Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Santoro

Condizioni di non controllabilità per i sistemi lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.4, p. 400–406.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_4_400_0>

Condizioni di non controllabilità per i sistemi lineari

Nota di PAOLO SANTORO (a Firenze) (*) (**)

Summary. - *We give some conditions for the non-controllability of an object whose state, represented by $x \in E^n$, is a solution of the differential equation* (E). *Such conditions are expressed uniquely in terms of the data* $A(t)$, $a(t)$, $B(t)$, x^0, x^1 *and they do not presume the integration of the omogeneous equation* $\dot{x} = A(t)x$.

1. Sia dato un oggetto il cui stato sia rappresentato da un n–vettore $x \in E^n$ (E^n = spazio euclideo n–dimensionale) che vari in dipendenza del tempo t (≥ 0) in modo da soddisfare l'equazione differenziale (vettoriale) lineare

$$(E) \qquad \dot{x} = A(t)x + a(t) + B(t)u(t).$$

Assegnati: $A(t)$, matrice $n \times n$, integrabile (LEBESGUE) su ogni intervallo $[0, T]$; $a(t)$, n–vettore, integrabile su ogni intervallo $[0, T]$; $B(t)$, matrice $n \times m$, misurabile per $t \geq 0$; $u(t)$ un m–vettore; si considera il seguente *problema di controllabilità:*

Dati uno stato iniziale x^0 ed uno stato finale x^1, si chiede se è possibile trovare un controllo, ossia un m–vettore $u(t)$, tale che $B(t)u(t)$ sia integrabile ed inoltre, detta $x(t, u)$ la corrispondente soluzione di (E) e di

$$(\alpha) \qquad x(0, u) = x^0,$$

sia

$$(\beta) \qquad x(T, u) = x^1$$

per qualche $T > 0$.

Se [non] esiste un m–vettore $u(t)$ che soddisfa le condizioni anzidette si dice che l'oggetto è [non] *controllabile* al tempo T, rispetto alla coppia x^0, x^1.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 10 ottobre 1964.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n° 6 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per il 1963-64.

In questa nota si dànno delle condizioni per la non controllabitità che non richiedono la preventiva integrazione dell'equazione omogenea $\dot{x} = A(t)x$, ma sono invece espresse direttamente in funzione dei dati $A(t)$, $a(t)$, $B(t)$, x^0, x^1.

2. Ovviamente possiamo ricondurci al caso in cui lo stato finale sia l'origine stessa degli assi O^n. Basta effettuare la trasformazione

$$x = \xi + x^1$$

con che il sistema (E) si riduce al sistema $\dot{\xi} = A(t)\xi + \tilde{a}(t) + B(t)u(t)$ con $\tilde{a}(t) = A(t)x^1 + a(t)$ e lo stato iniziale sarà dato da $\tilde{x}^0 = x^0 + x^1$.

Pertanto nel seguito cambieremo la (β) con la

$$(\gamma) \qquad x(T, u) = O^n.$$

3. Posto $x = \sigma\eta$, $\sigma \geq 0$, $\eta^*\eta = 1$ (dove * indica l'operazione di trasposizione di vettori o matrici) e posto

$$H(t) = [A(t) + A^*(t)]/2$$

ad ogni soluzione di (E) corrisponde una soluzione (σ, η) del sistema

$$(1) \qquad \dot{\sigma} = \sigma\eta^*H\eta + \eta^*a + \eta^*Bu,$$

$$(2) \qquad \sigma\dot{\eta} = -\sigma\eta + A\sigma\eta + a + Bu.$$

Da (1) si ha

$$\sigma = \exp\left(\int_0^t \eta^*(\tau)H(\tau)\eta(\tau)d\tau\right)\Big\{\| x^0 \|_2 +$$
$$+\int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau \eta^*(\vartheta)H(\vartheta)\eta(\vartheta)\,d\vartheta\right)\eta^*(\tau)a(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau \eta^*(\vartheta)H(\vartheta)\eta(\vartheta)\,d\vartheta\right)\eta^*(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\Big\},$$

dove $\| \ \|_2$ indica la norma euclidea.

Pertanto *affinchè l'oggetto sia controllabile con le condizioni* (α), (γ) *è necessario che esistano* $T > 0$, $u(t)$ *tale che* $B(t)u(t) \in L([0, T])$, *ed* $\eta(t)$, $\eta^*\eta = 1$, *per i quali si ha:*

$$\text{(3)} \qquad \| x^0 \|_2 = -\int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \eta^*(\vartheta)H(\vartheta)\eta(\vartheta)\,d\vartheta\right)\eta^*(\tau)a(\tau)d\tau - $$
$$-\int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \eta^*(\vartheta)H(\vartheta)\eta(\vartheta)d\vartheta\right)\eta^*(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Questa condizione è anche sufficiente se si suppone che η *soddisfi la* (2).

4. Poichè, detti $\lambda(t)$ e $\Lambda(t)$ il minimo ed il massimo autovalore della matrice hermitiana $H(t)$, è

$$\lambda(t) \leq \eta^*(t)H(t)\eta(t) \leq \Lambda(t)$$

e, tenuto conto che è

$$| \eta^*(t)a(t) | \leq \| a(t) \|_2 ,$$

avremo in particolare che *se l'oggetto è controllabile con le condizioni* (α), (γ) *allora esistono* $T > 0$, $u(t)$ *tale che* $B(t)u(t) \in L([0, T])$, *ed* $\eta(t)$, $\eta^*\eta = 1$, *per i quali si ha:*

$$\| x^0 \|_2 \leq \int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)d\vartheta\right) \| a(\tau) \|_2\, d\tau +$$
$$+\int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)d\vartheta\right) | \eta^*(\tau)B(\tau)u(\tau) |\, d\tau.$$

5. Supponiamo ora che $u(t) \in U_\rho^{p,r}(T)$ (1) cioè $u(t)$ sia tale che

$$\| u(t) \|_p = \left(\sum_{i=1}^m | u_i(t) |^p\right)^{\frac{1}{p}} \in L_r([0, T]); \qquad p, r > 1$$

(1) Cfr. R. Conti, *Contributions to linear control theory;* in corso di pubblicazione.

e che

$$\left(\int_0^T \| u(\tau) \|_p^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}} \leq \rho \qquad (\rho > 0) \tag{5}$$

ed inoltre sopponiamo che le componenti $b_{ij}(t)$ di $B(t)$ appartengono ad $L_s([0, T])$ e quindi anche

$$\| B(t) \|_q = \left(\sum_{i,j} | b_{ij} |^q \right)^{\frac{1}{q}} \in L_s([0, T])$$

con $1/p + 1/q = 1$, $1/r + 1/s = 1$. Non escludiamo i casi limiti $p = \infty$, $q = 1$; $r = \infty$, $s = 1$.

Si ha il

TEOREMA I. - *Se l'oggetto è controllabile al tempo T con le condizioni* (α), (γ) *in* $U_\rho^{p,r}(T)$ *allora esiste* $\eta(t)$, $\eta^* \eta = 1$, *per cui*

$$\| x^0 \|_2 \leq \int_0^T \exp\left(- \int_0^\tau \lambda(\vartheta) d\vartheta \right) \| a(\tau) \|_2 d\tau + \tag{6}$$

$$+ \rho \left(\int_0^T \exp\left(- s \int_0^\tau \lambda(\vartheta) d\vartheta \right) \| \eta^*(\tau) B(\tau) \|_q^s d\tau \right)^{\frac{1}{s}} .$$

Infatti è

$$| \eta^*(t) B(t) u(t) | \leq \| \eta^*(t) B(t) \|_q \| u(t) \|_p \tag{7}$$

ed inoltre, per la disuguaglianza di HÖLDER, si ha

$$\int_0^T \exp\left(- \int_0^\tau \lambda(\vartheta) d\vartheta \right) \| \eta^*(\tau) B(\tau) \|_q \| u(\tau) \|_p d\tau \leq \tag{8}$$

$$\leq \left(\int_0^T \exp\left(- s \int_0^\tau \lambda(\vartheta) d\vartheta \right) \| \eta^*(\tau) B(\tau) \|_q^s d\tau \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(\int_0^T \| u(\tau) \|_p^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}}$$

e da (4) tenuto conto di (7), (8) e (5) segue la (6).

6. In particolare dal teorema I seguono

COROLLARIO 1. - *Se l'oggetto è controllabile al tempo T con le condizioni* (α), (γ) *in* $U_\rho^{p,\infty}(T)$ (*e quindi* $s=1$) *allora esiste* $\eta(t)$, $\eta^*\eta=1$, *tale che*

$$\| x^0 \|_2 \leq \int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)\,d\vartheta\right) \| a(\tau) \|_2\, d\tau + \\ + \rho \int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)\,d\vartheta\right) \| \eta^*(\tau)B(\tau) \|_q\, d\tau.$$

COROLLARIO 2. - *Se l'oggetto è controllabile con le condizioni* (α), (γ) *al tempo T in* $U_\rho^{2,2}(T)$ (*e quindi* $q=2$, $s=2$) *allora è*

$$\| x^0 \|_2 \leq \int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)\,d\vartheta\right) \| a(\tau) \|_2\, d\tau + \\ + \rho \left(\int_0^T \exp\left(-2\int_0^\tau \lambda(\vartheta)\,d\vartheta\right) \chi(\tau)\,d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

dove $\chi(t)$ *è il massimo autovalore della matrice simmetrica* $B(t)B^*(t)$.

Infatti essendo

$$\| \eta^*(t)B(t) \|_2^2 = \eta^*(t)B(t)B^*(t)\eta(t) \leq \chi(t)$$

e tenuto conto di (6), segue l'asserto.

7. TEOREMA II. - *Se l'oggetto è controllabile al tempo T con le condizioni* (α), (γ) *in* $U_\rho^{p,r}(T)$ *allora è*

$$\| x^0 \|_2 \leq \int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)\,d\vartheta\right) \| a(\tau) \|_2\, d\tau + \\ + \rho \left(\int_0^T \exp\left(-s\int_0^\tau \lambda(\vartheta)\,d\vartheta\right) \left(\sum_{j=1}^m \| b^j \|_2^q \right)^{\frac{s}{q}} d\tau \right)^{\frac{1}{s}} \tag{9}$$

dove $b^j(t)$ *indica la* j*-esima colonna di* $B(t)$.

Infatti essendo

$$\| \eta^*(t)B(t) \|_q \leq \left(\sum_{j=1}^m \| b^j \|_2^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dal teorema I discende il teorema II.

8. Le precedenti condizioni necessarie di controllabilità si possono leggere come altrettante condizioni sufficienti di non controllabilità che riassumiamo nel seguente teorema III:

L'oggetto è non controllabile con le condizioni (α), (γ) *al tempo* T *in* $U_\rho^{p,r}(T)$ *se si ha*

$$(i)\qquad \| x^0 \|_2 > \int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)d\vartheta\right) \| a(\tau) \|_2 \, d\tau + \\ + \rho\left(\int_0^T \exp\left(-s\int_0^\tau \lambda(\vartheta)d\vartheta\right) \| \eta^*(\tau)B(\tau) \|_q^s \, d\tau\right)^{\frac{1}{s}}$$

per ogni $\eta(t)$, $\eta^*\eta = 1$, *oppure, a maggior ragione, se si ha*

$$(ii)\qquad \| x^0 \|_2 > \int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)d\vartheta\right) \| a(\tau) \|_2 \, d\tau + \\ + \rho\left(\int_0^T \exp\left(-s\int_0^\tau \lambda(\vartheta)d\vartheta\right)\left(\sum_{j=1}^m \| b^j \|_2^q\right)^{\frac{s}{q}} d\tau\right)^{\frac{1}{s}}.$$

In particolare *l'oggetto non è controllabile al tempo* T *con le condizioni* (α), (γ) *in* $U_\rho^{2,\infty}(T)$ *se*

$$(iii)\qquad \| x^0 \|_2 > \int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)d\vartheta\right) \| a(\tau) \|_2 \, d\tau + \\ + \rho\int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)d\vartheta\right) \chi(\tau)d\tau.$$

9. Avendo supposto che $A(t)$, $B(t)$, $a(t)$ abbiano componenti integrabili su ogni intervallo $[0, t]$ (e quindi anche $\lambda(t)$ è integrabile su ogni intervallo $[0, t]$) segue da (*ii*) che dati $\lambda(t)$, $a(t)$, $B(t)$, ρ, s, q si determina una sfera Ω_r di centro O^n e raggio

$$r(T) = \int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(\vartheta)d\vartheta\right) \| a(\tau) \|_2 \, d\tau + \\ + \rho\left(\int_0^T \exp\left(-s\int_0^\tau \lambda(\vartheta)d\vartheta\right)\left(\sum_{j=1}^m \| b^j \|_2^q\right)^{\frac{s}{q}} d\tau\right)^{\frac{1}{s}}$$

per cui se $x^0 \notin \Omega_r$ l'oggetto è non controllabile al tempo T con le condizioni (α), (γ). Notiamo che $r(T)$ è una funzione non decrescente di T, essendo gli integrandi a secondo membro funzioni non negative.

Allora se vale la

$$\lim_{T \to \infty} r(T) = R < \infty \tag{10}$$

dal teorema I.II, *si ha che se* $x^0 \notin \Omega_R$ *l'oggetto è non controllabile per alcun tempo* $T > 0$.

10. Vogliamo determinare Ω_R in un caso particolare.

Esempio. - Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 - \mu x_2 + u_1(t) \\ \dot{x}_2 &= \mu x_1 + \lambda x_2 + u_2(t) \end{aligned} \tag{11}$$

con $\lambda (> 0)$, μ costanti reali; e per $(u_1(t), u_2(t)) \in U_1^{2,\infty}$.

In tal caso è:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad a(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e perciò $\eta^* H \eta = \lambda$ e si ha da (*iii*): $r(T) = \int_0^T \exp(-\lambda\tau) d\tau = [e^{-\lambda T} - 1]/$ $/(-\lambda)$ e quindi $\lim_{T \to \infty} r(T) = 1/\lambda$ e perciò il sistema è non controllabile se $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ è tale che $\sqrt{x_1^{02} + x_2^{02}} > 1/\lambda$.

Adattando al caso $U_1^{2,\infty}$ la tecnica nota per il caso $U_1^{\infty,\infty}$ ([2]) si ottiene che l'oggetto soddisfacente il sistema (11) è controllabile (per qualche $T > 0$) se $\sqrt{x_1^{02} + x_2^{02}} \leq 1/\lambda$, cosicchè in questo caso $1/\lambda$ rappresenta una limitazione *esatta* della regione dei punti (x_1^0, x_2^0) da cui si può raggiungere l'origine (0, 0).

([2]) Cfr. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, «Interscience Publishers», John Wiley & Sons, New York, 1962, 140-172.