Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Particolari superficie anolonome d'uno spazio a connessione lineare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.3, p. 253–259.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_253_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Particolari superficie anolonome d'uno spazio a connessione lineare

Nota di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna) (*) (**)

Sunto. - *Si riferiscono vari risultati sulle superficie anolonome d'uno spazio a connessione lineare, per le quali la proiettività di Bompiani è singolare.*

Summary. - *Some results on non holonomic surfaces (in a linear connexion), whose Bompiani projectivities are singular, are related.*

1. In questa Nota si espongono alcuni risultati su particolari tipi di superficie anolonome d'uno spazio a connessione lineare a tre dimensioni. Per le dimostrazioni e per maggiori dettagli si rimanda ad un lavoro in corso di stampa negli «Annali dell'Università di Ferrara», dal titolo «Tipi particolari di superficie anolonome in uno spazio a connessione lineare»: di questo conserveremo le denominazioni e la numerazione.

Indichiamo alcuni particolari tipi di connessioni lineari $\mathfrak{L}_3$ [1] che si considereranno nel seguito; accanto a ciascuno scriviamo le espressioni delle forme di torsione o di curvatura che l'individuano (quando non è scritta l'espressione generale, s'intende che le forme non scritte si ricavano permutando circolarmente gl'indici) [2].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 12 aprile 1964.

(1) Per quanto riguarda le connessioni lineari, si veda A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie* (Cremonese, Roma 1955), p. 72 e segg.

(2) Sui tensori di curvatura e di torsione, cfr. E. CARTAN, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, «Ann. Ec. Norm. Sup.» (Ser. III) t. 40, p. 325 (1923), t. 41, p 1 (1924), t. 42, p. 17 (1925); v. cap. VII.

1) Connessioni per cui è nullo il 1° tensore di torsione $\mathcal{T}$: $\Omega^i = \omega^i \wedge \psi$.

2) Connessioni ($\mathcal{L}_3^0$) per le quali esiste un «piano» per ogni punto e giacitura (si annullano $\mathcal{T}$ e il primo tensore di curvatura):

$$\Omega^i = \omega^i \wedge \psi, \qquad \Omega_1^1 = \Psi - J^2\omega^3 \wedge \omega^1 - G^3\omega^1 \wedge \omega^2,$$
$$\Omega_1^2 = J^2\omega^2 \wedge \omega^3 + K_1\omega^1 \wedge \omega^2, \qquad \Omega_2^1 = G^1\omega^3 \wedge \omega^1 - K_2\omega^1 \wedge \omega^2.$$

3) Connessioni ($\mathcal{L}_3'$) per le quali s'annullano il 1° e il 3° tensore di curvatura:

$$\Omega_i^k = G^k\omega^{i'} \wedge \omega^{i''} + \delta_i^k\Omega$$

(i, i', i'' permutazione di classe pari di 1, 2, 3).

4) $\mathcal{L}_3^*$: sono quelle appartenenti ai tipi 1) e 3) contemporaneamente.

5) $\mathcal{L}_3$ localmente a parallelismo assoluto: $\Omega_i^k = \delta_i^k\Omega$.

6) $\mathcal{L}_3^{***}$: sono quelle appartenenti sia al tipo 1) che al tipo 5) [3]. (ψ è una forma lineare; Ψ, Ω forme quadratiche esterne).

Ciò premesso, sia S una superficie anolonoma d'uno spazio a connessione lineare: sia ξ il piano associato ad ogni punto $a \in V_3$ (piano tangente). S genera la proiettività di BOMPIANI K [4], che è un'applicazione della stella di direzioni dello spazio T_a tangente in a alla V_3 nel piano affine rigato di sostegno ξ, e di conseguenza una proiettività K' (subordinata a K) applicazione del fascio di direzioni di ξ in se stesso. Per ogni congruenza Γ di curve, resta definito in ogni punto a un cono quadrico, luogo delle direzioni da tali che le tangenti alle immagini in uno spazio affine delle curve di Γ in a ed in $a + da$ siano incidenti: quando Γ è un sistema di asintotiche, si ha il cono di BOMPIANI [5].

[3] Per quanto concerne tali tipi di $\mathcal{L}_3$, cfr. E. CARTAN, op. cit. in [2], n. 64 ed F. SPERANZA, *Superficie anolonome d'uno spazio a connessione lineare. Determinazione di particolari tipi di connessioni*, «Atti Acc. Sc. Ist. Bologna», (Ser. XI) T. 10_2, p. 123 (1963), nn. 4 e 6.

Sui «piani» e sulle $\mathcal{L}_3$ che ne posseggono, cfr. E. CARTAN, op. cit., n. 64.

[4] Cfr. E. BOMPIANI, *Sulle varietà anolonome*, Note I, II: «Rend. Acc. Naz. Lincei» (Ser. VI), Vol. 27, pp. 37 e 45 (1938_1), n. 4; G. VRANCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, Vol. II (Ed. de l'Acad. de la R.P.R., Bucuresti 1957), p. 238 e segg.

[5] Cfr. (per le superficie anolonome d'uno spazio proiettivo) E. BOMPIANI, op. cit. in [4], n. 7; T. MIHAILESCU, *Sur les variétés non holonomes*

Quasi sempre supporremo K (e quindi anche K') singolare: diremo *direzione* σ (o *stazionaria*) la direzione di T_a a corrispondente indeterminata in K' e *direzione* φ (o *fissa*) la direzione corrispondente in K' ad una direzione generica (non stazionaria). Le relative curve si diranno curve σ (stazionarie) e curve φ (fisse): esse sono le curve asintotiche di S. Quando sono distinte, S si dirà S_{I}, quando coincidono S_{II}, quando sono indeterminate S_{III}.

Le S_{I} e S_{II} si distingueranno in due tipi, a seconda che, per un punto a generico, le rette corrispondenti in K ad una direzione generica costituiscono un fascio proprio (e si hanno in tal caso i sottotipi S_{I}^1, S_{II}^1) o improprio (e si hanno allora i sottotipi S_{I}^0, S_{II}^0).

Per le S_{III}, nella K relativa ad un punto generico può accadere che la retta corrispondente ad una direzione generica sia propria (S_{III}^1) o impropria (S_{III}^0). Per le S_{I}^1 si definisce poi il *piano* τ, luogo delle direzioni la cui retta corrispondente è parallela alla direzione σ; per le S_{I}^0, S_{II}^0, il *piano* τ è il luogo delle direzioni la cui retta corrispondente è impropria. Infine, diremo, per una S_{III}, *direzione* ω la direzione parallela alla retta corrispondente ad una retta generica, e *curve* ω la curve relative.

2. Diamo anzitutto *la costruzione della più generica* S *a* K *singolare,* e più precisamente *delle* S *di cui sono assegnate le curve* σ. Cominciamo ad osservare che *le curve* σ *sono le* (eventuali) *curve di* S *lungo le quali* ξ *viene trasportato per parallelismo;* e *le immagini delle curve* σ *in uno spazio affine sono curve piane.* Allora, assegnato un sistema di curve γ i cui sviluppi siano curve piane, se esse non sono autoparallele, *si associ ad ogni punto il piano che ha per immagine il piano contenente l'immagine della curva;* se esse sono autoparallele, *si prenda su ciascuna di esse un punto e un piano del relativo spazio tangente contenente la direzione di* γ, *e si trasporti tale piano per parallelismo lungo* γ: le curve γ sono allora le curve σ della S così costruita.

Si hanno i seguenti risultati:

I) *Per una* S *qualsiasi, i coni di* BOMPIANI *relativi ad un sistema di asintotiche* λ *sono degeneri allorchè si verifica uno dei seguenti casi:*

1) *Le curve* λ *sono autoparallele; la tangente a* λ *è allora retta singolare del cono.*

de l'S_3 projectif. «Bull Math. de la Soc. Roumaine des Sciences», T. 44, p. 35 (1942); *Sur les variétés non holonomes paraboliques,* ibid. T. 45, p 139 (1943).

2) *K è singolare, le* λ *essendo le curve fisse di* S; ξ *fa allora parte del cono* [6].

II) *Se i coni di* BOMPIANI *relativi alle curve fisse di una* S_I^1 *sono piani doppi, o sono indeterminati, le curve* φ *sono autoparallele. Gli spazi nei quali la proposizione si può invertire sono quelli con un «piano» per ogni punto e giacitura* ($\mathfrak{L}_3^0$).

III) *Se valgono due delle tre proposizioni*

α) *Le curve* σ *di* S_I^1 *sono autoparallele*

α') *I piani* τ *danno luogo ad una* S *organizzabile* (cioè sono i piani tangenti alle superficie d'uno strato):

α'') *Il* 1° *e il* 3° *tensore di curvatura sono nulli,*

dove si suppone che α), α') valgano per una S_I^1 che in ogni punto abbia arbitrari il piano τ e le direzioni φ, σ (e quindi anche il piano ξ), *allora vale pure la terza.*

D'ora in poi, quando si dirà che qualche elemento d'una S (o d'una superficie) è arbitrario, s'intenderà che per ogni punto esiste una S di cui quegli elementi si possono assumere ad arbitrio.

IV) *In uno spazio esiste una* S_I^0 *con piano* τ *e direzioni* φ, σ *arbitrari se e solo se esso è localmente a parallelismo assoluto.*

Per avere un esempio di S_I^0, si consideri in uno spazio a parallelismo assoluto una direzione, e la si trasporti per parallelismo in tutti i punti, ottenendo così un sistema di autoparallele. A ciascun punto si associ un piano contenente la tangente alla relativa autoparallela. in modo che i piani associati ai punti di questa non si portino gli uni negli altri per parallelismo.

V) *In uno spazio a parallelismo assoluto locale la superficie anolonoma dei piani* τ *d'una* S_I^0 *è organizzabile.*

VI) *In uno spazio a parallelismo assoluto locale, il cono di* BOMPIANI *delle curve* φ *di* S_I^0 *si spezza nei piani* ξ, τ, *a meno che le curve* φ *non siano autoparallele. nel qual caso è indeterminato. Inoltre, se le curve* φ *d'una* S_I^0 *sono autoparallele, esse sono parallele.*

(6) Per una S dello spazio proiettivo, tali risultati si possono dedurre, in parte, da quelli di MIHAILESCU, *Systemes triples de variétés non holonomes lineaires de l'espace projectif ordinaire,* «Ann. di Mat.» (Ser. IV) Vol. 53, p. 231 (1961), v. § 6. Cfr. pure la seconda op. cit in (5).

Diciamo che un sistema di autoparallele, in uno spazio a parallelismo assoluto, è costituito di parallele allorchè le loro direzioni si portano l'una nell'altra per parallelismo.

Per una superficie indichiamo con K' la proiettività delle tangenti coniugate.

VII) *Se esiste una superficie a punti parabolici, con piano tangente arbitrario, per la quale valga una delle due proprietà*

1) K' *è singolare*, oppure

2) *il piano tangente viene trasportato per parallelismo lungo le asintotiche,*

il tensore $\mathfrak{T}$ *è nullo: se ciò accade, per ogni superficie a punti parabolici valgono le* 1), 2).

VIII) *Per ogni superficie a punti parabolici le asintotiche sono autoparallele lungo le quali il piano tangente è trasportato per parallelismo se e solo se la connessione è del tipo* $\mathfrak{L}_3^0$.

IX) *Se esiste una* S_{II} *organizzabile, con piano tangente arbitrario,* $\mathfrak{T}$ *è nullo: viceversa, se* $\mathfrak{T}$ *è nullo, ogni* S_{II} *è organizzabile, anzi, tutti gli strati di superficie paraboliche sono delle* S_{II}.

X) *I coni di* BOMPIANI *d'una* S_{II}^1 *degenerano in* ξ *ed in un altro piano, che passa per la tangente asintotica se e solo se le curve* σ *sono autoparallele* (ma che può esser indeterminato).

XI) *Per ogni* S_{II}^1 *le curve asintotiche sono autoparallele se e solo se* $\mathfrak{L}_3$ *è* $\mathfrak{L}_3^0$.

XII) *Il cono associato ad una congruenza* Γ *di curve non asintotiche d'una* S_{II}^1 *contiene sempre la direzione* σ *e la tangente alla curva di* Γ; *se valgono due delle tre proposizioni*

β) *il cono è tangente lungo* σ *al piano cui corrisponde in* K *la tangente alla curva di* Γ,

β') *i piani di cui sopra inviluppano uno strato,*

β'') $\mathfrak{L}_3$ *è localmente a parallelismo assoluto,* dove si suppone che β), β′) valgono per ogni S^1_{II}, *allora vale anche la terza.*

XIII) *In uno spazio esiste una* S^0_{II} *con piani* ξ, τ *arbitrari se e solo se si annullano il* 1° *e il* 3° *tensore di curvatura.*

XIV) *Per una connessione del tipo* $\mathfrak{L}_3'$, *le curve asintotiche d'una* S^0_{II} *sono autoparallele.*

XV) *Se per una connessione del tipo* $\mathfrak{L}_3'$ *esiste una* S^0_{II} *organizzabile con piano* ξ *arbitrario, la connessione è del tipo* $\mathfrak{L}_3^*$ *; viceversa, se ciò accade, ogni* S^0_{II} *è organizzabile.*

XVI) *Se per una* S^0_{II} *con piani* ξ, τ *arbitrari la superficie anolonoma dei piani* τ *è organizzabile, lo spazio è a parallelismo assoluto locale; in un tale spazio, la superficie dei piani* τ *d'una* S^0_{II} *è sempre organizzabile.*

XVII) *Per una connessione* $\mathfrak{L}_3'$ *i coni di* Bompiani *d'una* S^0_{II} *si spezzano in* ξ *ed in un altro piano per la tangente asintotica; se esso risulta esser* τ *per una* S^0_{II} *con piani* ξ, τ *arbitrari, lo spazio è localmente a parallelismo assoluto · e in tali spazi i coni di* Bompiani *si spezzano in* ξ, τ, *o sono indeterminati.*

XVIII) *In una connessione del tipo* $\mathfrak{L}_3'$, *le curve asintotiche d'una* S^0_{II} *sono tali anche per la superficie dei piani* τ.

XIX) *In una connessione del tipo* $\mathfrak{L}_3'$, *la superficie dei piani* τ *è, per ogni* S^0_{II}, *a* K *singolare se e solo se la connessione è localmente a parallelismo assoluto.*

XX) *Se* $\mathfrak{L}_3$ *è localmente a parallelismo assoluto, le curve* φ *di una* S^0_{II} *sono tali anche per la superficie dei piani* τ; *se e solo se le asintotiche* S^0_{II} *sono parallele, la superficie dei piani* τ *è una* S^0_I, *o una* S^0_{II}, *o una* S_{III} *per la quale le curve* φ *di* S^0_{II} *sono curve* ω.

Per avere una S^0_{II} le cui asintotiche sono parallele, si applichi la costruzione che segue IV), con l'avvertenza che i piani ξ siano trasportati per parallelismo lungo le asintotiche (la S generata può però anche essere di tipo più particolare).

XXI) *Se le asintotiche d'una* S^0_{II} *sono autoparallele fra di loro parallele, i coni di* BOMPIANI *sono indeterminati, e viceversa.*

XXII) *Uno spazio a parallelismo assoluto locale, se la superficie anolonoma dei piani* τ *relativa ad una* S^0_{II} *(con piano* ξ *arbitrario) è una* S_{II} *o una* S_{III}*, è del tipo* $\mathfrak{L}_3^{***}$*: e, in un tale spazio, la suddetta superficie è sempre una* S_{II} *o una* S_{III}.

XXIII) *Il cono associato ad una congruenza di curve d'una* S_{III} *degenera in* ξ *ed in un altro piano, che passa per la tangente alla curva della congruenza se e solo se questa è costituita di autoparallele.*

XXIV) *In uno spazio esiste una* S^1_{III} *con piano* ξ *e direzione* ω *arbitrari se e solo se la connessione è* $\mathfrak{L}_3^0$.

XXV) *In una connessione* $\mathfrak{L}_3^0$*, le* S^1_{III} *sono tutte e sole le famiglie di «piani» non «paralleli» (se esistono famiglie di «piani paralleli»*, tali cioè che i piani tangenti si trasportino gli uni negli altri per parallelismo, *esse sono* S^0_{III}*).*

XXVI) *Se per una* S^1_{III}*, con direzione* ω *e piano* ξ *arbitrari, le curve* ω *sono autoparallele,* $\mathfrak{L}_3$ *è* $\mathfrak{L}_3^*$ *: ed in tali spazi le curve* ω *d'ogni* S^1_{III} *sono autoparallele.*

XXVII) *Il cono relativo alle direzioni* ω *d'una* S^1_{III} *è sempre degenere, una componente essendo* ξ*; se esso è un piano doppio per una* S^1_{III} *(con piano* ξ *e direzione* ω *arbitrari),* $\mathfrak{L}_3$ *è* $\mathfrak{L}_3^{***}$*: viceversa, in tali spazi il cono suddetto è sempre un piano doppio (o è indeterminato).*

XXVIII) *In uno spazio esiste una* S^0_{III} *con piano* ξ *arbitrario se e solo se lo spazio è localmente a parallelismo assoluto.*

In un tale spazio le S^0_{III} si costruiscono assumendo in uno degli spazi tangenti a V_3 un piano e trasportandolo per parallelismo negli altri spazi.

XXIX) *Se una* S^0_{III} *è organizzabile, essa consiste d'uno strato di «piani paralleli»: ciò accade per una* S^0_{III} *con piano* ξ *arbitrario se e solo se* $\mathfrak{L}_3$ *è* $\mathfrak{L}_3^{***}$.