Bollettino Unione Matematica Italiana

Oscar Montaldo

Sulla non negatività delle funzioni paraboliche elementari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.3, p. 260–265.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_260_0>

Sulla non negatività delle funzioni paraboliche elementari

Nota di Oscar Montaldo (a Cagliari) (*)

Sunto. - *Si dimostra, con l'uso dei metodi relativi a differenze finite, la non negatività delle soluzioni della equazione parabolica elementare*

$$(D_x^{2n} + (-1)^n D_y)u = 0$$

Summary. - *The elementary parabolic equation*

$$(D_x^{2n} + (-1)^n D_y)u = 0$$

is considered and the non-negativity of his solutions is proved by a finite differences type method.

1. Introduzione - Consideriamo l'equazione

$$L(u) = (D_x^{2n} + (-1)^n D_y)u = 0 \tag{1}$$

e il rettangolo $R(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq a)$; è stato dimostrato (1) che esiste ed è unica una funzione (che diremo *parabolica elementare*), continua in R con tutte le sue derivate rispetto ad x fino a quella di ordine $2n - 1$, soluzione di (1) per $0 < x < 1$, $0 < y \leq a$ e tale che si abbia

$$\begin{cases} u(x,\ 0) = f(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ D_x^i u(0, y) = f_{1i}(y),\ D_x^i u(1, y) = f_{2i}(y), & 0 \leq y \leq a,\ i = 0,\ 1, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{2}$$

essendo le $f(x)$ e $f_{ji}(x)$ $(j = 1,\ 2)$ funzioni continue nei rispettivi intervalli di definizione con $f_{10}(0) = f(0)$, $f_{20}(0) = f(1)$.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 5 maggio 1964.

(1) Cfr. L. Cattabriga, *Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine 2n*, « Rend Sem. Mat. Un. Padova », XXVIII (1958).

Il metodo usato per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (1)-(2) non si presta a studiare facilmente certe interessanti proprietà di tali funzioni come, ad esempio, la non negatività. Tale proprietà si ricava invece semplicemente servendosi dei metodi relativi alle differenze finite i quali, al contrario, presentano notevoli difficoltà quando si vogliano usare per stabilire teoremi di esistenza e unicità.

Seguendo R. BELLMAN ([2]), considerata già dimostrata come, ad esempio, nella Nota citata in (1) l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (1)-(2), ovvero del problema

$$(3)\qquad \begin{cases} L(u) = 0 & \text{per } 0<x<1,\ 0<y\leq a \\ D_x^i u(0, y) = D_x^i u(1, y) = 0 & \text{»}\quad y>0;\ i=0,1,\dots,n-1 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{»}\quad 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

cui può ridursi il problema (1)-(2), faremo facilmente vedere, basandoci sul metodo delle differenze finite, che la soluzione di (3) è per $y > 0$ non negativa se è non negativa e concava per $y=0$ cioè se è non negativa e concava la $f(x)$ in $[0, 1]$.

2. - L'operatore $L(u)$, tradotto in termini di differenze finite, diventa

$$L_h(u) = \frac{1}{h^{2n}}\left\{(-1)^n\binom{2n}{n} u\left[x,\ y + h^{2n}\Big/\binom{2n}{n}\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{1}^{n}{}_s\, (-1)^{n-s}\binom{2n}{n-s}[u(x+sh,\ y) + u(x-sh,\ y)]\right\}$$

Supposto che la u abbia derivate rispetto a x fino all'ordine $2n+2$ e rispetto ad y fino all'ordine 2, questo operatore è un'approsimazione dell'operatore $L(u)$.

Si ha infatti

$$L_h(u) = \frac{1}{h^{2n}}\left\{(-1)^n\binom{2n}{n}\left[u(x,\ y) + h^{2n}\Big/\binom{2n}{n} D_y u(x,\ y)\right] + \right.$$

([2]) Cfr. R. BELLMAN, *On the non-negativity of solutions of the heat equation*, « Boll. U. M. I. », XII, 1957.

» » , *On non-negativity of Green's fonctions*, « Boll. U. M. I. », XVIII, 1963.

$$+\sum_1^n{}_s\,(-1)^{n-s}\binom{2n}{n-s}\sum_0^{2n+1}{}_k\ [1+(-1)^k]\,\frac{(sh)^k}{k!}\,D_x^k u(x,\ y)+$$

$$+\sum_1^n{}_s\,(-1)^{n-s}\binom{2n}{n-s}\frac{(sh)^{2n+2}}{(2n+2)\,!}\,[(D_x^{2n+2}u)_{\bar{x}_s,y}+(D_x^{2n+2}u)_{\bar{\bar{x}}_s,y}]+$$

$$+\ 1/2\left[h^{2n}\Big/\binom{2n}{n}\right]^2(D_y^2u)_{x,\bar{y}}\ \Big\}$$

dove $\bar{x}_s$, $\bar{\bar{x}}_s$ sono opportuni punti degli intervalli $(x-sh,\ x+sh)$, $s=1,\dots,\ n$ e $\bar{y}$ un opportuno punto dell'intervallo $\left(y,\ y+h^{2n}\Big/\binom{2n}{n}\right)$.

Tenuto conto che il coefficiente di u

$$(-1)^n\binom{2n}{n}+2\sum_1^n{}_s\,(-1)^{n-s}\binom{2n}{n-s}$$

è uguale a zero e che il coefficiente di $D_x^k u$

$$\frac{h^k}{k!}\sum_1^n{}_s\,(-1)^{n-s}\binom{2n}{n-s}[1+(-1)^k]s^k\,,\qquad (k=1,\ 2,\dots;\ 2n,\ 2n+1)$$

è uguale a zero per $k\neq 2n$ e uguale a h^{2n} per $k=2n$, riesce

$$(4)\qquad L_h(u)=L(u)+h^2r_1(x,\ y)+h^{2n}r_2(x,\ y)=L(u)+0(h^2)$$

dove si è posto

$$r_1(x,\ y)=\frac{1}{(2n+2)\,!}\sum_1^n{}_s\,(-1)^{n-s}\binom{2n}{n-s}[(D_x^{2n+2}u)_{\bar{x}_s,\bar{y}}+(D_x^{2n+2}u)_{\bar{\bar{x}}_s,y}]$$

$$r_2(x,\ y)=1/2\binom{2n}{n}(D_y{}^2u)_{x,\bar{y}}\,.$$

Osserviamo che se u è un polinomio di grado non superiore a $2n+1$ rispetto a x e di grado non superiore a 1 rispetto a y allora è $L_h(u)=L(u)$.

Diremo *preparaboliche elementari* le funzioni per le quali è

$$L_h(u) = 0$$

Per esse si ha la formula

$$(5) \qquad u(x,\ y+\delta) = 1\Big/\binom{2n}{n} \sum_{1}^{n}{}_s (-1)^{s+1} \binom{2n}{n-s} \Big[u(x+sh,\ y) + u(x-sh,\ y)\Big], \quad \Big[\delta = h^{2n}\Big/\binom{2n}{n}\Big]$$

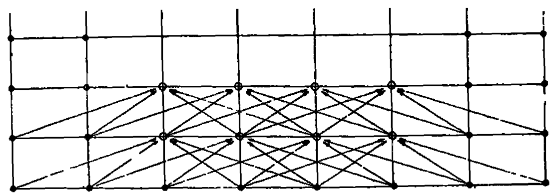
che da il valore di u in un nodo qualunque del reticolo, noti i valori di u negli n nodi precedenti e negli n nodi seguenti dell'orizzontale immediatamente inferiore.

La (5) estende la ben nota formula di media nel caso di $n = 1$.

Il problema (1) - (2), in termini di differenze finite, si scrive

$$(6) \quad \begin{cases} v(x,\ 0) = f(x) & \text{per } x = 0,\ h,\ 2h, \ldots, 1 \\ \left.\begin{array}{l} v(sh,\ y) = \sum_0^s{}_r \binom{s}{r} h^r f_{1r}(y+\delta) \\ v(1-sh, y) = \sum_0^s{}_r \binom{s}{r} h^r f_{2r}(y+\delta) \end{array}\right\} & \text{per } s=0, 1, \ldots, n-1;\ y=0, \delta, 2\delta, \ldots \\ v(x,\ y+\delta) = 1\Big/\binom{2n}{n} \sum_1^n{}_s (-1)^{s+1} \binom{2n}{n-s} [v(x+sh, y) + v(x-sh, y)] & \\ \qquad \text{per } x = nh, (n+1)h, \ldots, 1-nh,\ y = 0, \delta, 2\delta, \ldots & \end{cases}$$

Lo schema dei calcoli indicati nelle (6) in riferimento al dominio reticolare R^* che ha per frontiera la spezzata di lati $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$; $x = 0$, $y \geq 0$; $x = 1$, $y \geq 0$, è illustrato nella figura seguente per il caso di $n = 2$.



3 - Riferiamoci ora al problema (3) che in termini di differenze finite si scrive

$$(3_1)\quad \begin{cases} v(x,\ y+\delta)=1\Big/\binom{2n}{n}\sum\limits_s^{n}(-1)^{s+1}\binom{2n}{n-s}[v(x+sh)+v(x-sh)], \\ \qquad\qquad x=nh,\ (n+1)h,\ldots,\ 1-nh,\ y=0,\ \delta,\ 2\delta,\ldots \\ v(x,\ 0)=f(x)\ , \qquad x=0,\ h,\ 2h,\ldots,\ 1 \\ v(sh,\ y)=v(1-sh,\ y)=0 \quad s=0,\ 1,\ldots,\ n-1,\ y=\delta,\ 2\delta,\ldots \end{cases}$$

e supponiamo che la $f(x)$ sia in $[0,\ 1]$ non negativa e concava.

La prima relazione delle (3_1) si può anche scrivere

$$v(x,\ k\delta)=1\Big/\binom{2n}{n}\left[\sum_{1}^{n}{}_s(-1)^{s+1}\binom{2n}{n-s}\Delta_s\right]^{(k)}f(x), \qquad k=1,\ 2,\ldots$$

avendo posto

$$\Delta_s f(x)=f(x+sh)+f(x-sh)$$

Per $k=1$, tenuto conto della supposta non negatività e concavità di $f(x)$ in $[0,\ 1]$, riesce

$$v(x,\ \delta)\geq\sum_{1}^{m}{}_s\, a_s\,\Delta_{2s}f(x)\geq 0$$

essendo

$$a_s=1/2\left[\binom{2n}{n-2s-1}-2\binom{2n}{n-2s}+\binom{2n}{n-2s+1}\right]>0,\ s=1,2,\ldots,m$$

con $m=n/2$, $m=(n-1)/2$ secondochè n sia pari o dispari e convenendo di porre $\binom{2n}{-1}=0$.

È facile verificare, con ragionamenti dello stesso tipo, che è $v(x,\ k\delta)\geq 0$ per qualunque k.

Supposto ora che la $f(x)$ sia sufficientemente regolare in guisa da aversi per la soluzione $u(x, y)$ di (3) (che supponiamo, come si è detto, esistente e unica)

$$\operatorname*{Max}_{R} [\,|D_y^2 u(x, y)|, |D_x^{2n+2} u(x, y)|\,] \leq H < \infty^{(3)},$$

dimostriamo che in R è

$$\lim_{h \to 0} v(x, y) = u(x, y)$$

Dalla (4), se $u(x, y)$ è soluzione di $L(u) = 0$, si ottiene

$$u(x, y + \delta) = 1\Big/\binom{2n}{n} \sum_{1}^{n}{}_s (-1)^{s+1} \binom{2n}{n-s} [u(x + sh, y) + u(x - sh, y)] +$$
$$+ h^{2n+2} R_1(x, y) + h^{4n} R_2(x, y)$$

essendo in R $|R_1(x, y)| \leq \mu H$, $|R_2(x, y)| \leq \nu H$ con

$$\mu = \frac{2 \sum_{1}^{n}{}_s \binom{2n}{n-s}}{\binom{2n}{n}(2n+2)!}, \qquad \nu = 1/2 \binom{2n}{n}^2.$$

Pertanto posto

$$d(y) = \operatorname*{Max}_{x \in [0, 1]} |v(x, y) - u(x, y)|,$$

si ha

$$d(y + \delta) \leq \lambda d(y) + \mu H h^{2n+2} + \nu H h^{4n}$$

con $\lambda = 2 \sum_{1}^{n}{}_s \binom{2n}{n-s} \Big/ \binom{2n}{n}$.

Da quando precede, tenuto conto che è $d(0) = 0$, riesce

$$d(y) \leq \alpha h^{2n+2} + \beta h^{4n}, \qquad 0 \leq y \leq a = \delta N$$

con $\alpha = \dfrac{\lambda^N - 1}{\lambda - 1} \mu H$, $\beta = \dfrac{\lambda^N - 1}{\lambda - 1} \nu H$, che dimostra quanto volevamo.

(3) Ció avviene, per esempio, se $f(x)$ è un polinomio in seni e coseni.