m.f.d. vale sotto la condizione $\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v} = 0$ che è invero soddisfatta per $\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} = 0$.

Tenendo presente la (16) e che è $\nu = 0$, se moltiplichiamo ambo i membri della (4) scalarmente per τ, vettore unitario tangente, si ha

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\Omega + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{\mu}{\rho}(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H})\times\tau. \tag{17}$$

Se il fluido è soggetto ad un campo magnetico per cui è $\dfrac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} = 0$, che abbiamo già considerato, allora

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H} = -\frac{1}{2}\operatorname{grad}H^2 \quad \text{e quindi} \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H}\times\tau = -\frac{1}{2}\frac{dH^2}{ds}.$$

L'equazione (17) assume quindi la forma

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Omega + p + \frac{1}{2}\mu H^2\right) = 0. \tag{18}$$

Se si pone

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Omega + p + \frac{1}{2}\mu H^2, \tag{19}$$

che ha il significato di rappresentare l'energia totale in m.f.d., riferita all'unità di volume, la (18) esprime l'estensione del teorema di BERNOULLI.

Si può quindi dire che per un fluido, non viscoso, incompressibile, in moto stazionario, soggetto ad un campo per cui è $\dfrac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}=0$, lungo un dato filetto fluido l'energia totale $\mathcal{E}$ si mantiene costante.

Ciò dimostra che anche nei confronti dell'energia il comportamento di un fluido (non viscoso) soggetto all'azione di un campo per cui è $\dfrac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} = 0$ è analogo a quello dell'Idrodinamica, colla vertenza di tener conto ora dell'energia magnetica.

§ 4. - Comportamento dell'energia per un fluido viscoso.

Il risultato stabilito nel § precedente ha portato a concludere che, in assenza di viscosità, per un fluido soggetto ad un campo per cui è $\dfrac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} = 0$ l'energia totale si mantiene costante (lungo un dato filetto fluido).

Si vuole ora studiare il comportamento dell'energia quando è $\nu \neq 0$; ci riferiremo per ciò alle equazioni (2)-(5).

Scriviamo l'equazione (7) nella forma

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2} \triangle_2 v^2 + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} - (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})^2,$$

od anche, tenendo conto della (5),

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2} \triangle_2 v^2 - \triangle_2 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} - (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})^2. \tag{20}$$

Dal confronto di questa con la (9) segue che

$$\begin{aligned} \triangle_2 \left(\frac{p}{\rho} + \Omega + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\rho} H^2 \right) = \\ = (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})^2 + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} \right) + \triangle_2 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{21}$$

Il termine $\triangle_2 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$ può essere scritto in altra forma; invero se moltiplichiamo ambo i membri della (4) scalarmente per $\boldsymbol{v}$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(\Omega + \frac{p}{\rho} \right) + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} H^2 \right) \times \boldsymbol{v} + \nu \triangle_2 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(p + \rho\Omega + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) = \\ = \mu \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v} + \nu\rho \triangle_2 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{22}$$

Tenendo presente la posizione (19), se si elimina $\triangle_2 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$ fra la (21) e la (22), si ottiene

$$\triangle_2 \mathcal{E} - \frac{1}{\nu} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \rho (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})^2 + \mu \operatorname{div} \left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} \right) - \frac{\mu}{\nu} \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v}. \tag{23}$$

In base all'equazione (23), servendosi del già citato « principio di massimo », ponendo

$$\text{rot}\, \boldsymbol{v} = 2\omega \tag{24}$$

e ricordando la (11), si può stabilire il seguente

Teorema sull'energia in m.f.d.:

« In ogni regione di un fluido viscoso in cui è

$$4\rho\omega^2 + \mu\mathfrak{J}_1\beta^2 \geq \frac{\mu}{\nu}\beta \boldsymbol{H}\times \boldsymbol{v}$$

l'energia totale totale non può assumere un valore massimo; mentre in ogni regione del fluido in cui è

$$4\rho\omega^2 + \mu\mathfrak{J}_1\beta^2 \leq \frac{\mu}{\nu}\beta \boldsymbol{H}\times \boldsymbol{v},$$

l'energia non può assumere un valore minimo ».

Per fluidi soggetti ai campi soddisfacenti la $\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} = 0$, l'equazione (23) diventa

$$\triangle_2\mathcal{E} - \frac{1}{\nu}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \rho(\text{rot}\, \boldsymbol{v})^2, \tag{25}$$

che coincide con l'equazione dell'energia nell'Idrodinamica ordinaria salvo la diversa espressione di $\mathcal{E}$ (cfr. [3]).

Si può quindi concludere che per i campi magnetici predetti il teorema dell'energia assicura che essa non può mai raggiungere un valore massimo in nessun punto della regione fluida.

I teoremi stabiliti hanno segnalato le particolari proprietà di cui godono i fluidi soggetti a campi magnetici per cui è $\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}=0$; sotto la loro azione il fluido si comporta, nei confronti della pressione e dell'energia, come nell'Idrodinamica colla vertenza di tener conto della pressione e dell'energia magnetica.

RIFERIMENTI

[1] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, New York, 1962.

[2] V. C. A. FERRARO - C. PLUMPTON, *An introduction to Magnetofluid Mechanics*, Oxford Un. Press, 1962.

[3] J. SERRIN, *Mathematical principles of classical fluid Mechanics*, Handbuch der Physik, vol. 8/1, 1959.