Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulio Cesare Barozzi

Sul multi-indice degli operatori quasi-ellittici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.3, p. 289–299.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_289_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Sul multi-indice degli operatori quasi-ellittici

Nota (*) di Giulio Cesare Barozzi (a Bologna) (**)

Sunto. - *Sia* $(m_1, \ldots, m_n)$ *una ennupla di numeri naturali,* $P(\xi) = \sum_{(\Sigma_j \alpha_j/m_j) \leq 1} a^{(\alpha)} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ *un polinomio a coefficienti costanti complessi e si ponga* $P_0(\xi) = \sum_{(\Sigma_j \alpha_j/m_j) = 1} a^{(\alpha)} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$. *Si trova una condizione necessaria e sufficiente sulla ennupla* $(m_1, \ldots, m_n)$ *affinchè esista almeno un polinomio P del tipo descritto, con* $P_0(\xi) \neq 0$ *per ogni* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *reale diverso da zero. Seguono alcune considerazioni sui polinomi P, tali che* $0 \neq (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n \Rightarrow Re[P_0(\xi)] \neq 0$.

1. Indichiamo con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un punto dello spazio reale ad n dimensioni R^n. Poniamo

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad D = (D_1, \ldots, D_n);$$

se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è un vettore intero non negativo poniamo ancora $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$.

Sia $P(D)$ un operatore differenziale a coefficienti costanti complessi: indichiamo con $P(\xi)$, $\xi \in R^n$, il polinomio ottenuto formalmente sostituendo ξ_j a D_j. Nel seguito ci occuperemo costantemente del polinomio $P(\xi)$.

Sia m_j il massimo esponente con cui ξ_j figura isolato in $P(\xi)$; supponiamo $m_j \geq 1$, $j = 1, \ldots, n$. Posto $m = \max m_j$, costruiamo il vettore

$$q = (q_1, \ldots, q_n) = \left(\frac{m}{m_1}, \ldots, \frac{m}{m_n}\right);$$

risulta $\min q_j = 1$.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 3 giugno 1964.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n° 2 del Comitato per la Matematica del C. N. R per l'anno 1963-64.

DEFINIZIONE 1. – *Si dice q-grado del monomio* $a^{(\alpha)}\xi^{\alpha}$ *la quantità*

$$< q, \alpha > = \sum_{1}^{n}{}_{j}\, q_j\alpha_j = m \sum_{1}^{n}{}_{j} \frac{\alpha_j}{m_j}$$

si dice q-grado del polinomio $P(\xi)$ *il massimo tra i q-gradi dei suoi termini. Indichiamo con* $P_0(\xi)$ *la somma dei termini di* P *aventi q-grado massimo.*

DEFINIZIONE 2. – $P(\xi)$ *si dice quasi-ellittico se*

$$0 \neq \xi \in R^n \Rightarrow P_0(\xi) \neq 0.$$

Ogni polinomio quasi-ellittico è ipoellittico (cfr. HÖRMANDER [1], Teor. 4.1.8 (*)).

Se $P(\xi)$ è quasi-ellittico il suo q-grado (ed anche il grado ordinario) è precisamente $m = \max m_j$ (cfr. VOLEVIC [6], par. 1). Infatti nel punto $\xi' = (\xi_1, 0, \ldots, 0)$, $P(\xi)$ si riduce alla somma dei termini contenenti soltanto ξ_1, il più elevato dei quali contiene $\xi_1^{m_1}$. Questo termine ha q-grado m: sarebbe dunque $P_0(\xi') = 0$ se il q-grado di P fosse $\overline{m} > m$.

È dunque

$$P_0(\xi) = \sum_{\Sigma_j \frac{\alpha_j}{m_j} = 1} a^{(\alpha)}\xi^{\alpha}, \qquad a^{(\alpha)} \neq 0, \quad \text{per } \alpha = (\underset{1}{0}, \ldots, \underset{j}{m_j}, \ldots, \underset{n}{0});$$

nel seguito scriveremo anche

$$P_0(\xi) = \Sigma' a^{(\alpha)}\xi^{\alpha} + \Sigma'' a^{(\alpha)}\xi^{\alpha}$$

convenendo di porre in Σ' i termini puri e in Σ'' i termini misti; porremo cioè

$$\Sigma' a^{(\alpha)}\xi^{\alpha} = a_1\xi_1^{m_1} + \ldots + a_n\xi_n^{m_n}, \qquad a_j \neq 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

avendo indicato, per brevità, con a_j il coefficiente $a^{(\alpha)}$ per $\alpha = (\underset{1}{0}, \ldots, \underset{j}{m_j}, \ldots, \underset{n}{0})$.

(*) HÖRMANDER usa il termine *semi-ellittico* in luogo di *quasi-ellittico*.

2. Poniamo ancora le due seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 3. - *La ennupla* $(m_1, \ldots, m_n)$ *costituita dagli esponenti dei termini puri di* $P_0(\xi)$ *verrà detta «multi-indice» del polinomio* P.

DEFINIZIONE 4. - *La ennupla di numeri naturali* $(m_1, \ldots, m_n)$ *verrà detta quasi-ellittica se esiste almeno un polinomio quasi-ellittico avente* $(m_1, \ldots, m_n)$ *come multi-indice.*

Per $n = 2$ ogni coppia (m_1, m_2) di numeri naturali è quasi-ellittica nel senso ora stabilito: basta infatti considerare il polinomio

$$\xi_1^{m_1} + i\xi_2^{m_2}.$$

Se $n \geq 3$ ciò non è più vero. È ben noto infatti che se si pone $m_1 = \ldots = m_n = m$ dispari, non esiste nessun polinomio quasi-ellittico (in questo caso ellittico) avente $(m_1, \ldots, m_n)$ come multi-indice (cfr. LOPATINSKII [2]).

Dimostriamo il seguente

TEOREMA. - *Se* $n \geq 3$ *condizione necessaria e sufficiente affinchè la ennupla* $(m_1, \ldots, m_n)$ *sia quasi-ellittica è che i numeri* m_j *siano tutti pari tranne al più uno.*

La sufficienza della condizione indicata è quasi immediata. Infatti se gli m_j sono tutti pari basta considerare il polinomio

$$\xi_1^{m_1} + \ldots + \xi_n^{m_n};$$

se uno di essi, poniamo m_n, è dispari si può considerare il polinomio

$$\xi_1^{m_1} + \ldots + \xi_{n-1}^{m_{n-1}} + i\xi_n^{m_n}.$$

3. Passiamo alla dimostrazione della necessità. Cominciamo col dimostrare la seguente proposizione:

Se i numeri m_j *sono tutti dispari la ennupla* $(m_1, \ldots, m_n)$ *non è quasi-ellittica.*

Supponiamo infatti che

$$P_0(\xi) = \sum_{\Sigma_j \frac{\alpha_j}{m_j}=1} a^{(\alpha)}\xi^{\alpha}, \qquad a^{(\alpha)} \neq 0 \quad \text{per } \alpha = (\underset{1}{0}, \ldots, \underset{j}{m_j}, \ldots, \underset{n}{0}),$$

sia diverso da zero per ogni $\xi \in R^n$ diverso da zero. Nelle ipotesi fatte sugli m_j, se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è un vettore di interi non negativi per cui $\Sigma_j \dfrac{\alpha_j}{m_j} = 1$, è necessariamente $\Sigma_j \alpha_j$ dispari.

Detto infatti M il minimo comune multiplo degli m_j, si ha $M = k_j m_j$, con M e k_j dispari, $j = 1, \ldots, n$. Si tratta allora di dimostrare che se $\Sigma_j k_j \alpha_j = M$, è $\Sigma_j \alpha_j$ dispari. Ciò è immediato se si tien presente che ciascuno degli addendi $k_j \alpha_j$ è dispari se e solo se α_j è dispari.

Ne segue che $P_0(\xi) = -P_0(-\xi)$. Si può allora utilizzare un ragionamento di Lopatinskii [2]. Consideriamo l'equazione

$$P_0(\lambda, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0, \qquad n \geq 3,$$

per $0 \neq (\xi_2, \ldots, \xi_n) \in R^{n-1}$. Per $(\xi_2, \ldots, \xi_n) \neq 0$ fissato, l'equazione ora scritta possiede m_1' radici con coefficiente dell'immaginario maggiore di zero ed m_1'' con coefficiente dell'immaginario minore di zero:

$$m_1' + m_1'' = m_1 .$$

Essendo connesso in R^{n-1} l'insieme dei vettori diversi da zero, l'ipotesi della quasi-ellitticità di P_0 implica che l'equazione

$$P_0(\lambda, -\xi_2, \ldots, -\xi_n) = 0$$

possiede ancora m_1' radici con coefficiente dell'immaginario maggiore di zero ed m_1'' con coefficiente minore di zero. D'altra parte se $P(\lambda, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ è anche $P(-\lambda, -\xi_1, \ldots, -\xi_n) = 0$, dunque $m_1' = m_1''$, contro l'ipotesi che m_1 è dispari.

4. Proviamo ora l'affermazione seguente

Se m_1 é pari, m_2 ed m_3 sono dispari, la terna (m_1, m_2, m_3) non è quasi-ellittica.

Supponiamo infatti che esista un polinomio

$$P_0(\xi) = \sum_{\sum_1^3 \frac{\alpha_j}{m_j}=1} a^{(\alpha)}\xi^\alpha, \qquad a^{(\alpha)} \neq 0 \quad \text{per } \alpha = (m_1, 0, 0), \quad \alpha = (0, m_2, 0) \quad \alpha = (0, 0, m_3);$$

quasi-ellittico con m_1, m_2, m_3 aventi la parità specificata. Esaminiamo le soluzioni intere non negative dell'equazione

$$\frac{\alpha_1}{m_1} + \frac{\alpha_2}{m_2} + \frac{\alpha_3}{m_3} = 1.$$

Detto ancora M il minimo comune multiplo dei numeri m_1, m_2, m_3, si ha

$$M = k_1 m_1 = k_2 m_2 = k_3 m_3 ,$$

con M pari, k_1 dispari, k_2 ed k_3 pari. Se dunque è

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = M,$$

risulta $k_1\alpha_1$ pari, dunque α_1 pari (eventualmente zero). Sia $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ una soluzione dell'equazione allo studio con $\alpha_1 > 0$; lo sviluppo in fattori primi di m_1 contenga 2^p, quello di α_1 contenga 2^q (p, $q \geq 1$). Dico che $p \leq q$. Se fosse infatti $q < p$, posto $m_1' = \dfrac{m_1}{2^q}$ e $\alpha_1' = \dfrac{\alpha_1}{2^q}$ per la terna $(\alpha_1', \alpha_2, \alpha_3)$ si avrebbe

$$\frac{\alpha_1'}{m_1'} + \frac{\alpha_2}{m_2} + \frac{\alpha_3}{m_3} = 1$$

con m_1' pari, m_2 ed m_3 dispari, α_1' dispari, ciò che è impossibile per quanto dimostrato poco sopra.

Dunque per tutte le soluzioni intere non negative dell'equazione allo studio si ha che, se $\alpha_1 > 0$, allora α_1 è divisibile per 2^p. Posto $\alpha_1' = \dfrac{\alpha_1}{2^p}$, $m_1' = \dfrac{m_1}{2^p}$, si può scrivere

$$P_0(\xi) = \sum_{\sum_1^3 \frac{\alpha_j}{m_j}=1} a^{(\alpha)}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3} = \sum_{\frac{\alpha_1'}{m_1'}+\frac{\alpha_2}{m_2}+\frac{\alpha_3}{m_3}=1} a^{(\alpha)}(\xi_1^{2^p})^{\alpha_1'}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3}.$$

L'ultimo polinomio scritto è omogeneo (rispetto al q-grado) nelle tre variabili $\xi_1' = \xi_1^{2^p}$, ξ_2 e ξ_3 con multi-indice (m_1', m_2, m_3)

tutto dispari; per quanto provato al n° 3 esso non è quasi-ellittico, dunque esiste una terna reale non nulla $(\xi_1'^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$ in cui esso è nullo. Si può supporre $\xi_1'^* \geq 0$, perchè se così non fosse si potrebbe considerare il vettore $(-\xi_1'^*, -\xi_2^*, -\xi_3^*)$ in cui parimenti si annulla il polinomio in questione (cfr. n° 3). Dunque $P_0(\xi)$ si annulla nel punto $(\sqrt[2p]{\xi_1'^*}, \xi_2^*, \xi_3^*) \neq 0$, contro l'ipotesi.

5. La proposizione provata al n° precedente consente facilmente di ottenere la necessità della condizione formulata nel Teorema del n° 2. Sia infatti

$$P_0(\xi) = \sum_{\Sigma_j \frac{\alpha_j}{m_j} = 1} a^{(\alpha)}\xi^\alpha, \quad n \geq 3, \quad a^{(\alpha)} \neq 0 \quad \text{per } \alpha = (\underset{1,}{0}, \ldots, \underset{j}{m_j}, \ldots, \underset{n}{0});$$

poniamo che $m_1, m_2, \ldots, m_k$ siano dispari $(k \leq n)$ e i restanti pari. Se $k = n$ si ha il caso studiato al n° 3, dunque P_0 non è quasi-ellittico. Supponiamo dunque che sia $2 \leq k < n$. Dico che P_0 non è quasi-ellittico. Consideriamo la restrizione di P all'insieme dei punti $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ per cui è $\xi_3 = \xi_4 = \ldots = \xi_{n-1} = 0$.

Per ogni ξ appartenente a tale insieme risulta

$$P_0(\xi) = \sum_{\frac{\alpha_1}{m_1} + \frac{\alpha_2}{m_2} + \frac{\alpha_n}{m_n} = 1}' a^{(\alpha)}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_n^{\alpha_n};$$

ma il polinomio a secondo membro è del tipo studiato nel n° precedente, dunque esiste una terna reale $(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*) \neq 0$ in cui esso è nullo. $P_0(\xi)$ è dunque nullo nel punto $(\xi_1^*, \xi_2^*, 0, \ldots, 0, \xi_n^*) \neq 0$.

Con ciò il teorema è completamente provato.

6. Una proprietà dei polinomi quasi-ellittici che pone in evidenza l'affinità con i polinomi ellittici è espressa dal seguente

TEOREMA. - *Il polinomio ipoellittico $P(\xi)$ è quasi-ellittico se e solo se esso è più forte di ogni polinomio $Q(\xi)$ avente q-grado non superiore a quello di P* (cfr. HÖRMANDER [1], Teor 3.3.6 per l'analogo ellittico).

Ricordiamo che se P si dice *più forte* di Q se, posto

$$\tilde{P}(\xi) = (\sum_\alpha | D^\alpha P(\xi) |^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \tilde{Q}(\xi) = (\sum_\alpha | D^\alpha Q(\xi) |^2)^{1/2},$$

risulta

$$(+) \qquad \frac{\tilde{Q}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} < K, \qquad \forall \xi \in R^n$$

per un'opportuna costante $K > 0$ (cfr. Hörmander [1], pag. 70).

Supponiamo P quasi-ellittico, P_0 sia il polinomio definito al n° 1. Risulta

$$\tilde{P}^2(\xi) \geq | P^2(\xi) | \geq c(\Sigma_j | \xi_j |^{m_j})^2$$

per $|| \xi || = (\Sigma_j | \xi_j |^{m_j})^{1/m}$ abbastanza grande (cfr. Volevic [6], § 1); se il q-grado di Q non supera m la $(+)$ è allora verificata (si intende che $q = (q_1, \ldots, q_n)$ è il vettore relativo a P).

Inversamente sia P un polinomio ipoellittico. Supponiamo per fissare le idee che sia $m_1 = m = \max\limits_j m_j$. La $(+)$ implica che il q-grado di P è m. Se infatti fosse $\overline{m} > m$, P dovrebbe contenere un termine misto di q-grado $\overline{m}$. La $(+)$ dovrebbe allora essere soddisfatta anche scegliendo $Q(\xi) = \xi_1^{\overline{m}}$, ciò che è assurdo come si riconosce ponendo $\xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$.

Dunque P ha q-grado (ed anche grado) m. Se la parte principale P_0 di P si annullasse per $\xi = \overline{\xi} \neq 0$, essa si annullerebbe per ogni ξ_j con $\xi_j = t^{q_j}\overline{\xi}_j = t^{\frac{m}{m_j}}\overline{\xi}_j$, $t > 0$. La $(+)$ non potrebbe essere soddisfatta scegliendo un polinomio $Q(\xi) = \Sigma_j a_j \xi_j^{m_j}$ tale che $Q(\overline{\xi}) \neq 0$.

Osservazione. - L'ipotesi della ipoellitticità di P serve soltanto ad assicurare che $m_j \geq 1$. Nell'enunciato del Teorema si può dunque supporre soltanto che sia $m_j \geq 1$, $j = 1, \ldots, n$.

Dalla proposizione dimostrata segue il

Corollario. - *Due polinomi quasi-ellittici aventi ugual multi-indice $(m_1, \ldots, m_n)$ sono necessariamente ugualmente forti.*

In particolare un polinomio quasi-ellittico e la sua parte principale sono ugualmente forti.

Inversamente:

Due polinomi quasi-ellittici ugualmente forti hanno necessariamente ugual multi-indice.

Ciò segue dalla doppia diseguaglianza

$$K^{-1} < \frac{\tilde{Q}(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} < K$$

ove si ponga $\xi = (0, \dots, \xi_j, \dots, 0)$.

Osservazione. - La proposizione ora dimostrata resta valida anche se, in luogo della quasi-ellitticità, si suppongono verificate per P e Q le due seguenti ipotesi: $m_j \geq 1$, $j = 1, \dots, n$, il q-grado dei termini misti non supera quello dei termini puri.

7. Sia $P(\xi)$ un polinomio nelle variabili $\xi_1, \dots, \xi_n$; sia ancora m_j (≥ 1) l'esponente massimo con cui ξ_j compare isolato in P. Detto $P_0(\xi)$ il polinomio definito come al n° 1, supponiamo che sia

$$Re\,[P_0(\xi)] \neq 0$$

per ogni $\xi \in R^n$ diverso da zero. Questa condizione implica ovviamente l'altra

$$P_0(\xi) \neq 0, \qquad \forall\, \xi \neq 0$$

cioè la quasi-ellitticità di P. Porremo la seguente

Definizione 7. - *$P(\xi)$ si dice fortemente quasi-ellittico se*

$$0 \neq \xi \in R^n \Rightarrow Re\,[P_0(\xi)] \neq 0.$$

La condizione posta, essendo connesso in R^n $(n \geq 2)$ l'insieme degli $\xi \neq 0$, implica che $Re\,[P_0(\xi)] > 0$, $\forall \xi \neq 0$, oppure $Re[P_0(\xi)] < 0$, $\forall \xi \neq 0$. Nel seguito supporremo costantemente verificata la prima alternativa.

Vogliamo studiare la parte principale P_0 di un polinomio fortemente quasi-ellittico. È intanto immediato che:

Il multi-indice $(m_1, \dots, m_n)$ di un polinomio fortemente quasi-ellittico è interamente pari.

Se infatti uno degli m_j, poniamo m_1, fosse dispari, per $\xi = (\xi_1, 0, \ldots, 0) \neq 0$, si avrebbe $P_0(\xi) = -P_0(-\xi)$, contro l'ipotesi. Posto come al n° 1

$$P_0(\xi) = \Sigma' a^{(\alpha)}\xi^\alpha + \Sigma'' a^{(\alpha)}\xi^\alpha$$

con

$$\Sigma' a^{(\alpha)}\xi^\alpha = a_1\xi_1^{m_1} + \ldots + a_n\xi_n^{m_n}, \qquad a_j \neq 0, \qquad \forall j,$$

ponendo $\xi = (0, \ldots, 0, \xi_j, 0, \ldots, 0)$ si trova

$$Re\,[a_j] > 0, \qquad\qquad j = 1, \ldots, n.$$

Se dunque si pone

$$\Pi_0(\xi) = \Sigma' a^{(\alpha)}\xi^\alpha = a_1\xi_1^{m_1} + \ldots + a_n\xi_n^{m_n},$$

si ha

$$0 \neq \xi \in R^n \Rightarrow Re\,[\Pi_0(\xi)] > 0$$

cioè $\Pi_0(\xi)$ è anch'esso fortemente quasi-ellittico. Dal Corollario del n° precedente segue allora che Π_0, P_0 e P sono ugualmente forti. $\Pi_0(\xi)$ può dirsi *parte principale ridotta* di $P(\xi)$. Il risultato ora stabilito è naturalmente falso per un generico polinomio quasi-ellittico: basti considerare, ad es., il polinomio $\xi_1^4 - \xi_2^2 - 2i\xi_1^2\xi_2$ (corrispondente all'operatore del calore iterato).

8. È noto che, quando si voglia porre correttamente un problema al contorno per l'equazione

$$P(D)u = f$$

nel semispazio $x_j \geq 0$ (o nello strato $0 \leq x_j \leq h$), è essenziale conoscere quante, tra le radici dell'equazione

$$P_0(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \lambda, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) = 0$$

$$0 \neq (\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) \in R^{n-1},$$

hanno coefficiente dell'immaginario maggiore di zero e quante hanno coefficiente dell'immaginario minore di zero (cfr. B. PINI

[3], [4]). Dimostriamo che:

Se $P(\xi)$ è fortemente quasi-ellittico l'equazione

$$P_0(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \lambda, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) = 0$$

per ogni $(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) \neq 0$ *possiede* $\frac{m_j}{2}$ *radici con coefficiente dell'immaginario positivo e* $\frac{m_j}{2}$ *con coefficiente dell'immaginario negativo* (cfr. anche B. PINI [5]).

Infatti dall'ipotesi

$$Re\,[P_0(\xi)] = Re\,[\Sigma' a^{(\alpha)}\xi^\alpha] + Re[\Sigma'' a^{(\alpha)}\xi^\alpha] > 0, \qquad \forall\xi \neq 0,$$

e dalla conseguenza trattane

$$Re\,[\Sigma' a^{(\alpha)}\xi^\alpha] > 0, \qquad \forall\xi \neq 0,$$

segue che, se $Re\,[\Sigma'' a^{(\alpha)}\xi] < 0$, è necessariamente

$$|\,Re\,[\Sigma'' a^{(\alpha)}\xi^\alpha]\,| < Re\,[\Sigma' a^{(\alpha)}\xi^\alpha].$$

Per $t \in [0, 1]$ costruiamo il polinomio

$$P_0(t;\, \xi) = \Sigma' a^{(\alpha)}\xi^\alpha + t\,\Sigma'' a^{(\alpha)}\xi^\alpha.$$

Se $Re\,[\Sigma'' a^{(\alpha)}\xi^\alpha] < 0$ si ha

$$|\,Re\,[t\,\Sigma'' a^{(\alpha)}\xi^\alpha]\,| = t\,|\,Re\,[\Sigma'' a^{(\alpha)}\xi^\alpha]\,| \leq |\,Re\,[\Sigma'' a^{(\alpha)}\xi^\alpha]\,| < Re\,[\Sigma' a^{(\alpha)}\xi^\alpha]$$

$\forall t \in [0, 1]$; ne segue, in ogni caso,

$$Re\,[P_0(t;\, \xi)] > 0, \qquad \forall\xi \neq 0, \qquad \forall t \in [0, 1],$$

cioè i polinomi $P_0(t;\, \xi)$ sono tutti fortemente quasi-ellittici.

Consideriamo l'equazione

$$P_0(t;\, \xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \lambda, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) = 0;$$

per $(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) \neq 0$ fissato essa possiede $m_j'(t)$ radici con coefficiente dell'immaginario maggiore di zero ed $m_j''(t)$ con coefficiente dell'immaginario minore di zero,

$$m_j'(t) + m_j''(t) \equiv m_j, \qquad t \in [0, 1], \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Per $n \geq 3$ i numeri $m_j'(t)$ e $m_j''(t)$ non dipendono da $(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) \neq 0$ essendo l'insieme di tali punti connesso in R^{n-1}. Ma $m_j'(t)$ e $m_j''(t)$ non dipendono nemmeno da t: infatti al variare di t nell'intervallo $[0, 1]$ ciascuna delle radici λ dell'equazione in esame varia con continuità nel piano complesso senza attraversare l'asse reale, perchè in caso contrario almeno uno dei polinomi $P_0(t; \xi)$ non sarebbe quasi-ellittico. Ne segue

$$m_j'(1) = m_j'(0) = \frac{m_j}{2}$$

$$m_j''(1) = m_j''(0) = \frac{m_j}{2}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Il risultato stabilito sussiste peraltro anche per $n = 2$. Supponiamo di studiare l'equazione

$$P_0(t; \lambda, \xi_2) = 0, \qquad \xi_2 \neq 0;$$

detti $m_1'(t, \xi_2)$ e $m_1''(t, \xi_2)$ i numeri delle radici con coefficiente della parte immaginaria rispettivamente positivo e negativo, si ha, ragionando come sopra,

$$m_1'(1, \xi_2) = m_1'(0, \xi_2)$$
$$m_1'(1, \xi_2) = m_1''(0, \xi_2), \qquad \xi_2 = 0,$$

D'altra parte $m_1'(0, \xi_2) = m_1'(0, \xi_2) = \dfrac{m_1}{2}$, $\xi_2 \neq 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Berlin 1963.

[2] Ja. B. Lopatinskii, *Su un metodo per ridurre i problemi al contorno per un sistema di equazioni differenziali di tipo ellittico ad equazioni regolari*. «Ukrain. Mat. Zhurnal.», Vol. 5 (1953), pagg. 123-151 (in russo).

[3] B. Pini, *Problema ridotto di Cauchy per certe equazioni pseudoparaboliche*, «Atti Acc. Scienze Ist. Bologna», Serie XI. T. IX (1962), pagg. 60-83.

[4] — —, *Sui problemi al contorno ben posti per le equazioni lineari alle derivate parziali con coefficienti costanti in uno strato*, «Revista Matematica y Fis. Teorica», Universidad Tucuman, Vol. XIV (1962), pagg. 153-165.

[5] — —, *Su un problema tipico relativo a una classe di equazioni ipoellitiche*, in corso di stampa sugli «Atti Acc. Scienze Ist. Bologna», Serie XI, T; XI.

[6] L. P. Volevic, *Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi-ellittici*, «Mat. Sbornik», v. 59 (101) (1962), pagg. 3-52 (in russo).