Froim Marcus

Sulle deformazioni infinitesime delle superficie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.3, p. 270–274.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_270_0>

Sulle deformazioni infinitesime delle superficie

Nota di FROIM MARCUS (a Jasi, Romania) (*)

Sunto. - *Si dimostra che una deformazione infinitesima di una superficie S tale che le direzioni degli spostamenti dei suoi punti formino una congruenza coniugata alla superficie, può avvenire soltanto se la S è un piano.*

È ben noto il seguente risultato [1].

Una deformazione infinitesima di una superficie S tale che gli spostamenti dei punti avvengano normalmente alla superficie, può avvenire soltanto se la S è un piano.

Scopo di questa nota è di mostrare che questo risultato non è che un caso particolare del seguente

TEOREMA - *Una deformazione infinitesima di una superficie S tale che le direzioni degli spostamenti dei suoi punti formino una congruenza coniugata alla superficie, può avvenire soltanto se la S è un piano.*

Infatti sia (x') una deformata infinitesima di una superficie (x) che supponiamo riferita alle sue asintotiche reali (u, v) ed $(\bar{x})$ una superficie che si corrisponde con la (x) per ortogonalità d'elementi. Allora [1]

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = x + \varepsilon\bar{x} + (2), \\ y' = y + \varepsilon\bar{y} + (2), \\ z' = z + \varepsilon\bar{z} + (2). \end{cases}$$

ε essendo una costante infinitesima le cui potenze superiori alla prima si trascurano, e (2) funzioni di u, v, ε, di secondo ordine in ε.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I. il 5 maggio 1964.

Se φ è la *Verschiebungs-Funktion di Weingarten,* allora per ogni soluzione di

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \rho}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 ,$$

si ha [1]

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \rho\left(X \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \varphi \frac{\partial X}{\partial u}\right); \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \rho\left(-X \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \varphi \frac{\partial X}{\partial u}\right), \tag{2}$$

dove $\rho = \frac{D'}{\sqrt{eg - f^2}}$, D', e, f, g, essendo rispettivamente i coefficienti della terza e seconda forma fondamentale della superficie (x).

Per trovare la condizione affinchè la congruenza $x\bar{x}'$ determinata dalle direzioni degli spostamenti dei punti della superficie (x) nella sua deformazione infinitesima sia coniugata alla superficie (x), porremo

$$\begin{cases} \bar{x} = Ax_u + Bx_v + X , \\ \bar{y} = Ay_u + By_v + Y , \\ \bar{z} = Az_u + Bz_v + Z , \end{cases} \tag{3}$$

dove X, Y, Z sono i coseni della normale della superficie (x) ed A, B, funzioni di u, v, da determinare. Dalla (3), tenendo conto di (2) risulta

$$\begin{cases} \rho\varphi_u = BD' ; \qquad \rho\varphi_v = -AD' \\ A_u + A\left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} + B\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{FD'}{EG - F^2} = -\rho\varphi \frac{FD'}{EG - F^2} ; \\ A_v + A\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + B\left\{ \begin{matrix} 2\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \frac{GD'}{EG - F^2} = -\rho\varphi \frac{GD'}{EG - F^2} ; \\ B_u + A\left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} + B\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \frac{ED'}{EG - F^2} = \rho\varphi \frac{ED'}{EG - F^2} ; \\ B_v + A\left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} + B\left\{ \begin{matrix} 2\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{FD'}{EG - F^2} = \rho\varphi \frac{FD'}{EG - F^2} , \end{cases} \tag{4}$$

dove E, F, G, sono i coefficienti della prima forma fondamentale della (x) e $\left\{ {i \; j \atop k} \right\}$ i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie rispetto a questa forma.

Ponendo $d(\alpha x + \sigma \bar{x}) = (a + d\alpha)x + (b + d\sigma)\bar{x}$ si ha

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \,; \quad b = \rho\sigma(\varphi_u \, du - \varphi_v \, dv), \\[2ex] du\left(1 - \rho\sigma_1\varphi \dfrac{FD'}{EG - F^2} - A\sigma_1\rho\varphi_u\right) + dv\left(A\sigma_1\rho\varphi_v - \rho\sigma_1\varphi \dfrac{GD'}{EG - F^2}\right) = 0, \\[2ex] dv\left(1 + \rho\sigma_1\varphi \dfrac{FD'}{EG - F^2} + B\rho\sigma_1\varphi_v\right) + du\left(\sigma_1\rho\varphi \dfrac{ED'}{EG - F^2} - B\sigma_1\rho\varphi_u\right) = 0 \end{array} \right.$$

con $\sigma_1 = \dfrac{\sigma}{\alpha}$.

La congruenza xx' è coniugata alla superficie se

$$(6) \qquad 2\rho \frac{FD'}{EG - F^2} + A\rho\varphi_u + B\rho\varphi_v = 0 \,,$$

che tenendo conto di (4_1) diventa

$$(7) \qquad FD' = 0 \,.$$

Se $D' = 0$, la superficie (x) è un piano e pertanto il teorema è dimostrato.

Supponiamo allora $F = 0$. Perciò la superficie (x) è minima, — e noi sceglieremo i parametri u, v in modo che

$$(8) \qquad ds^2 = \frac{1}{\mu^2}(du^2 + dv^2) \,,$$

con μ soluzione di

$$(9) \qquad (\log \mu)_{uu} + (\log \mu)_{vv} + \mu^2 = 0 \,.$$

Ponendo $\mu = e^{\psi}$ avremo

$$
(10)\qquad \begin{cases}
\psi_{uu} + \psi_{vv} + e^{2}\psi = 0\,, \\
E = G = e^{-2\psi}\,; \quad e = g = e^{2\psi}\,; \quad F = f = 0\,, \\
\left\{ {1\ 1 \atop 1} \right\} = -\left\{ {2\ 2 \atop 1} \right\} = \left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\} = -\,\psi_u\,; \\
\qquad\qquad \left\{ {2\ 2 \atop 2} \right\} = -\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\} = \left\{ {1\ 2 \atop 1} \right\} = -\,\psi_v .
\end{cases}
$$

Dalle condizioni di Codazzi risulterà $D =$ costante, e senza diminuire la generalità la si può prendere uguale ad 1, cosicchè dalle (4) risulterà

$$
(11)\qquad \begin{cases}
A_u = A\psi_u + B\psi_v\,; \qquad A_v = A\psi_v - B\psi_u + e^{2\psi} - \varphi\,, \\
B_u = \ -A\psi_v + B\psi_u + e^{2\psi} + \varphi\,;\ B_v = A\psi_u + B\psi_v\,.
\end{cases}
$$

Da $A_{uv} = A_{vu}$ e $B_{uv} = B_{vu}$, tenendo conto dalle (11), si ha

$$
(12)\qquad \varphi_u = Be^{2\psi}\,; \qquad \varphi_v = -\,Ae^{2\psi}\,.
$$

Dunque

$$
(13)\qquad A\psi_u + B\psi_v = 0\ .
$$

Pertanto

$$
(14)\qquad A_u = B_v = 0\ ; \qquad A_v + B_u = 2e^{2\psi}\ .
$$

Conseguentemente

$$
(15)\qquad \begin{cases}
A = V'(v)\ ; \qquad B = U'(u)\ , \\
\psi = \psi(\mathfrak{T})
\end{cases} \qquad \text{con } \mathfrak{T} = U - V\ ,
$$

e di (14_2) avremo

$$
(16)\qquad V'' + U''\ T'' = 2e^{2\psi}\ .
$$

Operando su questa una volta con $\frac{\partial}{\partial u}$ e sul risultato con $\frac{\partial}{\partial v}$ si trova

$$(17) \qquad 2\psi'^2 + \psi'' = 0 \ .$$

Dunque

$$(18) \qquad \psi = \log(\bar{c}\mathfrak{T})^{\frac{1}{2}} , \qquad (\bar{c} = \text{cost.}).$$

Dalla (16) si ha

$$(16') \qquad U'' - 2\bar{c}U = - V'' - 2\bar{c}V = c, \qquad (c = \text{cost.}),$$

cosicchè

$$(19) \qquad U = c_1 + c_2 e^{\sqrt{2\bar{c}u}} + c_3 e^{-\sqrt{2\bar{c}u}};$$

$$V = c_1^* + c_2^* \cos\sqrt{2\bar{c}v} + c_3^* \sin\sqrt{2\bar{c}v},$$

se $c = 0$, $\bar{c} > 0$ oppure inversamente se $c = 0$, $\bar{c} < 0$;

$$(19') \qquad U = c_1 + c_2 e^{\sqrt{2\bar{c}u}} + c_3 e^{-\sqrt{2\bar{c}u}} - \frac{c}{2};$$

$$V = c_1^* + c_2^* \cos\sqrt{2\bar{c}v} + c_3^* \sin\sqrt{2\bar{c}v} - \frac{c}{2}$$

se $c \neq 0$, $\bar{c} > 0$ o inversamente se $c \neq 0$, $\bar{c} < 0$.

Ma sia nel primo che nel secondo caso si verifica che (10_1) non può essere soddisfatta che se $U = V = c_1$, e questo si deve scartare perchè sarebbe allora $E = G = 0$.

Dunque il caso $F = 0$ è da escludere. Pertanto se la congruenza xx' è coniugata alla superficie (x) allora $D' = 0$, e la supeficie (x) è un piano.

Ciò che si doveva dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, parte I e vol. I, parte I, 1923 e 1927. N. Zanichelli, Bologna.