Bollettino Unione Matematica Italiana

Fabio Manaresi

Sulla totalità delle funzioni armoniche entro un semispazio in relazione alle loro tracce di frontiera.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.3, p. 311–326.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_3_311_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Sulla totalità delle funzioni armoniche entro un semispazio in relazione alle loro tracce di frontiera

Nota di FABIO MANARESI (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si caratterizza, mediante una opportuna definizione della traccia di frontiera, la totalità delle funzioni armoniche entro un dominio circolare e un semispazio.*

1. - **Introduzione.** Negli innumerevoli recenti studi relativi a problemi per le equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, con condizioni al contorno generalizzate, il caso più frequentemente considerato è stato quello di equazioni non omogenee, con condizioni al contorno omogenee (1).

Tuttavia, negli ultimi anni, sono state pure ampiamente trattate alcune questioni riguardanti le funzioni armoniche di più variabili (2) e la ricerca di soluzioni delle equazioni ellittiche, con condizioni al contorno non omogenee e opportunamente generalizzate in maniera tale da consentire ai dati di variare in spazi lineari topologici normati (3) e anche non normati (4).

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 30 giugno 1964.

(1) Tra le più recenti esposizioni d'insieme, si vedano: C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Berlin, Springer Verlag, 1955; E. MAGENES e G. STAMPACCHIA, *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », s. III, vol. XII (1958), pp. 247-357; G. FICHERA, *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali*, Roma, Corsi dell'INAM, 1958.

(2) E. M. STEIN e G. WEISS, *On the theory of harmonic functions of several variables*, (I), « Acta Math. », vol. 103 (1959), pp. 25-62; (II), ibidem. vol. 106 (1961), pp. 137-174.

(3) J. L. LIONS e E. MAGENES, *Problemi ai limiti non omogenei* (I), « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », s. III, vol. XIV (1960), pp. 269-308; (II), « Ann. Inst. Fourier », vol. XI (1961), pp. 137-178; (III), « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », s. III, vol. XV (1961), pp. 41-103; (IV), ibidem, s. III, vol. XV (1961), pp. 311-326; (V), ibidem, s. III, vol. XVI (1962), pp. 1-44.

(4) J. L. LIONS e E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes* (VII), « Ann. Mat. Pura Appl. », s. IV, vol. LXIII (1963), pp. 201-224.

Più difficile appare, in generale, il problema di caratterizzare, attraverso una conveniente nozione di comportamento sulla frontiera di un campo (insieme aperto e connesso), la totalità delle funzioni che, nel campo stesso, sono soluzioni dell'equazione data, problema che si presenta come l'analogo di quello della determinazione dell'integrale generale per un'equazione differenziale ordinaria, e che dipende però essenzialmente dalla forma del campo considerato.

Tale questione, relativamente alle funzioni armoniche, è stata risolta da CIMMINO, dapprima nel caso semplice di un campo circolare piano ([5]) e successivamente nel caso di un campo pluridimensionale limitato e avente come frontiera una qualsivoglia varietà analitica chiusa topologicamente definita ([6]). Il risultato ottenuto è che, organizzata la classe di tutte le funzioni u, armoniche in un campo limitato Ω, come uno spazio lineare U numerabilmente normato ([7]), sono state definite e rappresentate le relative tracce f sulla frontiera S di Ω in modo che anch'esse formino uno spazio lineare F numerabilmente normato e che la relazione

$$f = \text{traccia di } u \text{ su } S$$

stabilisca un isomorfismo (algebrico) topologico fra i due spazi F e U.

In tutti i problemi testè ricordati si considera sempre un campo limitato, laddove, quando il campo è illimitato, si presentano nuove difficoltà in quanto che presumibilmente, oltre a condizioni alla frontiera, si dovrebbe imporre anche una condizione all'infinito.

A tale proposito sembrerebbe legittimo porre, nel caso delle funzioni $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(n \geq 2)$, armoniche nel semispazio aperto $x_n > 0$, come condizione alla frontiera quella di soddisfare, oltre

([5]) G. CIMMINO, *Sulla totalità delle funzioni che in un dato campo verificano una equazione differenziale lineare omogenea*, « Atti Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mem. », s. XI, t. VII (1960); si veda anche G. JOHNSON, *Representation of harmonic functions in the unit circle*, comunicato al Congresso internazionale dei Matematici di Stoccolma nel 1962.

([6]) G. CIMMINO, *Sulle tracce delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti*, « Atti Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mem. », s. XI, t. X (1963).

([7]) I. M. GHELFAND e G. E. SCILOV, *Spazi di funzioni fondamentali generalizzate* (in russo), Mosca (1958), vol. II, cap. I, § 3.

a una opportuna condizione all'infinito, alla relazione

$$\lim_{x_n \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})dx_1 \ldots dx_{n-1} = K[\Psi] \quad (^8)$$

per qualunque funzione $\Psi \in \mathfrak{D}$, essendo $K[\Psi]$ un dato vettore dello spazio $\mathfrak{D}'$, ossia una distribuzione nel senso di SCHWARTZ [9].

Non sarebbe certo privo di interesse stabilire l'esistenza e l'unicità o meno di una funzione, armonica in $x_n > 0$, che soddisfi alla citata condizione, tuttavia è manifesto che, in tal modo, la totalità delle « tracce di frontiera » di tutte le eventuali funzioni cosiffatte, cioè lo spazio $\mathfrak{D}'$, sarebbe di tipo $\mathfrak{L}\mathfrak{F}$, « limite induttivo » di successioni di spazi $\mathfrak{F}$ (di FRECHET) [10].

Nella presente nota viene invece caratterizzata la totalità delle funzioni armoniche entro un semispazio, attraverso una opportuna nozione di comportamento al contorno, dedotta dall'idea di CIMMINO di considerare la frontiera non come un insieme di punti, ma come un insieme di « cammini di avvicinamento » ai punti della frontiera medesima [11] e nel contempo, trattandosi di un campo illimitato, di « cammini di allontanamento » all'infinito.

Precisamente viene definita e rappresentata la traccia di frontiera di ogni funzione armonica entro un semispazio, considerando quest'ultimo come limite di una famiglia di intorni circolari e si perviene così a stabilire un isomorfismo topologico fra la totalità delle funzioni armoniche in un campo semispaziale e lo spazio duale, che è di tipo $\mathfrak{F}$ anzichè $\mathfrak{L}\mathfrak{F}$, di quello delle funzioni analitiche sulla frontiera di un dominio circolare.

(8) Condizioni di questo tipo sono già state considerate nel caso di problemi di CAUCHY per sistemi di equazioni alle derivate parziali, supponendo però il funzionale $K[\Psi]$ definito in uno spazio, opportunamente scelto, di funzioni rapidamente decrescenti all'infinito e non a supporto compatto, il che induce a prendere in considerazione soltanto soluzioni u dotate di un certo comportamento all'infinito, tale cioè da assicurare l'esistenza dell'integrale che, al limite, per $x_n \to 0+$, deve ridursi a $K[\Psi]$. Cfr. loc. cit. in (7), vol. III, cap. II, § 3.

(9) L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Paris, Hermann (1950).

(10) L. J. DIEUDONNÉ e L. SCHWARTZ, *La dualitè dans les espaces* ($\mathfrak{F}$) *et* ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$). « Ann. Inst. Fourier », t. I (1949), pp. 61-101.

(11) G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. LXI (1937), pp. 177-224.

Per semplicità di esposizione, ci si limita al caso delle funzioni di tre variabili, premettendo, attraverso una trattazione diretta che giova a rendere più spedita la risoluzione del problema proposto, la caratterizzazione delle funzioni armoniche entro una sfera, che si presenta con estrema chiarezza, data la possibilità di rappresentare ogni funzione armonica in un campo circolare con una successione di costanti reali, che sono i coefficienti del corrispondente sviluppo in serie di LAPLACE, sicchè le relative tracce sulla frontiera si rappresentano pure mediante successioni di numeri reali, e si trova naturalmente che tali tracce costituiscono uno spazio in relazione di dualità con quello di tutte le funzioni reali analitiche dei punti della frontiera del suddetto campo circolare.

2. - Caratterizzazione delle funzioni armoniche entro una sfera.

Si consideri, nello spazio xyz, il campo circolare Ω con centro nell'origine, raggio unitario e frontiera S. Sulla superficie sferica S si assumano il punto $Q_0 \equiv (1, 0, 0)$ come polo, il semiasse x positivo come asse polare, il semipiano determinato dall'asse x e dal semiasse y positivo come semipiano iniziale, e si indichino rispettivamente con φ e ϑ la colatitudine polare e la longitudine del punto generico di S, talchè sarà $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Per ogni punto $P \equiv (x, y, z)$ dello spazio, ove si ponga $OP = \rho$ e si denoti con Q il punto di incontro del raggio $\overrightarrow{OP}$ con S, riesce allora

$$Q \equiv (\cos\varphi,\ \operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta,\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta),$$

$$P \equiv (\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta,\ \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta).$$

Ciò premesso, se

$$(1) \qquad \sum_0^{\infty}{}_n \left\{ \frac{1}{2} a_{n0} U_{n0}(Q) + \sum_1^{n}{}_k \left[a_{nk} U_{nk}(Q) + b_{nk} V_{nk}(Q) \right] \right\},$$

con

$$U_{n0}(Q) = X_n(\cos\varphi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\left.\begin{aligned} U_{nk}(Q) &= X_n^{(k)}(\cos\varphi)\operatorname{sen}^k\varphi\cos k\vartheta \\ V_{nk}(Q) &= X_n^{(k)}(\cos\varphi)\operatorname{sen}^k\varphi\operatorname{sen} k\vartheta \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

dove X_n denota il polinomio di LEGENDRE di grado n, è la serie di LAPLACE di una funzione $f(Q)$ dei punti Q di S e quivi sommabile allora la serie

$$(2) \qquad \sum_0^\infty{}_n \rho^n \left\{ \frac{1}{2} a_{n0} U_{n0}(Q) + \sum_1^n{}_k \left[a_{nk} U_{nk}(Q) + b_{nk} V_{nk}(Q) \right] \right\} \qquad (0 \leq \rho < 1)$$

rappresenta, com'è noto, una funzione $u(x, y, z) = u(\rho, Q)$, armonica in Ω, la quale assume su S i valori $f(Q)$ nel senso ordinario, se $f(Q)$ è continua in S, e in un opportuno senso generalizzato, se $f(Q)$ verifica condizioni meno restrittive della continuità.

Tuttavia la (1) potrebbe non essere una serie di LAPLACE, pur rappresentando la (2) una funzione u armonica in Ω e, in tal caso, non è lecito affermare che la u assume su S, sia pure in un senso convenientemente generalizzato, i valori di una certa funzione $f(Q)$, giacchè non esiste una funzione cosiffatta, di cui la (1) sia la serie di LAPLACE, a meno che non si convenga di sostituire, ad una ordinaria funzione $f(Q)$, una opportuna «funzione generalizzata», per esempio, di tipo analogo ad una distribuzione nel senso di SCHWARTZ.

Nell'ampliamento della classe delle funzioni f (ordinarie o generalizzate), da considerarsi come valori assegnati al contorno, si può procedere gradualmente sino a raggiungere quei limiti di generalità che, per la natura stessa delle cose, riescono invalicabili.

Un primo passo in questo senso si trova in una memoria di CIMMINO ([12]), dove è stato introdotto un tipo di comportamento al contorno, che può chiamarsi «convergenza in media sul contorno verso valori di quadrato sommabile». Nel caso particolare qui preso in esame si avrà che una funzione u, armonica in Ω, converge in media su S verso valori rappresentati da una $f(Q)$ di quadrato sommabile in S, quando è verificata la condizione

$$(3) \qquad \lim_{\rho \to 1-} \int_S [u(\rho, Q) - f(Q)]^2 ds = 0$$

e si riconosce facilmente che esiste una, e una sola, funzione u, armonica in Ω, che rende soddisfatta la (3).

Inoltre è manifesto che il suddetto tipo di condizione stabilisce un isomorfismo metrico fra lo spazio $L^2(S)$ e la totalità di quelle

([12]) Loc. cit. in ([11]).

funzioni, armoniche in Ω, che convergono in media su S verso valori di quadrato sommabile in S.

In una successiva ricerca di CIMMINO ([13]) è stato provato come la condizione di convergenza in media, che può dirsi una condizione di « convergenza forte », si possa sostituire con una condizione di « convergenza debole » verso valori di quadrato sommabile sulla frontiera e che, nel caso speciale qui considerato, equivale a sostituire la (3) con la

$$(4) \qquad \lim_{\rho \to 1-} \int_S [u(\rho, Q) - f(Q)]\Psi(Q)dS = 0 \qquad \forall \Psi \in L^2(S).$$

Anche in tal caso si verifica agevolmente che la (4) istituisce, fra $L^2(S)$ e la detta classe di funzioni armoniche, il medesimo isomorfismo che, come dianzi si è osservato, risulta stabilito dalla (3).

Si noti poi che, nella (4), l'$\int_S f\Psi dS$ si può considerare come un funzionale lineare $K[\Psi]$ definito in $L^2(S)$; ne consegue che, se $K[\Psi]$ si suppone un funzionale lineare continuo definito, anzichè in $L^2(S)$, in uno spazio più « ristretto » (cioè formato da funzioni verificanti una condizione più restrittiva di quella di essere di quadrato sommabile in S), viene ad ampliarsi la classe delle tracce di frontiera. Così proseguendo, se si arriva a supporre $K[\Psi]$ definito soltanto nello spazio lineare topologico $\mathfrak{A}(S)$ ([14]) delle funzioni Ψ analitiche dei punti di S, in luogo della (4) si ha la condizione al contorno

$$(5) \qquad \lim_{\rho \to 1-} \int_S u(\rho, Q)\Psi(Q)dS = K[\Psi] \qquad \forall \Psi \in \mathfrak{A}(S),$$

che risulta *la più generale possibile*, giacchè caratterizza tutte le funzioni armoniche entro il dominio circolare.

Se infatti

$$(6) \qquad \sum_0^\infty{}_n \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{n0} U_{n0}(Q) + \sum_1^n{}_k [\alpha_{nk} U_{nk}(Q) + \beta_{nk} V_{nk}(Q)] \right\}$$

([13]) G. CIMMINO, *Una nuova forma del teorema di unicità per la soluzione del problema generalizzato di Dirichlet*, « Atti Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mem. », s. XI, t. IV (1957), pp. 83-88.

([14]) G. CIMMINO, *Su alcuni esempi notevoli di dualità fra spazi lineari topologici*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », vol. XXXIII (1963), pp. 102-113.

denota la serie di LAPLACE di una funzione $\Psi \in \mathfrak{A}(S)$, il funzionale $K[\Psi]$ è suscettibile, come si riconosce in base al teorema di PARSEVAL [15], di una rappresentazione del tipo

$$(7)\qquad K[\Psi] = 2\pi \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{2}a_{n0}\alpha_{n0} + \sum_{1}^{n}{}_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}(a_{nk}\alpha_{nk} + b_{nk}\beta_{nk})\right],$$

dove la successione a_{nk}, b_{nk} rappresenta un punto, fissato a piacere, nello spazio duale [16] di quello delle successioni α_{nk}, β_{nk}, ciascuna delle quali rappresenta le coordinate di LAPLACE di una funzione $\Psi \in \mathfrak{A}(S)$, ovvero è tale che la serie

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \rho^n \left\{\frac{1}{2}\alpha_{n0}U_{n0}(Q) + \sum_{1}^{n}{}_k [\alpha_{nk}U_{nk}(Q) + \beta_{nk}V_{nk}(Q)]\right\}$$

riesca convergente per almeno un $\rho > 1$. È manifesto che quest'ultima condizione equivale a

$$\exists\rho > 1: \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{\rho^{2n}}{2n+1}\left[\frac{1}{2}\alpha_{n0}^2 + \sum_{1}^{n}{}_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}(\alpha_{nk}^2 + \beta_{nk}^2)\right] < +\infty$$

e, affinchè ciò avvenga, occorre e basta che risulti

$$(8)\qquad \exists\rho > 1: \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\rho^{2n}}{2n+1}\left[\frac{1}{2}\alpha_{n0}^2 + \sum_{1}^{n}{}_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}(\alpha_{nk}^2 + \beta_{nk}^2)\right] = 0.$$

Pertanto lo spazio duale di quello delle successioni α_{nk}, β_{nk}, che verificano la (8), è formato da tutte le successioni a_{nk}, b_{nk}, per cui la (2) risulta convergente per tutti i ρ positivi e minori di 1, ovvero tali che si abbia

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\rho^{2n}}{2n+1}\left[\frac{1}{2}a_{n0}^2 + \sum_{1}^{n}{}_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}(a_{nk}^2 + b_{nk}^2)\right] = 0 \qquad \forall\rho \begin{cases} > 0 \\ < 1, \end{cases}$$

sicchè tale spazio duale è topologicamente isomorfo alla totalità delle funzioni armoniche in Ω.

[15] Si veda, per esempio, M. PICONE, *Appunti di analisi superiore*, Napoli, Rondinella (1940), p. 243.

[16] Si intende qui lo spazio α-duale di spazi lineari topologici, secondo la terminogia di KÖTHE. *Topologische lineare Räume*, Springer (1960), p. 409.

A norma delle precedenti considerazioni, si dimostra ora che

I. *Esiste una, e una sola, funzione* u, *armonica in* Ω, *che verifica la* (5).

Invero, si consideri una successione a_{nk}, b_{nk}, scelta a piacere, per cui valga la (9). La funzione u, definita dalla (2), è armonica in Ω e per essa risulta

$$\int_S u(\rho,\ Q)\Psi(Q)dS = \tag{10}$$

$$= 2\pi \sum_0^\infty{}_n \frac{\rho^n}{2n+1}\left[\frac{1}{2}a_{n0}\alpha_{n0} + \sum_1^n{}_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}(a_{nk}\alpha_{nk} + b_{nk}\beta_{nk})\right]$$

$$\forall\rho \begin{cases} > 0 \\ < 1, \end{cases} \qquad \forall\Psi \in \mathfrak{A}(S),$$

dove α_{nk}, β_{nk} indicano le coordinate di LAPLACE della Ψ medesima.

Dalla (10), giusta la convergenza della serie a secondo membro di (7), discende subito che la funzione u considerata verifica la condizione al contorno (5).

Per provare l'unicità, si osservi che tra le $\Psi \in \mathfrak{A}(S)$ sono comprese, in particolare, le funzioni sferiche fondamentali $U_{nk}(Q)$, $V_{nk}(Q)$, onde la (5) fornisce, in tal caso,

$$\lim_{\rho \to 1-} \int_S u(\rho,\ Q)U_{n0}(Q)dS = \frac{\pi}{2n+1}a_{n0} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

$$\lim_{\rho \to 1-} \int_S u(\rho,\ Q)\frac{U_{nk}}{V_{nk}}(Q)dS = \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{a_{nk}}{b_{nk}} \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Com'è noto ([17]), gli integrali ai primi membri, essendo la u armonica in Ω, differiscono da ρ^n per dei fattori costanti, i quali devono quindi essere i secondi membri.

Infine è immediato che, inversamente, assegnata ad arbitrio una funzione u, armonica in Ω, vi è sempre un ben determinato funzionale (7) per cui la u verifica la (5).

I funzionali lineari continui (7), che possono ancora considerarsi come una classe di funzioni generalizzate, si ottengono dunque ciascuno in corrispondenza ad ogni successione a_{nk}, b_{nk} tale che

([17]) Loc. cit. in ([15]), p. 241.

valga la (9). Ad ognuno $K[\Psi]$ di essi corrisponde una ben determinata funzione (2), armonica in Ω, per la quale è soddisfatta la condizione al contorno (5) e viceversa. La classe delle funzioni generalizzate, in tal modo introdotte, è pertanto quella cercata delle tracce su S di tutte le funzioni armoniche in Ω.

Si può quindi concludere che

II. *Le tracce sulla superficie sferica di tutte le funzioni armoniche all'interno di essa costituiscono uno spazio in relazione di dualità con quello di tutte le funzioni analitiche sulla superficie suddetta.*

3. - Caratterizzazione delle funzioni armoniche entro un semispazio.

Si consideri la trasformazione

$$(11)\qquad x = -\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1}{\xi^2+\eta^2+(\zeta+1)^2}, \qquad y = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2+(\zeta+1)^2},$$
$$z = \frac{2\eta}{\xi^2+\eta^2+(\zeta+1)^2},$$

che muta il semispazio $\zeta \geq 0$ nel dominio circolare $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, e la cui inversa è

$$(12)\qquad \xi = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2+z^2}, \qquad \eta = \frac{2z}{(x+1)^2+y^2+z^2},$$
$$\zeta = -\frac{x^2+y^2+z^2-1}{(x+1)^2+y^2+z^2}.$$

Per ogni punto $P \equiv (\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta) \in \Omega$ riesce allora, in virtù della (11),

$$(13)\qquad \rho = \sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2}{\xi^2+\eta^2+(\zeta+1)^2}}. \qquad \mathrm{tang}\,\varphi = -\frac{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1},$$
$$\mathrm{tang}\,\vartheta = \frac{\eta}{\xi}.$$

Ciò premesso, se $u(\xi, \eta, \zeta)$ è una funzione armonica in $\zeta > 0$, detta $v(x, y, z)$ la sua trasformata mediante la (12), si riconosce facilmente che la funzione

$$\frac{v(x, y, z)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2}}$$

è armonica in Ω, sicchè quest'ultima può esprimersi mediante una serie del tipo (2).

Si osservi poi che, giusta la (11), alla famiglia di superficie sferiche $x^2+y^2+z^2 \leq \rho^2$, $0<\rho<1$, corrisponde la famiglia di superficie del medesimo tipo

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\zeta+1=0, \qquad 0<\rho<1,$$

che, posto $\dfrac{1-\rho^2}{1+\rho^2}=\operatorname{tangh} t$, diviene

$$\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{\operatorname{tangh} t}\right)^2=\frac{1}{\operatorname{senh}^2 t}, \qquad 0<t<+\infty. \tag{14}$$

Le superficie sferiche (14), che ricoprono semplicemente il semispazio aperto $\zeta>0$, sono suscettibili della seguente rappresentazione parametrica

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{\operatorname{sen} s_1}{\cosh t+\cos s_1}\cos s_2 \\ \eta &= \frac{\operatorname{sen} s_1}{\cosh t+\cos s_1}\operatorname{sen} s_2 \qquad \begin{matrix} 0\leq s_1\leq\pi \\ 0\leq s_2\leq 2\pi \end{matrix} \qquad 0<t<+\infty \\ \zeta &= \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t+\cos s_1} \end{aligned}\right. \tag{15}$$

e riesce, ricordando le (13),

$$\rho=\sqrt{\frac{\cosh t-\operatorname{senh} t}{\cosh t+\operatorname{senh} t}}, \qquad s_1=\varphi, \qquad s_2=\vartheta. \tag{16}$$

Mediante le (15), tenendo conto delle (16), si deduce che ogni funzione armonica in $\zeta>0$ si muta in una funzione di s_1, s_2, t, che può rappresentarsi con una serie del tipo

$$(17)\qquad \sqrt{\frac{\cosh t + \cos s_1}{\cosh t + \operatorname{senh} t}}\sum_0^\infty {}_n \left(\frac{\cosh t - \operatorname{senh} t}{\cosh t + \operatorname{senh} t}\right)^{\frac{n}{2}} \left[\frac{1}{2} a_{n0} X_n(\cos s_1) + \right.$$

$$\left. + \sum_1^n {}_k X_n^{(k)}(\cos s_1) \operatorname{sen}^k s_1 (a_{nk} \cos k s_2 + b_{nk} \operatorname{sen} k s_2)\right],$$

che sia convergente per ogni $t > 0$.

Si dimostra ora che

III. *Se* $f(Q) \in L^2(S)$, *esiste una, e una sola, funzione* $u(\xi, \eta, \zeta)$, *armonica in* $\zeta > 0$, *che verifica la condizione*

$$(18)\qquad \lim_{t \to 0+} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} s_1}{\cosh t + \cos s_1} \cdot$$

$$\cdot \left[u\left(\frac{\operatorname{sen} s_1 \cos s_2}{\cosh t + \cos s_1}, \frac{\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2}{\cosh t + \cos s_1}, \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t + \cos s_1}\right) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{1 + \cos s_1}\, f(\cos s_1, \operatorname{sen} s_1 \cos s_2, \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2)\right]^2 ds_1 ds_2 = 0.$$

Infatti, se la (1), con $Q \equiv (\cos s_1, \operatorname{sen} s_1 \cos s_2, \operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2)$, è la serie di LAPLACE della $f(Q)$, si consideri la funzione $u(\xi, \eta, \zeta)$, armonica in $\zeta > 0$, che, mediante il cambiamento di variabili (15), si potrà rappresentare con la (17).

Si osservi poi che, giusta la disuguaglianza integrale di MINKOWSKI, riesce

$$\left\{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} s_1}{\cosh t + \cos s_1} \left[u\left(\frac{\operatorname{sen} s_1 \cos s_2}{\cosh t + \cos s_1}, \ldots\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{1 + \cos s_1} f(\cos s_1, \ldots)\right]^2 ds_1 ds_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{u}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}} - \frac{f}{\sqrt{\cosh t + \operatorname{senh} t}}\right)^2 \operatorname{sen} s_1 \, ds_1 ds_2 \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left\{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\cosh t + \operatorname{senh} t}} - \frac{\sqrt{1 + \cos s_1}}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}}\right)^2 f^2 \operatorname{sen} s_1 \, ds_1 ds_2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

dove il secondo integrale all'ultimo membro tende a zero per $t \to 0+$, mentre, tenendo conto della (17), si ha

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{u}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}} - \frac{f}{\sqrt{\cosh t + \operatorname{senh} t}}\right)^2 \operatorname{sen} s_1 ds_1 ds_2 =$$

$$= \frac{2\pi}{\cosh t + \operatorname{senh} t}\sum_0^{\infty}{}_n \frac{\left[\left(\frac{\cosh t - \operatorname{senh} t}{\cosh t + \operatorname{senh} t}\right)^{\frac{n}{2}} - 1\right]^2}{2n+1}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}a_{n0}^2 + \sum_1^n{}_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}(a_{nk}^2 + b_{nk}^2)\right]$$

e il secondo membro tende evidentemente a zero per $t \to 0+$.

Si conclude intanto che la considerata funzione u, armonica in $\zeta > 0$, soddisfa alla (18).

Per provare che una funzione cosiffatta è unica, basta far vedere che una funzione $u(\xi, \eta, \zeta)$, armonica in $\zeta > 0$, non può essere che identicamente nulla se verifica la condizione

$$\lim_{t \to 0+}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen} s_1}{\cosh t + \cos s_1}\cdot \tag{19}$$

$$\cdot\left[u\left(\frac{\operatorname{sen} s_1 \cos s_2}{\cosh t + \cos s_1}, \frac{\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2}{\cosh t + \cos s_1}, \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t + \cos s_1}\right)\right]^2 ds_1 ds_2 = 0.$$

Infatti, dalla relazione [18]

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Pu^2 ds_1 ds_2 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\Delta(P\alpha t) - t\Delta(P\alpha)\right]\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(s_1, s_2, t)}u^2 ds_1 ds_2 +$$

$$+ \iiint_{D(t)}\Delta(P\alpha)u^2 d\xi d\eta d\zeta - 2\iiint_{D(t)}P\alpha(u\Delta u + u_\xi^2 + u_\eta^2 + u_\zeta^2)d\xi d\eta d\zeta,$$

[18] Loc. cit. in [11], formula (54).

dove $D(t)$ è il dominio circolare avente per frontiera la superficie sferica (15),

$$t = \operatorname{arctangh} \frac{2\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1},$$

$$P = \frac{1}{\alpha} = \begin{vmatrix} t_\xi & t_\eta & t_\zeta \\ \xi_{s_1} & \eta_{s_1} & \zeta_{s_1} \\ \xi_{s_2} & \eta_{s_2} & \zeta_{s_2} \end{vmatrix}$$

e quindi

$$P\left(\frac{\operatorname{sen} s_1 \cos s_2}{\cosh t + \cos s_1}, \frac{\operatorname{sen} s_1 \operatorname{sen} s_2}{\cosh t + \cos s_1}, \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t + \cos s_1}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} s_1}{\cosh t + \cos s_1} \geq 0 \qquad \text{per} \begin{cases} 0 \leq s_1 \leq \pi \\ 0 \leq s_2 \leq 2\pi \\ 0 < t < +\infty, \end{cases}$$

si trae

$$(20) \qquad \frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} s_1}{\cosh t + \cos s_1} u^2 ds_1 ds_2 = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \Delta t \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(s_1, s_2, t)} u^2 ds_1 ds_2 -$$
$$-2 \iiint_{D(t)} (u_\xi^2 + u_\eta^2 + u_\zeta^2) d\xi d\eta d\zeta.$$

All'ultimo membro il secondo integrale, se la u non è identicamente nulla, si mantiene certamente superiore a una quantità positiva fissa, per tutti i $t > 0$ di un intorno dello zero, mentre il primo integrale è certamente non positivo avendosi

$$\Delta t = -4\zeta \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2 + 2(\xi^2 + \eta^2)(\zeta^2 + 1) + (\zeta^2 - 1)^2}{[(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1)^2 - 4\zeta^2]^2} \leq 0 \qquad \text{per } \zeta > 0,$$

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(s_1, s_2, t)} = \frac{\operatorname{sen} s_1}{(\cosh t + \cos s_1)^3} \geq 0$$
$$\text{per} \quad 0 \leq s_1 \leq \pi, \; 0 \leq s_2 \leq 2\pi, \; 0 < t < +\infty.$$

Pertanto il secondo membro della (20) è negativo, almeno per $t > 0$ e sufficientemente prossimo a zero, se la u armonica in $\zeta > 0$ e non identicamente nulla. Ne consegue che l'integrale a primo membro di (20), quando t varia avvicinandosi allo zero da destra, deve, da un certo momento in poi, cominciare a crescere e, poichè esso non è mai negativo, ciò riesce incompatibile con la (19).

Si noti che il tipo di condizione (18) stabilisce un isomorfismo metrico fra lo spazio $L^2(S)$ e la totalità di quelle funzioni u, armoniche in $\zeta > 0$, che verificano la (18) medesima.

Quest'ultima, che può chiamarsi una condizione di «convergenza forte», si può sostituire ([19]) con la seguente condizione di «convergenza debole»

$$(21) \qquad \lim_{t \to 0+} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} s_1}{\cosh t + \cos s_1} \left[u\left(\frac{\operatorname{sen} s_1 \cos s_2}{\cosh t + \cos s_1}, \ldots\right) - \right.$$
$$\left. - \sqrt{1 + \cos s_1}\, f(\cos s_1, \ldots) \right] \sqrt{1 + \cos s_1}\, \Psi(\cos s_1, \ldots) ds_1 ds_2 = 0$$
$$\forall \Psi \in L^2(S)$$

ed evidentemente la (21) istituisce, tra $L^2(S)$ e la detta classe di funzioni u armoniche in $\zeta > 0$, il medesimo isomorfismo che, come prima si è osservato, risulta stabilito dalla (18).

È facile vedere che, se $f \in L^2(S)$, $\Psi \in L^2(S)$, la (21) riesce equivalente alla

$$(22) \quad \lim_{t \to 0+} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} s_1}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}} (u - \sqrt{1 + \cos s_1}\, f) \Psi ds_1 ds_2 = 0 \quad \forall \Psi \in L^2(S).$$

Si ha invero, applicando la disuguaglianza integrale di SCHWARZ,

$$\left\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} s_1}{\cosh t + \cos s_1} u \sqrt{1 + \cos s_1}\, \Psi ds_1 ds_2 - \right.$$
$$\left. - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} s_1}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}} u \Psi ds_1 ds_2 \right\}^2 \leq$$
$$\leq \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} s_1}{\cosh t + \cos s_1} u^2 ds_1 ds_2 \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} s_1 \left(\frac{\sqrt{1 + \cos s_1}}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}} - 1 \right)^2 \Psi^2 ds_1 ds_2.$$

All'ultimo membro, il primo integrale si mantiene limitato, giusta la (17) e il teorema di PARSEVAL, ([20]) per $0 < t < +\infty$, mentre il secondo integrale tende evidentemente a zero per $t \to 0^+$.

([19]) Loc. cit. in ([13]).
([20]) Loc. cit. in ([15]).

Dopodichè l'asserto discende dal fatto che riesce

$$\lim_{t \to 0+} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos s_1}{\cosh t + \cos s_1} f\Psi \operatorname{sen} s_1 \, ds_1 ds_2 =$$

$$= \lim_{t \to 0+} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + \cos s_1}}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}} f\Psi \operatorname{sen} s_1 \, ds_1 ds_2 =$$

$$= \int_S f\Psi dS.$$

La (22) può anche scriversi

$$\text{(23)} \quad \lim_{t \to 0+} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} s_1}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}} u\Psi ds_1 ds_2 = \int_S f\Psi dS \quad \forall \Psi \in L^2(S),$$

dove l'ultimo membro si può considerare come un funzionale lineare $K[\Psi]$ definito in $L^2(S)$.

Se allora $K[\Psi]$ si suppone un funzionale lineare continuo definito soltanto nello spazio $\mathfrak{A}(S)$, si può considerare, in luogo della (23), la condizione

$$\text{(24)} \quad \lim_{t \to 0+} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} s_1}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}} u\Psi ds_1 ds_2 = K[\Psi] \quad \forall \Psi \in \mathfrak{A}(S),$$

che risulta *la più generale possibile*, giacchè $K[\Psi]$ ammette ancora la rappresentazione (7), dove la successione a_{nk}, b_{nk} verifica la (9) ed è un punto, fissato a piacere, nello spazio duale di quello di tutte le successioni α_{nk}, β_{nk} che soddisfano alla (8), onde, ricordando la (17), segue che tale spazio duale è topologicamente isomorfo anche alla totalità delle funzioni armoniche in $\zeta > 0$.

In base alle precedenti considerazioni si dimostra ora che

IV. *Esiste una, e una sola, funzione* u, *armonica in* $\zeta > 0$, *che verifica la* (24).

Infatti, si consideri una successione a_{nk}, b_{nk}, scelta ad arbitrio, per cui valga la (9). La funzione u, definita dalla (17), è armonica in $\zeta > 0$ e per essa risulta

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen} s_1}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}}u\Psi ds_1 ds_2 = \tag{25}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\cosh t + \operatorname{senh} t}}\sum_0^\infty{}_n\frac{\left(\frac{\cosh t - \operatorname{senh} t}{\cosh t + \operatorname{senh} t}\right)^{\frac{n}{2}}}{2n+1}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}a_{n0}\alpha_{n0} + \sum_1^n{}_k\frac{(n+k)!}{(n-k)!}(a_{nk}\alpha_{nk} + b_{nk}\beta_{nk})\right] \qquad \forall t > 0,\ \forall\Psi\in\mathfrak{A}(S),$$

dove α_{nk}, β_{nk} indicano le coordinate di LAPLACE della Ψ medesima.

Dalla (25), per la convergenza della serie (7), segue che la funzione u considerata verifica la (24).

Allo scopo di provare l'unicità, si osservi che tra le $\Psi\in\mathfrak{A}(S)$ sono comprese, in particolare, le funzioni sferiche fondamentali $U_{nk}(Q)$, $V_{nk}(Q)$, onde la (24) fornisce, in tal caso,

$$\lim_{t\to 0+}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen} s_1}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}}uU_{n0}ds_1 ds_2 = \frac{\pi}{2n+1}a_{n0} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{t\to 0+}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen} s_1}{\sqrt{\cosh t + \cos s_1}}u\,{U_{nk}\atop V_{nk}}ds_1 ds_2 = \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}{a_{nk}\atop b_{nk}}$$

$$\begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots, n\end{pmatrix}.$$

Si riconosce facilmente che gli integrali ai primi membri, essendo la u armonica in $\zeta > 0$, differiscono da

$$\left(\frac{\cosh t - \operatorname{senh} t}{\cosh t + \operatorname{senh} t}\right)^{\frac{n}{2}}(\cosh t + \operatorname{senh} t)^{-\frac{1}{2}}$$

per dei fattori costanti, i quali devono quindi essere precisamente i secondi membri.

Infine è chiaro che, inversamente, assegnata ad arbitrio una funzione u, armonica in $\zeta > 0$, vi è sempre un ben determinato funzionale (7) per cui la u verifica la (24).

I funzionali lineari continui (7) costituiscono dunque la classe cercata delle tracce di frontiera di tutte le funzioni armoniche in $\zeta > 0$.

Si conclude che

V. *Le tracce di frontiera di tutte le funzioni armoniche entro un semispazio costituiscono una classe in relazione di dualità con quella di tutte le funzioni analitiche su una superficie sferica.*