CARLO CELLUCCI

# Categorie ricorsive.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **19** (1964), n.3, p. 300–305.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_300_0>

# Categorie ricorsive. (*)

Nota di CARLO CELLUCCI (a Roma) (**)

**Sunto.** - *Si introduce il concetto di «categoria ricorsiva», controparte costruttiva del concetto classico di «categoria», e si dimostra per esso un teorema di rappresentazione che costituisce l'analogo costruttivo del teorema classico di rappresentazione di Eilenberg-MacLane.*

**1.** La teoria delle categorie, sviluppata per la prima volta da S. EILENBERG-S. MACLANE [3], si è rivelata un utile strumento per l'organizzazione della matematica classica, ed ha avuto, specie negli ultimi anni, notevoli sviluppi. La nozione, qui introdotta, di categoria ricorsiva, costituisce l'analogo costruttivo della nozione classica, e dovrebbe essere, per quanto è dato vedere, di altrettanto aiuto nello studio della matematica costruttiva.

La teoria delle categorie ricorsive, di cui la presente nota non costituisce che un rapporto preliminare, fornisce concetti applicabili ad ogni ramo della matematica costruttiva, quale si viene configurando attualmente, e può fornire presumibilmente l'ambito più adatto per una loro trattazione uniforme ed un loro confronto. Vale per le categorie ricorsive un teorema di rappresentazione che costituisce l'analogo del teorema di rappresentazione di EILENBERG-MACLANE [3] (cfr. anche [8]).

**2.** DEFINIZIONE 1 - Una *rappresentazione effettiva* è una rappresentazione $<\alpha, a, b>$, scritta $\alpha : a \rightarrow b$, con dominio $a$ e campo $b$, fornita da un elemento di uno dei seguenti insiemi: (1)

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per l'anno 1963-1964 (gruppo n. 37).

(**) Pervenuta alla segreteria dell'U. M. I. il 10 giugno 1964. Presentata da L. GEYMONAT e G. RICCI.

(1) L'identificazione delle rappresentazioni effettive con le rappresentazioni fornite da elementi di a)-h) riposa sull'accettazione della tesi di CHURCH e dell'estensione datane da KLEENE al caso relativizzato (cfr. S. C. KLEENE, *Recursive functions and intuitionistic mathematics*, Procee-

*a*) funzioni parziali ricorsive (KLEENE [4])

*b*) funzionali parziali ricorsivi (KLEENE [4])

*c*) operazioni effettive (KREISEL [7])

*d*) funzionali ricorsivamente contabili (KLEENE [5])

*e*) funzionali ricorsivamente continui (KREISEL [7])

*f*) funzionali completamente computabili (DAVIS [1])

*g*) funzionali ricorsivi generali con argomento contabile (KLEENE [6], [5]).

*h*) funzionali a ricursione barrata (SPECTOR [11])

Indicheremo la rappresentazione effettiva identità con $1_a : a \to a$, e la composizione di due rappresentazioni effettive $\alpha : a \to b$ e $\beta : b \to c$ con $\beta\alpha : a \to c$.

DEFINIZIONE 2. - Data una collezione di oggetti $\mathfrak{A} = \{a, b, c, \ldots\}$, una *categoria ricorsiva* su $\mathfrak{A}$ è una collezione $\mathfrak{R}$ di rappresentazioni effettive $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(*i*) se $\alpha : a \to b$ appartiene a $\mathfrak{R}$, allora $a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{A}$

(*ii*) se $a \in \mathfrak{A}$, allora $1_a : a \to a$ appartiene a $\mathfrak{R}$

dings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge 1950), Vol. I, Providence, 1952, pp. 679-685). Molte critiche sono state sollevate da parte intuizionista contro tale identificazione (cfr. A. HEYTING, *Infinitistic methods from a finitist point of view*, Infinitistic methods, Warszawa, 1961, pp. 185-192; *After thirty years*, Proceedings of the international congress for logic, methodology and philosophy of science (Stanford 1960), Stanford, 1961, pp. 194-197). Si può obbiettare ad esse che riposano su due erronee convinzioni. In primo luogo la tesi di CHURCH non è una *definizione* di « funzione effettivamente calcolabile », ma solo l'affermazione che gli insiemi delle funzioni effettivamente calcolabili e delle funzioni ricorsive generali sono identici. In secondo luogo la nozione di funzione ricorsiva generale non richiede affatto quella di funzione effettivamente calcolabile. Una funzione è ricorsiva generale se *esiste* un sistema di equazioni in base al quale se ne può calcolare il valore mediante regole fissate; dove l'esistenza va intesa classicamente, cioè non-costruttivamente.

*iii*) se $\alpha : a \rightarrow b$ e $\beta : b \rightarrow c$ appartengono a $\mathfrak{R}$, allora anche $\beta\alpha\ a \rightarrow c$ appartiene a $\mathfrak{R}$

Gli elementi di $\mathfrak{A}$ si dicono gli *oggetti* della categoria, gli elementi di $\mathfrak{R}$ i suoi *morfismi*. Ogni categoria ricorsiva è pienamente determinata dalla coppia $< \mathfrak{A}, \mathfrak{R} >$. Gli oggetti svolgono però un ruolo inessenziale, risultando determinati dalle rappresentazioni effettive identità corrispondenti, e potrebbero essere eliminati dalla definizione di categoria ricorsiva, dando così luogo all'analogo costruttivo della nozione classica di *categoria astratta*.

3. Esempi di categorie ricorsive:

*i*) la categoria degli insiemi (relativamente) ricorsivamente enumerabili (oggetti: insiemi (relativamente) ricorsivamente enumerabili; morfismi: operazioni effettive da insieme a insieme (relativamente) ricorsivamente enumerabile: identità e composizione ovviamente definite);

*ii*) la categoria delle funzioni parziali ricorsive (analoga alla precedente, con oggetti funzioni parziali ricorsive e morfismi operazioni effettive di tipo 2 da funzione a funzione parziale ricorsiva);

*iii*) la categoria dei funzionali ricorsivamente contabili (oggetti: funzionali ricorsivamente contabili; morfismi: operazioni effettive di tipo $n$ (da funzionali ricorsivamente contabili di tipo $n - 1$));

*iv*) la categoria dei gruppi computabili (oggetti; gruppi computabili; morfismi: omomorfismi computabili da gruppo a gruppo computabile, rispetto alle loro rispettive assegnazioni di indici);

*v*) la categoria costituita da tipi di equivalenza ricorsiva (oggetti: insiemi di numeri non negativi; morfismi equivalenze ricorsive);

*vi*) la categoria costituita da tipi d'ordine costruttivo (oggetti: insiemi linearmente ordinati di numeri non negativi; morfismi: isotonismi ricorsivi);

*vii*) la categoria costituita da un sistema di notazioni effettive per ordinali, ad esempio quello di MARKWALD–SPECTOR (oggetti: elementi $x, y, z, \ldots$ dell'insieme delle notazioni $W$; morfismi: rappresentazioni ricorsive $< y, x > : x \rightarrow y$, con $x \leqq_W y$; identità $< x, x > : x \rightarrow x$, con $x \leqq_W x$; composizione definita da $< z, y > < y, x > = < z, x >$ quando $x \leqq_W y, y \leqq_W z$).

3 DEFINIZIONE 3. – Sia $\mathfrak{R}$ una categoria ricorsiva. Una sottocategoria $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{R}$ è una categoria ricorsiva su una sottocollezione $\mathfrak{A}_0$ di $\mathfrak{A}$ tale che ogni morfismo $\alpha : a \rightarrow b$ di $\mathfrak{C}$ appartiene a $\mathfrak{R}$.

Esempio: la categoria dei tipi di equivalenza ricorsiva è una sottocategoria della categoria dei tipi d'ordine costruttivo (basta considerare ogni insieme come un insieme linearmente ordinato in cui la relazione di ordinamento $<$ significa $=$).

DEFINIZIONE 4. – Due categorie ricorsive $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}'$ sono *omomorfe* se esiste una rappresentazione effettiva $F$ di $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}'$ tale che:

*A*) se $\alpha$ appartiene a $\mathfrak{R}$, $F(\alpha)$ appartiene a $\mathfrak{R}'$

*B*) se $1_a$ è un'identità di $\mathfrak{R}$, $F(1_a)$ è un'identità di $\mathfrak{R}'$

*C*) se $\beta\alpha$ appartiene a $\mathfrak{R}$, allora $F(\beta\alpha)$ appartiene a $\mathfrak{R}'$ e $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$

$\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}'$ sono *isomorfe* se e solo se $F$ è $1 - 1$, su.

Esempio: le categorie ricorsive costituite dai sistemi di notazioni effettive $< W, \leqq_W >$ di MARKWALD–SPECTOR e $< \mathcal{O}, \leqq_{\mathcal{O}} >$ di CHURCH–KLEENE sono isomorfe. La funzione parziale ricorsiva $\alpha$ definita dalla $\alpha(f) = 2^{h_f(1)}$ fornisce l'isomorfismo in questione. [2]

TEOREMA. – Ogni categoria ricorsiva $\mathfrak{R}$ è isomorfa a una sottocategoria della categoria ricorsiva $\mathfrak{R}_F$ degli insiemi relativamente ricorsivamente enumerabili.

([2]) Cfr. W. MARKWALD, *Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen*, Mathematische Annalen, vol 127 (1954), pp. 135-149; G. KREISEL–J. SHOENFIELD–H. WANG, *Number-Theoretic Concepts and Recursive Well-Orderings*, Archiv für Mathematische Logik, Vol. 5 (1959), pp. 42-64.

Dimostrazione: ad ogni oggetto $a$ di $\mathfrak{R}$ si può far corrispondere l'insieme relativamente ricorsivamente enumerabile $R(a)$ delle rappresentazioni effettive di oggetti di $\mathfrak{R}$ su $a$. cioè delle rappresentazioni effettive $\alpha$ tali che $\rho\alpha$ (= campo di $\alpha$) $= a$:

$$R(a) = \{\alpha \in \mathfrak{R} \mid \rho\alpha = a\}$$

Ovviamente $R(a)$ è un oggetto di $\mathfrak{R}_F$. Che l'insieme $R(a)$ sia relativamente ricorsivamente enumerabile (sebbene non completamente relativamente ricorsivamente enumerabile, cfr. Corollario $B$, teorema 4, di RICE [10], p. 362) è un'estensione facilmente provabile di un risultato di DEKKER-MYHILL ([2], Proposition 1.6), per cui l'insieme $L(A) = \{B \in F \mid A \subseteq B\}$, dove $F$ è l'insieme di tutti gli insiemi ricorsivamente enumerabili, è ricorsivamente enumerabile se $A$ è ricorsivamente enumerabile.

Ad ogni morfismo $\alpha : a \to b$ di $\mathfrak{R}$ si può associare un morfismo $R(\alpha) : R(a) \to R(b)$, definito dalla

$$R(\alpha)\beta = \alpha\beta$$

per ogni $\beta \in R(a)$, cioè per ogni $\beta : c \to a$, dove $c$ è un oggetto di $\mathfrak{R}$. $R(\alpha)$ è ovviamente un morfismo di $\mathfrak{R}_F$ (un'operazione effettiva). Osservare che $R(\alpha)$ è ben definito, poichè se $\beta \in R(a)$, allora campo di $\beta$ = dominio di $\alpha$, quindi $\alpha\beta$ è definito e campo di $\alpha\beta$ = campo $\alpha$, da cui segue che $\alpha\beta \in R(b)$.

$R$ è un omomorfismo di $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}_F$. È soddisfatta infatti la condizione $A$) nella Def. 4: si può associare effettivamente ad ogni morfismo $\alpha$ di $\mathfrak{R}$ un morfismo $R(\alpha)$ di $\mathfrak{R}_F$. È soddisfatta la $B$): se $\alpha = 1_a$ è un'identità di $\mathfrak{R}$, allora dalla $R(\alpha)\beta = \alpha\beta$ si ha $R(\alpha)\beta = \alpha\beta = 1_a\beta = \beta$, sicchè $R(\alpha) = R(1_a)$ è l'identità $R(1_a) : R(a) \to R(a)$ di $\mathfrak{R}_F$. È soddisfatta la $C$): se $\alpha : a \to b$ e $\beta : b \to c$ sono due morfismi di $\mathfrak{R}$, ovviamente $\beta\alpha \in \mathfrak{R}$ e per ogni $\gamma \in R(a)$ si ha $R(\beta\alpha)\gamma = \beta\alpha\gamma = R(\beta)\alpha\gamma = R(\beta)R(\alpha)\gamma$.

$R$ è $1-1$. Siano infatti $\alpha : a \to b$, $\beta : c \to d$ due morfismi di $\mathfrak{R}$. Dobbiamo mostrare che $R(\alpha) = R(\beta)$ se e solo se $\alpha = \beta$. Supponiamo infatti che sia $R(\alpha) = R(\beta)$. Di conseguenza $R(a) = R(c)$, quindi $a = c$. Consideriamo ora l'identità $1 = 1_a = 1_c$. Dalla $R(\alpha)\beta = \alpha\beta$ si ha $\alpha = \alpha 1 = R(\alpha)1 = R(\beta)1 = \beta 1 = \beta$, cioè $\alpha = \beta$.

Notare che $R$ non è una rappresentazione effettiva preservante l'ordinamento. Infatti $a \neq b$ implica $R(a) \cap R(b) = \emptyset$.

COROLLARIO. - Ogni sottocategoria della categoria ricorsiva degli insiemi ricorsivamente enumerabili (e delle categorie ad essa isomorfe) è isomorfa a una sottocategoria della categoria ricorsiva dei gruppi computabili.

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{R}$ una sottocategoria della categoria degli insiemi ricorsivamente enumerabili. Ad ogni oggetto di $\mathfrak{R}$, cioè ad ogni insieme ricorsivamente enumerabile che compare in $\mathfrak{R}$, si può associare il gruppo libero da esso generato. Siano $S, T, \ldots$ oggetti di $\mathfrak{R}$, $G(S)$, $G(T), \ldots$ i gruppi liberi generati da $S, T, \ldots$ rispettivamente. $G(S)$. $G(T), \ldots$ sono gruppi computabili (immediato da RABIN [9], teorema 3). Ad ogni morfismo di $\mathfrak{R}$ (operazione effettiva da un insieme ricorsivamente enumerabile $S$ ad un insieme ricorsivamente enumerabile $T$) si può far corrispondere un omomorfismo computabile dal gruppo computabile $G(S)$ al gruppo computabile $G(T)$. Si vede immediatamente che sono soddisfatte le condizioni di isomorfismo.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] M. DAVIS *Computable functionals of arbitrary finite type*, Constructivity in mathematics, Amsterdam, 1959, pp.281-284.

[2] J. C. E. DEKKER-J. MYHILL, *Some theorems on classes of recursively enumerable sets*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 89 (1958). pp. 25-59

[3] S. EILENBERG-S. MACLANE, *General theory of natural equivalences*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 58 (1945), pp. 231-294.

[4] S. C. KLEENE, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam 1952.

[5] — —, *Countable functionals*, Constructivity in mathematics, Amsterdam 1959, pp. 81-100.

[6] — —, *Recursive functionals and quantifiers of finite types*, I, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 91 (1959), pp. 1-52.

[7] G. KREISEL, *Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types*. Constructivity in mathematics. Amsterdam 1959, pp. 101-128

[8] A. G. KUROSCH-A. CH. LIWSCHITZ-E. G SCHULGEIFER-M. S. ZALENKO, *Zur theorie der kategorien*, Berlin 1963.

[9] M. O. RABIN. *Computable algebraic systems*. Summaries Summer Institute for Symbolic Logic (Cornell University 1957), Princeton 1960, pp. 134-138.

[10] H. G. RICE. *Classes of recursively enumerable sets and their decision problems*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 74 (1953), pp. 358-366.

[11] C. SPECTOR, *Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics*. Proceedings of symposia in pure mathematics, Vol. 5, Providence 1962, pp. 1-27.