Bollettino
Unione Matematica Italiana

Nives Maria Ferlan

Sull'andamento del minimo modulo delle funzioni analitiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.3, p. 275–288.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_275_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Sull'andamento del minimo modulo delle funzioni analitiche

Nota di NIVES MARIA FERLAN (a Milano) (*) (**)

Sunto. - *Si studia l'andamento del minimo modulo $m(r;\, f)$ della funzione analitica $f(z)$ attraverso quello della sua minima maggiorante monotona $\overline{m}(r;\, f)$ posta in relazione col massimo modulo $M(r;\, f)$. Si stabiliscono: una valutazione al disotto di $\overline{m}(r;\, f)$ retta da una «migliore costante»; la maggiorazione di una media integrale; alcune conseguenze per le funzioni $f(z)$ intere.*

1. Sia $f(z)$ funzione di z olomorfa per $|z| < R$ e poniamo, per $0 \leqq r < R$:

$$M(r;\, f) = \operatorname*{Max}_{\theta} |f(re^{i\theta})|, \qquad m(r;\, f) = \operatorname*{Min}_{\theta} |f(re^{i\theta})|$$

$$\overline{m}(r;\, f) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq u \leqq r} m(u;\, f)$$

($\overline{m}(r;\, f)$ è la minima maggiorante monotona del minimo modulo $m(r;\, f)$); anzi, per poter considerare queste funzioni anche per $|z| = R$ (ove non è richiesta la regolarità) e in ipotesi più generali per $f(z)$, poniamo

$$M(r;\, f) = \operatorname*{Sup}_{0 \leqq u < r} \operatorname{Max} |f(ue^{i\theta})|, \qquad \overline{m}(r;\, f) = \operatorname*{Sup}_{0 \leqq u < r} m(u;\, f)$$

(Sia per $r < R$ che per $r = R$ quando $f(z)$ è olomorfa su $|z| = R$ queste definizioni coincidono ovviamente con le precedenti).

Sono note proprietà dell'andamento di $m(r;\, f)$ in relazione a quello di $M(r;\, f)$, per esempio (¹)

«Se $0 < \rho - \varepsilon < \rho < 1$ e $f(z)$ è una funzione intera di ordine maggiore di $\rho - \varepsilon$ e di accrescimento non superiore a $(\rho,\, 0)$, esiste una successione $r_n \to +\infty$ tale che $\log m(r_n;\, f) > \cos \pi\rho \cdot \log M(r_n;\, f) > r_n^{\rho - \varepsilon}$».

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 30 maggio 1964.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 (1962-'64) del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

(¹) Vedere BOAS [1], pag. 43.

Ci proponiamo di indagare l'andamento di $\bar{m}(r; f)$ in relazione a quello di $M(r; f)$.

2. Una «migliore costante» per l'andamento di $\bar{m}(r; f)$.

È nota la elegante proposizione di MILLOUX-SCHMIDT [2]

«Se $f(z)$ è regolare in $|z| < 1$, ed è $|f(z)| < 1$ per $|z| < 1$, $\min\limits_{\theta} |f(re^{i\theta})| < \mu$ per $0 \leqq r < 1$, allora è

$$\log M(r; f) \leqq \left(1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{artg} \sqrt{r}\right) \cdot \log \mu \text{»}. \tag{1}$$

Il cambiamento di variabili $z = RZ$ $(0 \leqq r < R)$ conduce alla funzione $F(Z) = f(z)/M(R; f)$, regolare per $|z| < 1$, alla quale è applicabile la disuguaglianza (1). Esprimendo tale disuguaglianza per $f(z)$ essa assume la forma

$$\log \bar{m}(R; f) \geqq \varphi(r, R; f) \qquad 0 \leqq r < R \tag{2}$$

valida per $f(z)$ regolare in $|z| < R$ e dove

$$\begin{cases} \varphi(r, R; f) = \dfrac{1}{1 - \omega(r/R)} \log M(r; f) - \dfrac{\omega(r/R)}{1 - \omega(r/R)} \log M(R; f) \\ \omega(t) = (4/\pi) \operatorname{ar\,tg} \sqrt{t}. \end{cases} \tag{3}$$

Si può allora ricavare il seguente

TEOREMA I. – *Se $f(z)$ è regolare per $|z| < R$, risulta*

$$\begin{cases} \log \bar{m}(r; f) \geqq \log M(r; f) - \pi r \cdot D_r^- \log M(r; f) \\ 0 \leqq r < R \end{cases} \tag{4}$$

dove D_r^- denota la derivata sinistra rispetto a r, calcolata nel punto r.

π è la «migliore costante» per la quale vale (4).

DIMOSTRAZIONE. – Come vedremo: 1°) la smussatezza di $M(r; f)$ consente di stabilire (4); 2°) per garantire che π è la migliore

[2] Vedere MILLOUX [5], [6], LANDAU [4], SCHMIDT [7], HEINS [3].

costante si ricorre alla famiglia delle funzioni estremali di H. HEINS [2] attinenti al problema di MILLOUX.

1°) È noto che $\log M(r; f)$ è funzione continua convessa di $\log r$; se ne deduce che la funzione $M(r; f)$ è continua e differenziabile per ogni $r > 0$, salvo eventualmente per i valori di r costituenti un insieme al più numerabile; in ognuno di questi punti eccezionali esistono la derivata a sinistra e quella a destra. Assumendo $r < R_1 < R$, la (2) per r e R_1 assume la forma seguente:

$$\log \overline{m}(R_1; f) \geqq \log M(R_1; f) - \frac{1}{1-\omega(r/R_1)} \cdot \tag{5}$$

$$\cdot \{\log M(R_1; f) - \log M(r; f)\}$$

e ponendo $r/R_1 = 1 - \eta$ $(0 < \eta < 1)$ si ricava

$$\frac{1}{1-\omega(r/R_1)} = \frac{1}{1-\omega(1-\eta)} = \frac{\pi}{\eta}\left\{1 - \frac{\eta}{2} + o(\eta)\right\} \sim \frac{\pi}{\eta} \quad \text{per } \eta \to 0+.$$

L'incremento di $\log M(r; f)$ risulta

$$\log M(R_1; f) - \log M(r; f) = \log M(R_1; f) - \log M(R_1 - \eta R_1; f) =$$

$$= \eta R_1 \cdot \tilde{D} \log M(\bar{R}; f) \qquad (R_1(1-\eta) < \bar{R} < R_1)$$

dove $\tilde{D} \log M(\bar{R}; f)$ è un valore intermedio fra le due derivate (derivata sinistra e derivata destra) calcolato in un punto $\bar{R}$.

La (5) assume la forma

$$\log \overline{m}(R_1; f) \geqq \log M(R_1; f) - \pi(1 + o(1)) \cdot R_1 \cdot \tilde{D} \log M(\bar{R}; f)$$

$$\text{per } \eta \to 0+.$$

Passando al limite (tenendo conto che $\log M(r; f)$ è funzione convessa di $\log r$) risulta $\tilde{D} \log M(\bar{R}; f) \to D^- \log M(R_1; f)$ e ne segue la (4).

2°) Veniamo a dimostrare che π è la «migliore costante». M. H. HEINS [2] in uno studio sul problema di MILLOUX ha costruito la funzione estremale per tale problema: si tratta di una funzione $H(z; \mu)$, regolare in $|z| < 1$ tale che $m(r; H) \leqq \mu$ per $0 \leqq r < 1$ e per la quale $\overline{m}(1; H) = \mu$; questa funzione si esprime mediante funzioni θ di JACOBI e precisamente è

$$H(z;\ \mu) = \theta_4(u) : \theta_3(u), \qquad \cos 2\pi u = (1 - z)/(1 + z)$$

$$\begin{cases} \theta_4(u) = c \prod\limits_{k=0}^{\infty} (1 - 2\tau^{2k+1} \cos 2\pi u + \tau^{4k+2}) \\ \theta_3(u) = c \prod\limits_{k=0}^{\infty} (1 + 2\tau^{2k+1} \cos 2\pi u + \tau^{4k+2}) \end{cases}$$

c indipentente da z, τ parametro, $|\tau| < 1$ e inoltre

$$\mu = \theta_4(0) : \theta_3(0).$$

In questo caso è $R = 1$ e

$$\frac{M(R;\ H)}{m(R;\ H)} = \frac{1}{\mu}.$$

La funzione $H(z;\ \mu)$ è reale per $0 \leqq r < 1$ e inoltre evidentemente

$$M(r;\ H) = H(r;\ \mu), \qquad (0 \leqq r \leqq 1)$$

(quando si completi per continuità la definizione di $H(r;\ \mu)$ nel punto $r = 1$). Ne segue

$$(D_r^- M(r;\ H))_{r=1} = (D_r^- H(r;\ \mu))_{r=1} = (D_r H(r;\ \mu))_{r=1-}.$$

La (4) ci garantisce che è

$$\log \frac{1}{\mu} \leqq \pi \left(\frac{dH}{dr}\right)_{r=1-}$$

e quindi si tratta di stabilire soltanto che è

$$\log \frac{1}{\mu} = \pi \left(\frac{dH}{dr}\right)_{r=1-}$$

L'espressione di $1/\mu = \theta_3(0)/\theta_4(0)$ ci dà

$$\log \frac{1}{\mu} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \log \frac{1 + \tau^{2k+1}}{1 - \tau^{2k+1}}.$$

Osserviamo che è

$$\frac{1+\tau^{2k+1}}{1-\tau^{2k+1}}=\frac{1}{\mathrm{Th}\,\{(k+1/2)\log(1/\tau)\}}$$

e quindi

$$\log\frac{1}{\mu}=-2\sum_{k=0}^{\infty}\log\mathrm{Th}\,\{(k+1/2)\log(1/\tau)\},\qquad (\log(1/\tau)>0).$$

Per la valutazione del termine principale della somma della serie poniamo

$$J(a,\ b)=\int_a^b\log\mathrm{Th}\,\{(u+1/2)\log(1/\tau)\}\,du\qquad (0\leqq a<b\leqq+\infty).$$

La monotonia della funzione integranda e della successione dei termini della serie, di cui il primo termine con la posizione $\tau=1-\eta$ risulta

$$\log\mathrm{Th}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{\tau}\right)=\log\frac{1-\tau}{1+\tau}=-\log\frac{1}{\eta}-\log(2-\eta),$$

ci conduce alla limitazione

$$(6)\qquad -2J(0,\ \infty)<\log\frac{1}{\mu}<-2J(0,\ \infty)+2\log\frac{1}{\eta}+2\log(2-\eta).$$

Il problema è ricondotto a calcolare $J(0,\ \infty)$ e precisamente

$$-2J(0,\ \infty)=\frac{1}{\log(1/\tau)}\int_{\log(1/\tau)}^{+\infty}\log\frac{e^v+1}{e^v-1}\,dv;$$

integrando per parti si ottiene

$$-2J(0,\ \infty)=\log\frac{1+\tau}{1-\tau}+\frac{2}{\log(1/\tau)}\int_{\log(1/\tau)}^{+\infty}\frac{ve^v}{e^{2v}-1}\,dv.$$

Possiamo stabilire (per esempio mediante il calcolo dei residui) che è

$$\int_0^{+\infty}\frac{ve^vdv}{e^{2v}-1}=\frac{\pi^2}{8},\qquad \int_{\log(1/\tau)}^{+\infty}\frac{ve^vdv}{e^{2v}-1}=\frac{\pi^2}{8}+O(\log(1/\tau)).$$

Per $\tau \longrightarrow 1-$ risulta $\eta \longrightarrow 0+$, $\log(1/\tau) \longrightarrow 0+$, $\log(1/\tau) \backsim \eta$

$$-2J(0,\ \infty) = \log\frac{1}{\eta} + \log(2-\eta) + \frac{1}{(1+o(1))\eta}\left(\frac{\pi^2}{4} + O(\eta)\right) \backsim \frac{\pi^2}{4\eta}.$$

Dalla (6) segue

$$\log\frac{1}{\mu} \backsim \frac{\pi^2}{4\eta}. \tag{7}$$

L'espressione di $H(r;\ \mu)$ ci dà

$$(D_r^- \log H(r;\ \mu))_{r=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\tau^{2k+1}}{1+\tau^{4k+2}}.$$

Osserviamo che è

$$\frac{2\tau^{2k+1}}{1+\tau^{4k+2}} = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,\{(2k+1)\log(1/\tau)\}}$$

e quindi

$$(D_r^- \log H(r;\ \mu))_{r=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{Ch}\,\{(2k+1)\log(1/\tau)\}}.$$

Per la valutazione del termine principale della somma della serie poniamo

$$I(a,\ b) = \int_a^b \frac{du}{\mathrm{Ch}\,\{(2u+1)\log(1/\tau)\}} \qquad (0 \leqq a < b \leqq +\infty).$$

La monotonia della successione dei termini della serie di cui il primo termine con la posizione $\tau = 1-\eta$ risulta

$$\frac{1}{\mathrm{Ch}\log(1/\tau)} = \frac{2\tau}{1+\tau^2} = \frac{1-\eta}{1-\eta+\eta^2/2},$$

e la monotonia della funzione integranda ci conducono alla limitazione

$$I(0,\ \infty) < (D_r^- \log H(r;\ \mu))_{r=1} < I(0,\ \infty) + \frac{1-\eta}{1-\eta+\eta^2/2}. \tag{8}$$

Basta ora calcolare

$$I(0,\ \infty)=\int_0^{\infty}\frac{du}{\mathrm{Ch}\,\{(2u+1)\log(1/\tau)\}}=\frac{1}{2\log(1/\tau)}\int_{\log(1/\tau)}^{\infty}\frac{dv}{\mathrm{Ch}\,v}=$$
$$=\frac{1}{2\log(1/\tau)}\left\{\frac{\pi}{2}+O(\log(1/\tau))\right\}.$$

Per $\tau\longrightarrow 1-$ risulta $\eta\longrightarrow 0+$, $\log(1/\tau)\longrightarrow 0+$, $\log(1/\tau)\backsim\eta$,

$$I(0,\ \infty)=\frac{1}{2(1+o(1))\eta}\left\{\frac{\pi}{2}+O(\eta)\right\}\backsim\frac{\pi}{4\eta}.$$

Dalla (8) segue

$$(D_r^-\log H(r;\ \mu))_{r=1}\backsim\frac{\pi}{4\eta}. \tag{9}$$

Dal confronto di (7) e (9) si deduce l'asserto.

3. Una relazione di media.

L'esame della disuguaglianza (2) conduce alla relazione di media espressa dal seguente

TEOREMA II

$$\int_r^R\log\frac{M(u;\ f)}{m(u;\ f)}\,d(\log u)\leqq\pi\log\frac{M(R;\ f)}{M(r;\ f)}. \qquad (0\leqq r<R). \tag{10}$$

Infatti assumendo $r<R_1<R$, la (2) per r e R_1 assume la forma seguente

$$\log\frac{M(R_1;\ f)}{m(R_1;\ f)}\leqq\frac{1}{1-\omega(r/R_1)}\log\frac{M(R_1;\ f)}{M(r;\ f)}; \tag{11}$$

ponendo u e $u+\Delta u$ al posto rispettivamente di r e R_1 e osservando che

$$\frac{1}{1-\omega\,\{1/(1+\Delta u/u)\}}=\frac{\pi}{\Delta u/u}(1+o(1)) \qquad \text{per } \Delta u/u\longrightarrow 0,$$

otteniamo

$$(12)\quad \log\frac{M(u+\Delta u;\ f)}{\overline{m}(u+\Delta u;\ f)}\cdot\frac{\Delta u}{u}\leqq\pi(1+o(1))\{\log M(u+\Delta u;\ f)-\log M(u;\ f)\}.$$

Suddividendo l'intervallo $(r,\ R)$ in parti, sommando membro a membro le disuguaglianze (12) così ottenute e osservando che la somma al primo membro è una somma di MENGOLI-CAUCHY, otteniamo la (10). Anche per la (10) si pone il problema della « migliore costante ».

Si può valutare al di sotto $\overline{m}(r;\ f)$ anche mediante una media di $\log\{M(R_1;\ f)/M(r;\ f)\}$ e si perviene al

TEOREMA III

$$(13)\qquad \log\frac{M(R_1;\ f)}{\overline{m}(R_1;\ f)}\leqq\frac{\lambda(r/R_1)}{R_1}\int_r^{R_1}\log\frac{M(R_1;\ f)}{M(u;\ f)}\,du$$

dove $0\leqq r<R_1<R$ *e la funzione* $\lambda(t)$ *è data da*

$$\pi/\lambda(t)=4-\pi-\pi t+4(\operatorname{ar\,tg}\sqrt{t}-\sqrt{t}+t\operatorname{ar\,tg}\sqrt{t})=$$
$$=4-\pi-\pi t+(8/3)t^{3/2}+\dots.$$

Per ottenere la (13) basta moltiplicare i due membri della (11) per $1-\omega(r/R_1)$ e integrare membro a membro rispetto a r nell'intervallo $(r,\ R_1)$ la disuguaglianza così ottenuta.

4. Alcune proprietà delle funzioni intere.

Sia $f(z)$ una funzione intera di z: possiamo porre il problema di individuare classi di funzioni f per le quali $\log\overline{m}(R;\ f)\asymp\log M(R;\ f)$ [3].

Sussiste il seguente

TEOREMA IV. *Se esiste* $u=u(R)$ *tale che si abbia simultaneamente*

$$u(R)/R\longrightarrow 0,\quad \varliminf\{\log M(u;\ f)/\log M(R;\ f)\}>0\quad per\ R\longrightarrow+\infty,$$

[3] Per $f>0$, $g>0$ la relazione $f\asymp g$ significa $f=O(g)$ e $g=O(f)$ simultaneamente.

allora è

$$\log \overline{m}(R;\ f) \asymp \log M(R;\ f) \qquad per\ R \to +\infty.$$

Per la dimostrazione scriviamo la (2) ponendo $r = u(R)$; tenendo presente l'ipotesi e le relazioni

$$\omega(u(R)/R) = o(1), \quad 1/|1 - \omega(u(R)/R)| = 1 + o(1) \quad \text{per } u(R)/R \to 0,$$

si ottiene l'asserto.

Questo Teorema IV è immediato corollario del seguente

TEOREMA V. - *Se esistono* $R > 0,\ 0 < \gamma < 1,\ 0 < \beta < \mathrm{tg}^2(\gamma\pi/4)$ *tali che sia*

$$M(\beta R;\ f) \geq M^{\gamma}(R;\ f)$$

allora risulta

$$\overline{m}(R;\ f) \geqq M^{\delta}(R;\ f)$$

con $\delta = (\gamma\pi/4 \quad \mathrm{ar\,tg}\sqrt{\beta}) : (\pi/4 - \mathrm{ar\,tg}\sqrt{\beta})$.

La dimostrazione si ottiene sostituendo nella (2) al posto di r il prodotto βR e tenendo presenti le ipotesi; risulta

$$\frac{\log \overline{m}(R;\ f)}{\log M(R;\ f)} \geqq \frac{\gamma - \omega(\beta)}{1 - \omega(\beta)}$$

da cui l'asserto.

In particolare si ricavano i seguenti due corollari.

COROLLARIO I. - *Da* $\log \overline{m}(R;\ f) = o(\log M(R;\ f))$ *per* $R \to \infty$ *segue che per ogni* $0 < \gamma < 1$ *e per ogni* $0 < \beta < \mathrm{tg}^2(\pi\gamma/4)$ *risulta*

$$M(\beta R;\ f) < M(R;\ f) \qquad per\ R \geq R_0(\beta,\ \gamma).$$

La proposizione cessa di valere se in luogo di $0 < \beta < \mathrm{tg}^2(\pi\gamma/4)$ *si sostituisce* $0 < \beta < \mathrm{tg}^2(\pi\gamma/4) + \varepsilon$ *con* $\varepsilon > 0$.

Infatti ponendo nella (2) $r = \beta R$ si ottiene

$$(14) \qquad (1 - \omega(\beta)) \cdot \frac{\log \overline{m}(R;\, f)}{\log M(R;\, f)} \geq \frac{\log M(\beta R;\, f)}{\log M(R;\, f)} - \omega(\beta)$$

e passando al limite per $R \to \infty$ tenendo presenti le ipotesi si ricava l'asserto.

Corollario II. - *Da* $\log \overline{m}(R;\, f) = o(\log M(R;\, f))$ *e* $M(\beta R;\, f) \neq o(M^{\gamma}(R;\, f))$ *per* $R \to +\infty$ *con* $\gamma > 0$ *segue* $\beta \geq \operatorname{tg}^2(\pi\gamma/4)$.

Infatti per ipotesi esisterà una successione $\{R_h\}$ tale che

$$\overline{\lim_{R_h \to \infty}} \frac{\log M(\beta R_h;\, f)}{\log M(R_h;\, f)} \geq \gamma .$$

Da questa relazione e dalla (14) tenendo presente che $\log \overline{m}(R;\, f) = o(\log M(R;\, f))$ segue l'asserto.

Lo studio della funzione $\varphi(r,\, R;\, f)$ definita in (3) consente di stabilire per le funzioni intere risultati che pongono in relazione l'andamento di $\overline{m}(R;\, f)$ con la potenza R^{ρ} di R.

Vale in proposito il seguente:

Teorema VI. - *Sia* $f(z)$ *una funzione intera di ordine* ρ *e di tipo* τ [4]. *Se* $0 \leq \rho \leq 1/2$ *e* $\tau > 0$ *risulta:*

$$\overline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{\log \overline{m}(R;\, f)}{R^{\rho}} > 0 .$$

[4] Una funzione intera $f(z)$ si dice che è di ordine ρ se è

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r;\, f)}{\log r} = \rho, \qquad (0 \leqq \rho \leqq \infty).$$

Una funzione intera di ordine positivo ρ è di tipo τ se

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log M(r;\, f)}{r^{\rho}} = \tau, \qquad (0 \leqq \tau \leq \infty).$$

Una funzione intera di ordine ρ e tipo τ si dice che è di accrescimento $(\rho,\, \tau)$.

Più precisamente

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}} \frac{\log \overline{m}(R;\ f)}{R^\rho} \geq c(\rho)\cdot\tau$$

essendo $c(\rho) > 0$ *indipendente da* f.

Dimostrazione. - Per ipotesi per ogni $\eta > 0$ e $R \geq \bar{R}(\eta)$ è

$$\frac{\log M(R;\ f)}{R^\rho} < \tau + \eta; \tag{15}$$

inoltre indichiamo con E una successione $\{r_h\}$ di valori di r tali che

$$r_h \to +\infty, \qquad \frac{\log M(r_h;\ f)}{r_h^\rho} \to \tau \qquad \text{per } h \to +\infty$$

è quindi per $h \geq \bar{h}(\eta)$

$$\frac{\log M(r_h;\ f)}{r_h^\rho} > \tau - \eta. \tag{16}$$

Per ogni σ fissato $(0 < \sigma < 1)$ indichiamo con E_σ la successione $\{R_h\}$ di valori di R con $R_h = r_h/(1-\sigma)$.

Scriviamo ora la relazione (2) ponendo al posto di r e R rispettivamente r_h e R_h presi come precedentemente indicato, otteniamo

$$\log \overline{m}(R_h;\ f) \geq \frac{1}{1-\omega(1-\sigma)}\cdot \log M(r_h;\ f) -$$

$$-\frac{\omega(1-\sigma)}{1-\omega(1-\sigma)}\cdot \log M(R_h;\ f)$$

per $h \geq h_0(\eta)$ (h_0 abbastanza grande tale che si possano scrivere la (15) e la (16)). Ne segue

$$\frac{\log \overline{m}(R_h;\ f)}{R_h^\rho} > A(\rho,\ \sigma)\cdot\tau - B(\rho,\ \sigma)\cdot\eta \tag{17}$$

dove

$$A(\rho, \sigma) = \frac{(1-\sigma)^\rho - \omega(1-\sigma)}{1-\omega(1-\sigma)}$$

$$B(\rho, \sigma) = \frac{(1-\sigma)^\rho + \omega(1-\sigma)}{1-\omega(1-\sigma)} .$$

Studiamo $A(\rho, \sigma)$ come funzione di σ nell'intervallo $0 < \sigma < 1$ al variare del parametro ρ $(0 < \rho < 1/2)$. Si trova che per $0 < \rho \leq 1/\pi$ tale funzione è positiva in tutto l'intervallo; per $1/\pi < \rho < 1/2$ esiste un solo valore σ_1 per cui $A(\rho, \sigma_1) = 0$ e inoltre $A(\rho, \sigma) > 0$ per $\sigma_1 < \sigma < 1$. Si trova inoltre che per ogni $0 < \rho < 1/2$ tale funzione ha nell'intervallo indicato un solo massimo positivo per $\sigma^* = \sigma^*(\rho)$ e il valore di tale massimo decresce al crescere di ρ. (Vedere figura)

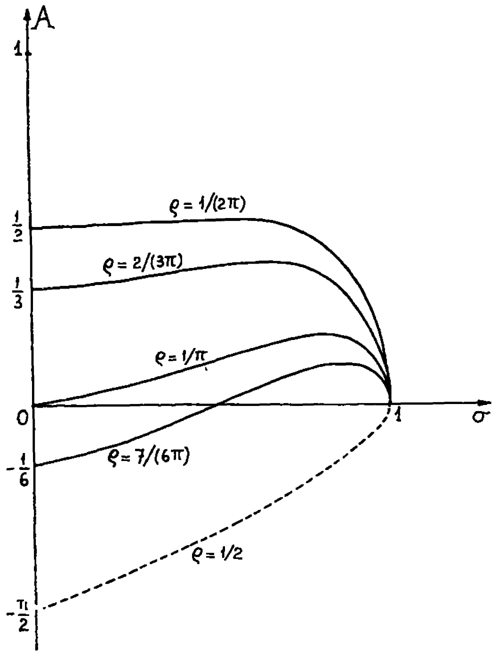

Fig. 1

La funzione $B(\rho, \sigma)$ come funzione di σ $(0 < \sigma < 1)$ è funzione decrescente per ogni valore del parametro ρ.

La (17) vale in particolare per $\sigma^* = \sigma^*(\rho)$ quindi per $h \geq h_0(\eta)$ è

$$\frac{\log \overline{m}(R_h;\, f)}{R_h^\rho} > A(\rho,\, \sigma^*)\tau - B(\rho,\, \sigma^*)\eta,$$

da questa si deduce in particolare

$$\underline{\lim}_{h \to +\infty} \frac{\log \overline{m}(R_h;\, f)}{R_h^\rho} \geq A(\rho,\, \sigma^*)\tau$$

e anche

$$\underline{\lim}_{h \to +\infty} \frac{\log \overline{m}(R_h;\, f)}{R_h^\rho} > 0$$

e da queste segue l'asserto con $c(\rho) = A(\rho,\, \sigma^*)$.

Teorema VII. *Sia $f(z)$ una funzione intera di ordine ρ e di tipo τ. Se per $0 < \rho < \frac{1}{2}$, $\tau > 0$ fra le successioni $\{r_h\}$ per le quali*

$$r_h \to +\infty, \qquad \frac{\log M(r_h;\, f)}{r_h^\rho} \to \tau \qquad \textit{per } h \to +\infty$$

ne esiste una che verifica la condizione

$$\overline{\lim}_{h \to +\infty} \frac{r_{h+1}}{r_h} < +\infty$$

allora

$$\underline{\lim}_{R \to +\infty} \frac{\log \overline{m}(R;\, f)}{R^\rho} > 0.$$

Dimostrazione. - Abbiamo trovato che per $h > h_0(\eta)$ e $R_h \in E_\sigma$ vale la disuguaglianza (17).

Per ipotesi $\overline{\lim}_{h \to +\infty} (r_{h+1}/r_h) = \Lambda < +\infty$ sarà quindi, per $h > h_1$, $r_{h+1}/r_h < 2\Lambda$.

Indichiamo con $\sigma_0 = \sigma_0(\rho)$ il valore 0 quando $0 < \rho \leqq 1/\pi$, il valore $\sigma_1(\rho)$ (ove $A(\rho,\, \sigma_1) = 0$) quando $1/\pi < \rho < 1/2$ e prendiamo $\varepsilon = (1 - \sigma_0)/(1 + 2\Lambda)$; risulta $r_{h+1}/r_h < (1 - \sigma_0 - \varepsilon)/\varepsilon$.

Per ρ fissato e $\sigma \in I_\varepsilon$ $(I_\varepsilon \equiv (\sigma_0 + \varepsilon \leqq \sigma \leqq 1 - \varepsilon))$ risulta

$$A(\rho, \sigma) \geqq \operatorname*{Min}_{\sigma \in I_\varepsilon} A(\rho, \sigma) = \operatorname{Min} \{ A(\rho, \sigma_0 + \varepsilon), A(\rho, 1 - \varepsilon) \} = \bar{A}_\varepsilon > 0$$

$$B(\rho, \sigma) \leqq \operatorname*{Max}_{\sigma \in I_\varepsilon} B(\rho, \sigma) = B(\rho, \sigma_0 + \varepsilon) = \bar{B}_\varepsilon .$$

Per ogni $\sigma \in I_\varepsilon$, quando si assuma $\eta < (\bar{A}_\varepsilon / 2\bar{B}_\varepsilon) \cdot \tau$, risulta dalla (17)

$$\frac{\log \overline{m}(R; f)}{R^\rho} \geq \frac{1}{2} \bar{A}_\varepsilon \cdot \tau > 0$$

per $R \geq R_0$ abbastanza grande indipendente da σ, e $R \in E_\sigma$ con $\sigma \in I_\varepsilon$.

L'insieme $E(\varepsilon) = \bigcup_{\sigma \in I_\varepsilon} E_\sigma$ copre la parte dell'asse reale a partire da un certo R_1 in poi; risulta quindi

$$\varliminf_{R \to +\infty} \frac{\log \overline{m}(R; f)}{R^\rho} \geqq \frac{1}{2} \bar{A}_\varepsilon \cdot \tau > 0.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] R. P. Boas, Jr. *Entire Functions*, New York, 1954.

[2] M. H. Heins, *The problem of Milloux for functions analytic throughout the interior of the unit circle*, « American Journal of Mathematics », 47 (1945), 212-234.

[3] M. H. Heins, *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*, New York (1962), 108-109.

[4] E. Landau, *Ueber den Millouxschen Satz*, « Nachrichten Göttingen ». (1930), 1-9.

[5] H. Milloux, *Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et entières*, « Journal de Mathématiques pures et appliquées » (9), 3 (1924), 345-401.

[6] H. Milloux, *Sur certaines fonctions holomorphes et bornées dans un cercle*, « Mathematica », 4 (1930), 182-185.

[7] E. Schmidt, *Ueber den Millouxschen Satz*, « Sitzber. Pr. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl » (1932), 394-401.