Bollettino
Unione Matematica Italiana

Claudio Baiocchi

Sui problemi ai limiti per le equazioni paraboliche del tipo del calore.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.4, p. 407–422.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_4_407_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Sui problemi ai limiti per le equazioni paraboliche del tipo del calore.

Nota di Claudio Baiocchi (a Pavia) (*) (**)

Sunto. - *In questa nota vengono studiati i due problemi ai limiti (del tipo di Dirichlet e del tipo di Neumann) per le equazioni lineari paraboliche del tipo del calore in classi hilbertiane molto generali sia per i dati che per la soluzione, riprendendo e ulteriormente sviluppando un precedente lavoro di J. L. Lions ed E. Magenes* [7] *sullo stesso argomento.*

N. 1. - Posizione del problema e notazioni impiegate.

Sia Ω un aperto limitato dello spazio euclideo a n dimensioni, $\boldsymbol{R}^n$, il cui punto generico sarà indicato con $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Supporrò (cfr. le osservazioni finali per possibili generalizzazioni) Ω di classe C^∞ nel senso che Ω è di classe C^k per ogni intero positivo k (per la definizione di aperto di classe C^k cfr. ad es. Miranda, [9]).

Indico con Γ la frontiera di Ω: Γ sarà una varietà ad $n-1$ dimensioni indefinitamente differenziabile; supporrò la normale a Γ orientata verso l'interno di Ω.

Indico con $I = \{t \in \boldsymbol{R}^1;\ 0 < t < T\}$ l'intervallo aperto $(0, T)$ della retta euclidea $\boldsymbol{R}^1$.

Indicando con $\overline{E}$ la chiusura di un sottoinsieme E di uno spazio euclideo, chiamo Q il cilindro aperto $\Omega \times I$; $\Sigma = \Gamma \times I$ il suo «mantello»; $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times \overline{I}$ sarà il corrispondente cilindro chiuso e $\overline{\Sigma} = \Gamma \times \overline{I}$ il «mantello» di $\overline{Q}$.

Sia $A = A(x, t)$ un operatore in x differenziale lineare del secondo ordine, dipendente da $\{x, t\} \in \overline{Q}$:

$$(1.1) \qquad Au = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t) \cdot u.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività svolta nel gruppo N° 12 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 14 ottobre 1964.

Sull'operatore A farò le seguenti ipotesi:

(1.2) Le funzioni $a_{ij}(x, t)$, $b_i(x, t)$, $c(x, t)$ sono in $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ [1] (cfr. le osservazioni finali per possibili generalizzazioni).

(1.3) Esiste un numero $\beta > 0$ indipendente da $\{x, t\} \in \overline{Q}$ tale che, per ogni

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \boldsymbol{R}^n \text{ si ha: } Re \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\varepsilon_i\varepsilon_j \geq \beta\Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\Big)$$

(1.4) Il coefficiente $c(x, t)$ ha parte reale negativa ed in modulo «sufficientemente grande».

Il motivo delle (1.3). (1.4) è il seguente: voglio che esista un numero $\alpha > 0$, indipendente da $\{x, t\} \in \overline{Q}$, tale che per ogni $u(x) \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ si abbia: $Re\ a(u, u) \geq \alpha \| u \|_{H^1(\Omega)}$ [2] dove $a(u, v)$ è la forma sesquilineare associata ad $A(x, t)$ ed è definita da:

$$(1.5) \qquad a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial(\overline{a_{ij}}(x, t) \cdot v)}{\partial x_j}\right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i(x, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\right)_{L^2(\Omega)} + (c(x, t) \cdot u, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Come è noto la disuguaglianza voluta è automaticamente verificata, se vale la (1.3) e se $c(x, t)$ è del tipo $d(x, t) - \lambda$ con λ costante positiva sufficientemente grande dipendente da Ω e dai coefficienti a_{ij}, b_i, d.

[1] Con notazioni abituali se E è un sottoinsieme aperto di uno spazio euclideo con $\mathfrak{D}(E)$) (risp. $\mathfrak{D}(\overline{E})$) indico lo spazio delle funzioni definite in E (risp. in $\overline{E}$), a supporto compatto contenuto in E (risp. in $\overline{E}$) ed indefinitamente differenziabili.

[2] Lo spazio $H^1(\Omega)$ sarà definito nel prossimo N. 2; con $L^2(E)$ ovvero $H^0(E)$ (E sottoinsieme misurabile di uno spazio euclideo) indico lo spazio delle (classi di) funzioni $f(y)$ definite in E tali che $\int_E |f(y)|^2 dy < +\infty$ con prodotto scalare $(f, g)_{L^2(E)} = \int_E f(y)\overline{g(y)}\,dy.$

Spesso quando ciò non possa dar luogo ad equivoci, $(f, g)_{L^2(E)}$ sarà indicato semplicemente (f, g).

Indico con A^* l'operatore aggiunto formale di A, cioè:

$$A^*v = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\overline{a_{ij}} v) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{b}_i v) + \bar{c}v.$$

Chiamo Λ l'operatore $A - \frac{\partial}{\partial t}$; Λ^* sarà l'aggiunto formale di Λ, cioè $\Lambda^* = A^* + \frac{\partial}{\partial t}$.

Sia $f(x, t) \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$. Pongo $S_1 f = \frac{\partial f}{\partial \nu^*}$ dove con tale notazione indico $\frac{1}{a} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cos(x_j, \nu) \frac{\partial u}{\partial x_i}$; ν è la normale a Γ ed

$$a = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cos(x_j, \nu) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(nel caso di coefficienti reali con $a_{ij} = a_{ji}$ si ha che $\frac{\partial f}{\partial \nu^*}$ rappresenta effettivamente una derivata, la derivata «conormale» di f).

Pongo ancora $S_2 f = f|_\Sigma$ (3); $C_0 f = f(x, 0)$; $C_T f = f(x, T)$; $T_1 f = a \cdot f|_\Sigma$; $T_2 f = a \frac{\partial f}{\partial \nu^*} - bf$ dove $b = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(b_i(x, t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right)$; nel seguito supporrò per comodità $a = 1$; ciò non è restrittivo dovendo essere, per la (1.3), $a > 0$.

Con tali notazioni, se $f(x, t)$ e $g(x, t)$ sono due elementi di $\mathfrak{D}(\overline{Q})$, vale la formula di GREEN (cfr. MIRANDA [9]);

$$(1.6) \qquad (f, \Lambda^* g)_{L^2(Q)} - (\Lambda f \cdot g)_{L^2(Q)} = \int_\Omega C_0 f \cdot C_0 \bar{g} \, dx - \int_\Omega C_T f \cdot C_T \bar{g} \, dx + $$

$$+ \int_\Sigma S_2 f \cdot T_2 \bar{g} \, d\sigma - \int_\Sigma S_1 f \cdot T_1 \bar{g} \, d\sigma$$

dove $d\sigma$ indica l'elemento di superficie su Σ e $dx = dx_1 \cdot dx \ldots dx_n$.

Indico con $\overset{o}{D}_\Lambda$ lo spazio delle funzioni $u(x, t) \in L^2(Q)$ tali

(3) Qui e dovunque nel seguito se f è una funzione definita in E ed E_1 è un sottoinsieme di E, con $f|_{E_1}$ indico la restrizione di f ad E_1.

che $\Lambda u \in L^2(Q)$ [4]. $\overset{0}{D}_\Lambda$ è uno spazio di HILBERT rispetto al prodotto scalare: $(u, v)_{\overset{0}{D}_\Lambda} = (u, v)_{L^2(Q)} + (\Lambda u, \Lambda v)_{L^2(Q)}$.

Ricordo che (cfr. HÖRMANDER, [3]) le (1.2), (1.3), (1.4) implicano:

$$\mathfrak{D}(\overline{Q}) \text{ è denso in } \overset{0}{D}_\Lambda. \tag{1.7}$$

Studierò nei prossimi numeri i problemi (del tipo di DIRICHLET e di NEUMANN rispettivamente):

$$\begin{cases} \Lambda u = f \\ S_2 u = \varphi \\ C_0 u = \psi \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Lambda u = f \\ S_1 u = \chi \\ C_0 u = \psi \end{cases}$$

dove il dato f è assegnato in $L^2(Q)$ e la soluzione u è cercata in $\overset{0}{D}_\Lambda$. Le condizioni ai limiti $S_1 u = \chi$; $S_2 u = \varphi$; $C_0 u = \psi$ sono da intendersi in un senso che verrà specificato più avanti; studierò gli spazi in cui vanno presi i dati φ, χ, ψ per ottenere teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati, ed addirittura di isomorfismo algebrico e topologico, nello spazio $\overset{0}{D}_\Lambda$ per le soluzioni.

N. 2. - **Richiami su alcuni spazi funzionali.**

Richiamo brevemente una delle possibili definizioni equivalenti degli spazi $H^k(\Omega)$; per una dimostrazione delle proprietà citate relative a tali spazi si confronti ad esempio LIONS-MAGENES [5].

Sia k intero > 0. Si indica con $H^k(\Omega)$ lo spazio delle $u \in L^2(\Omega)$ tali che $D^l u \in L^2(\Omega)$ per $|l| \leq k$ [5]; munito del prodotto scalare $(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|l| \leq k} (D^l u, D^l v)_{L^2(\Omega)}$ $H^k(\Omega)$ risulta uno spazio di HILBERT.

(4) Le derivate che compaiono nell'espressione $\Lambda u \in L^2(Q)$ sono (come in generale tutte le derivate che compaiono in seguito) da intendersi nel senso delle distribuzioni su Q (cioè in $\mathfrak{D}'(Q)$; cfr. SCHWARTZ, [11]).

(5) Con notazioni abituali se $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ è una n-upla di numeri interi ≥ 0 $|l|$ indica $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$; $D^l u$ indica $\dfrac{\partial^{|l|} u}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_n^{l_n}}$; $D^{(0,0,\ldots,0)} u = u$.

Detta poi $H_0^k(\Omega)$ l'aderenza di $\mathfrak{D}(\Omega)$ in $H^k(\Omega)$ si definisce $H^{-k}(\Omega) = (H_0^k(\Omega))'$ (6).

Per k intero relativo e ϑ reale compreso tra 0 e 1 si pone infine

$$H^{k+\vartheta}(\Omega) = [H^k(\Omega), \quad H^{k+1}(\Omega)]_\vartheta \text{ (6 bis)}$$

dove $[A, B]_\vartheta$ indicherà d'ora innanzi lo spazio interpolato tra A e B col metodo «complesso» di interpolazione di LIONS [14] e CALDERON [15] (come è noto, cfr. ad es, MAGENES [8], si potrebbero adoperare anche altri metodi di interpolazione).

Analogamente si definiscono gli spazi $H^k(\Gamma)$; dapprima per k intero positivo si pone

$$H^k(\Gamma) = \{ u \in L^2(\Gamma);\ D^l u \in L(\Gamma) \quad \text{per} \quad |l| \leq k \} \quad (7)$$

con prodotto scalare $(u, v)_{H^k(\Gamma)} = \sum_{|l| \leq k} (D^l u, D^l v)_{L^2(\Gamma)}$. Si ha che $\mathfrak{D}(\Gamma)$ è denso in $H^k(\Gamma)$ per ogni intero positivo k e si pone $H^{-k}(\Gamma) = [H^k(\Gamma)]'$.

Infine per ϑ reale compreso tra 0 ed 1 e k intero relativo si pone

$$H^{k+\theta}(\Gamma) = [H^k(\Gamma), \ H^{k+1}(\Gamma)]_\theta .$$

Se K è uno spazio di HILBERT si indica con $L^2(0, T; K)$ lo spazio delle (classi di) funzioni $t \to u(t)$ definite in $(0, T)$, a valori in K, misurabili tali che

$$\int_0^T \| u(t) \|^2_K dt < +\infty ;$$

rispetto al prodotto scalare

$$(u, v)_{L^2(0, T; K)} = \int_0^T (u(t), v(t))_K \, dt$$

$L^2(0, T; K)$ è uno spazio di HILBERT.

(6) Con H' indico lo spazio duale forte dello spazio di HILBERT H.

(6 bis) Per $k + \vartheta \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$; in tal caso si pone

$$H^{-n+\frac{1}{2}}(\Omega) = [H_0^{n-\frac{1}{2}}(\Omega)]' \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

(7) Qui le derivate vanno intese localmente (nell'intorno di ogni punto di Γ) rispetto a parametri locali. Si verifica che la definizione ha senso (cioè le derivate dipendono dalla funzione e da Γ ma non dalla rappresentazione parametrica di Γ) e con una partizione dell'unità si può passare ad una definizione globale.

Ancora per k intero positivo si pone

$$H^k(0, T; K) = \{u \in L^2(0, T; K);\ D^l u \in L^2(0, T; K); \qquad |l| \leq k\} \ (^8)$$

con prodotto scalare

$$(u, v)_{H^k(0, T; K)} = \int_0^T \sum_{|l| \leq k} (D^l u, D^l v)_K \, dt.$$

Infine se ϑ è compreso tra 0 ed 1 e k è intero positivo, e si pone

$$H^{k+\vartheta}(0, T; K) = [H^k(0, T; K);\ H^{k+1}(0, T; K)]_\vartheta .$$

Gli spazi che utilizzerò nel seguito sono:

$$H^{2,1}(Q) = L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \quad (^9)$$

$$\left.\begin{array}{l} H^{\alpha,\beta}(\Sigma) = L^2(0, T; H^\alpha(\Sigma)) \cap H^\beta(0, T; L^2(\Gamma)) \\ H_0^{\alpha,\beta}(\Sigma) = \text{aderenza in } H^{\alpha,\beta}(\Sigma) \text{ di } \mathfrak{D}(\Sigma) \\ H^{-\alpha,-\beta} = [H_0^{\alpha,\beta}(\Sigma)]' \end{array}\right\} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

N. 3. - Teoremi di tracce.

Ricordo il seguente teorema di tracce (cfr. ad es. GRISVARD [2], PAGNI [10], SLOBODESKI [13]):

TEOR. 3.1 - *L'applicazione* $u \to \{C_0 u, C_T u, T_1 u, T_2 u\}$ *definita in* $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ *si prolunga per continuità in una applicazione lineare continua suriettiva di* $H^{2,1}(Q)$, *su*

$$\{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{3/2, 3/4}(\Sigma);\ C_0, C_T\} \times H^{1/2, 1/4}(\Sigma)$$

dove con

$$\{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{3/2, 3/4}(\Sigma),\ C_0, C_T\}$$

(8) Qui le derivazioni sono nel senso delle distribuzioni a valori nello spazio K; cfr. SCHWARTZ [12].

(9) Se H_1, H_2 sono spazi di HILBERT $H_1 \cap H_2 = \{h;\ h \in H_1, h \in H_2\}$ è uno spazio di HILBERT rispetto al prodotto scalare: $(u, v)_{H_1 \cap H_2} = (u, v)_{H_1} + (u, v)_{H_2}$.

indico il sottospazio di

$$H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{3/2,\, 3/4}(\Sigma)$$

formato dalle terne $\{\varphi, \chi, \psi\}$ *tali che*

$$\varphi\,|\,\Gamma = \psi(0);\ \chi\,|\,\Gamma = \psi(T)\ ([10]).$$

Viceversa esiste un «rilevamento» di tale applicazione (nel senso che composto con questa dà l'identità) lineare continuo di

$$\{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{3/2,\, 3/4}(\Sigma);\ C_0,\ C_T\} \times H^{1/2,\, 1/4}(\Sigma)\ \textit{in}\ H^{2,\,1}(Q).$$

Sia ora $u \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$. Per il teorema 3.1 e per la densità di $\mathfrak{D}(\bar{Q})$ in $H^{2,\,1}(Q)$ la (1.6) si prolunga in

$$(3.1)\qquad (u,\ \Lambda^* v) - (\Lambda u,\ v) = \int_\Omega C_0 u C_0 \bar{v}\, dx - \int_\Omega C_T u\, C^1 \bar{v}\, dx + \\ + \int_\Sigma S_2 u\, T_2 \bar{v}\, d\sigma - \int_\Sigma S_1 u\, T_1 \bar{v}\, d\sigma;$$

per ogni u appartenente a $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ e ogni v appartenente a $H^{2,1}(Q)$.

Si osservi ora che, fissata $u \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$, al variare di v in $H^{2,1}(Q)$ (e quindi per il teorema 3.1 di $C_0 v$ in $H^1(\Omega)$) $\int_\Omega C_0 u \cdot C_0 \bar{v}\, dx$ definisce una forma lineare continua su $H^1(\Omega)$; analogamente gli altri addendi del secondo membro della (3.1) definiscono forme lineari continue rispettivamente su $H^1(\Omega)$, $H^{1/2,1/4}(\Sigma)$, $H^{3/2,3/4}(\Sigma)$; quindi, per il teorema 3.1 al variare di v in $H^{2,1}(Q)$ il secondo membro della (3.1) definisce, per ogni u fissata in $\mathfrak{D}(\overline{Q})$, una forma lineare continua, che indicherò τu, sullo spazio $\{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{3,2,3/4}(\Sigma);\ C_0 C_T\} \times H^{1/2,\,1/4}(\Sigma)$ (spazio delle tracce di $H^{2,1}(Q)$); quindi la (3.1) si può scrivere:

$$(3.2)\qquad (u,\ \Lambda^* v) - (\Lambda u,\ v) = \langle \tau u,\ \{C_0 v,\ - C_T v,\ T_2 v,\ - T_1 v\} \rangle$$

([10]) Tali relazioni (che esprimono condizioni di raccordo delle tracce sul mantello e sulle basi) hanno senso in quanto, per un noto teorema di tracce (cfr. ad es. MAGENES [8] per le indicazioni bibliografiche), se $\varphi,\ \chi \in H^1(\Omega)$ e se $\psi \in H^{3/2,\,3/4}(\Sigma)$, $\varphi\,|\,\Gamma$, $\chi\,|\,\Gamma$, $\psi(0)$, $\psi(T)$ hanno senso ed appartengono tutti ad $H^{1/2}(\Gamma)$.

valida per $u \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$ e $v \in H^{2,1}(Q)$ dove il crochet indica la dualità tra

$$[\{ H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{3/2,\,3/4}(\Sigma);\ C_0,\ C_T \} \times H^{1/2,\,1/4}(\Sigma)]'$$

ed

$$\{ H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{3/2,3/4}(\Sigma);\ C_0,\ C_T \} \times H^{1/2,\,1/4}(\Sigma).$$

L'applicazione $u \to \{ C_0 u,\ C_T u,\ S_2 u,\ S_1 u \}$ definita in $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ si può dunque pensare come una applicazione $u \to \tau u$ di $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ in

$$[\{ H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{3/2,\,3/4}(\Sigma);\ C_0,\ C_T \} \times H^{1/2,\,1/4}(\Sigma)]';$$

tale applicazione è ovviamente lineare e, per la (3.2), ed il teorema 3.1, è continua quando si induca su $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ la norma di $\overset{0}{D}_\Lambda$; per la (1.6) tale applicazione può prolungarsi a $\overset{0}{D}_\Lambda$ e si ha così:

TEOR. 3.2. - *L'applicazione $u \to \{ C_0 u,\ C_T u,\ S_2 u,\ S_1 u \}$ definita in $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ si prolunga per continuità in una applicazione lineare continua $u \to \tau u$ di $\overset{0}{D}_\Lambda$ in*

$$[\{ H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{3/2;\,3/4}(\Sigma);\ C_0,\ C_T \} \times H^{1/2,\,1/4}(\Sigma)]';$$

per $u \in \overset{0}{D}_\Lambda$ e $v \in H^{2,1}(Q)$ si ha:

$$(u,\ \Lambda^* v) - (\Lambda u,\ v) = \langle \tau u,\ \{ C_0 v,\ - C_T v,\ T_2 v,\ - T_1 v \} \rangle. \tag{3.3}$$

Si pone ora il problema di «spezzare» le varie componenti di τu. Uno dei modi di procedere è quello seguito da LIONS-MAGENES [7] e consiste nel far variare v, anzichè in tutto $H^{2,1}(Q)$, in degli opportuni sottospazi di $H^{2,1}(Q)$ in modo di prolungare, separatamente o in coppia, alcune delle applicazioni $u \to C_0 u$, $u \to S_1 u$, $u \to S_2 u$.

Più precisamente si fissi nella (3.1) $v \in H^{2,1}(Q)$ con $C_T v = 0$; $T_1 v = 0$. Si avrà allora $C_0 v \in H^1_0(\Omega)$ e $T_2 v \in H^{1/2,\,1/4}(\Sigma)$ e la (3.1) diventa:

$$(u,\ \Lambda^* v) - (\Lambda u,\ v) = \int_\Omega C_0 u C_0 \bar{v}\, dx + \int_\Omega S_2 u T_2 \bar{v}\, d\sigma \tag{3.4}$$

valida per $u \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$ e $v \in H^{2,1}(Q)$ con $C_T v = 0$; $T_1 v = 0$.

Il secondo membro della (3.4) definisce, al variare di v in $H^{2,1}(Q)$ con $C_T v=0$, $T_1 v=0$, una forma lineare su $H_0^1(\Omega)\times H^{1/2,1/4}(\Sigma)$ (spazio immagine mediante C_0 e T_2 dello spazio in cui varia v) cioè un elemento di $H^{-1}(\Omega)\times H^{-1/2,-1/4}(\Sigma)$ (11); si può concludere. analogamente a quanto fatto per il teorema 3.2, che:

l'applicazione $u\to\{C_0u, T_2u\}$ definita in $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ si prolunga in una applicazione lineare continua di D^0_Λ in $H^{-1}\Omega\times H^{-1/2,-1/4}(\Sigma)$.

Si fissi poi $v\in H^{2,1}(Q)$ con $C_T v=0$; $T_2 v=0$, La (3.1) diventa

$$(3.5)\qquad (u,\ \Lambda^* v)-(\Lambda u,\ v)=\int_\Omega C_0 u C_0\bar v\,dx-\int_\Sigma S_1 u T_1\bar v\,dx$$

e il secondo membro, per ogni fissata $u\in\mathfrak{D}(\overline{Q})$, può considerarsi una forma lineare continua su $\{H^1(\Omega)\times H^{3/2,3/4}(\Sigma);\ C_0\}$ (spazio delle tracce delle $v\in H^{2,1}(Q)$ con $C_T v=0$, $T_2 v=0$) dove con $\{H^1(\Omega)\times H^{3/2,3/4}(\Sigma);\ C_0\}$ indico il sottospazio di $H^1(\Omega)\times H^{3/2,3/4}(\Sigma)$ formato dalle coppie $\{\varphi,\ \chi\}$ tali che $\chi(0)=\varphi_{|\Gamma}$; $\chi(T)=0$. Si può concludere che:

l'applicazione $u\to\{C_0u, S_1u\}$ definita in $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ si prolunga in una applicazione lineare continua di D^0_Λ in $[\{H^1(\Omega)\times H^{3/2,3/4}(\Sigma);\ C_0\}]'$.

Si ottengono così i risultati (3) e (4) di Lions-Magenes [7].

Osservazione. - Si osservi che, mentre nell'applicazione che prolunga la (3.4) ha senso considerare due componenti in $H^{-1}(\Omega)$ e in $H^{-1/2,-1/4}(\Sigma)$ che prolungano rispettivamente $u\to C_0u$ e $u\to S_2u$, nell'applicazione che prolunga la (3.5) non si possono considerare separatamente i prolungamenti di C_0 e di S_1.

Uno studio più completo di τu che consideri tutte le sue componenti contemporaneamente si può ottenere studiando lo spazi o

$$[\{H^1(Q)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,3/4}(\Sigma);\ C_0,\ C_T\}\times H^{1/2,1/4}(\Sigma)]'\simeq$$

$$\simeq[\{H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,3/4}(\Sigma);\ C_0,\ C_T\}]'\times H^{-1/2,-1/4}(\Sigma).$$

Essendo $\{H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,3/4}(\Sigma);\ C_0,\ C_T\}$ un sottospazio di

(11) Si dimostra infatti con ragionamenti di tipo usuale (cfr. per ragionamenti analoghi Lions-Magenes [6]) che per $\beta<\frac{1}{2}$ è $H^{\alpha,\beta}(\Sigma)=$ $=H_0^{\alpha,\beta}(\Sigma)$.

$H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,\,3/4}(\Sigma)$ il suo duale sarà uno spazio quoziente del duale di $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,\,3/4}(\Sigma)$.

Poichè si ha $H^1(\Omega)\simeq H_0^1(\Omega)\oplus H^{1/2}(\Gamma)$ ([12]) si ha intanto che $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,\,3/4}(\Sigma)$ è isomorfo allo spazio

$$H_0^1(\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma)\times H_0^1(\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma)\times H_0^{3/2,\,3/4}(\Sigma)\times H^{1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)$$

(indicando con $\{a_i\}_{i=1,\,\dots,\,7}$ gli elementi di quest'ultimo l'isomorfismo $\mathcal{T}$ è dato da: $\mathcal{T}(a_1\oplus a_2,\ a_3\oplus a_4,\ a_5\oplus a_6\oplus a_7)=(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_7)$).

Allora lo spazio duale di $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,\,3/4}(\Gamma)$ è isomorfo allo spazio $H^{-1}(\Omega)\times H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-1}(\Omega)\times H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-3/2,\,-3/4}(\Sigma)\times$ $\times H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-1/2}(\Gamma)$ (indicando con b_i gli elementi di questo ultimo, l'isomorfismo, che è il trasporto del precedente, è dato da $\mathcal{T}^*(b_1\oplus b_2,\ b_3\oplus b_4,\ b_5\oplus b_6\oplus b_7)=(b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_7)$) e la dualità tra $a=(a_1\oplus a_2,\ a_3\oplus a_4,\ a_5\oplus\ a_6\oplus a_7)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,\,3/4}(\Sigma)$ e $b=(b_1\oplus b_2,\ b_3\oplus b_4,\ b_5\oplus b_6\oplus b_7)\in[H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,\,3/4}(\Sigma)]'$ si scriverà $<a,\ b>=\sum_{i=1}^{7}<a_i,\ b_i>$ dove i crochets indicano le ovvie dualità.

Lo spazio $\{H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,\,3/4}(\Sigma);\ C_0 C_T\}$ è isomorfo allo spazio quoziente dello spazio

$$H_0^1(\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma)\times H_0^1(\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma)\times H_0^{3/2,\,3/4}(\Sigma)\times H^{1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)$$

modulo la relazione di equivalenza: $a=(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_7)=0$ se $a_1=a_3=a_5=a_2-a_6=a_4-a_7=0$ e quindi lo spazio duale di $\{H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{3/2,\,3/4}(\Sigma);\ C_0,\ C_T\}$ è isomorfo allo spazio

$$H^{-1}(\Omega)\times H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-1}(\Omega)\times H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-3/2,\,-3/4}(\Sigma)\times H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-1/2}(\Gamma)$$

modulo la relazione di equivalenza $b=(b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_7)=0$ se

([12]) Per il teorema di decomposizione degli spazi di HILBERT si ha che è: $H^1(\Omega)\simeq H_0^1(\Omega)\oplus H$ con H da determinare. Per un noto teorema di minimo sulle funzioni armoniche si ha che la soluzione u_0 del problema:
$\begin{cases}\Delta u - u = 0\\ \gamma u = \varphi\end{cases}$; (dove Δ è l'operatore di LAPLACE, γu è la traccia di u su Γ e φ è assegnata in $H^{1/2}(\Gamma)$)
descrive, al variare di φ, lo spazio H. Poichè c'è isomorfismo tra φ ed u (cfr. ad es. LIONS-MAGENES [5]) si ha la relazione voluta identificando φ ad u. Si hanno inoltre le relazioni $(H^1(\Omega))'\simeq(H_0^1(\Omega))'\oplus(H^{1/2}(\Gamma))'\simeq$ $\simeq H^{-1}(\Omega)\oplus H^{-1/2}(\Gamma)$; $H^{3/2,\,3/4}(\Sigma)\simeq H_0^{3/2,\,3/4}(\Sigma)\oplus H^{1/2}(\Gamma)\oplus H^{1/2}(\Gamma)$. (cfr. anche nota ([10])).

$< a, b > = 0$ per ogni $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_2\ a_4)$, (cioè $b = 0$ se $< a_1, b_1 > + < a_2, b_2 + b_6 > + < a_3, b_3 > + < a_4, b_4 + b_7 > + + < a_5, b_5 > = 0$ vale a dire se $b_1 = b_2 + b_6 = b_3 = b_4 + b_7 = b_5 = 0$).

In definitiva, indicando con $\tau \equiv \{\tau_i\}_{i\,1, 2 \ldots, 6}$ il generico elemento di

$$H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2, -3/4}(\Sigma) \times H^{-1/2, -1/4}(\Sigma)$$

e con $a = \{a_1 \oplus a_2, a_3 \oplus a_4, a_5 \oplus a_2 \oplus a_4, \alpha\}$ il generico elemento di

$$\{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{3/2, 3/4}(\Sigma);\ C_0, C_T\} \times H^{1/2, 1/4}(\Sigma),$$

si ha che tali spazi sono uno il duale dell'altro, e la dualità è espressa da

$$< \tau, a > = \sum_{i=1}^{5} < \tau_i, a_i > + < \tau_6, \alpha > \tag{3.6}$$

dove i crochets indicano le ovvie dualità e le componenti $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_5$ di τ corrispondono rispettivamente alle componenti b_1, $b_2 + b_6$, b_3, $b_4 + b_7$, b_5 dell'elemento b dello spazio quoziente precedentemente introdotto.

Indicando con $p\varphi$ e $\gamma\varphi$ le proiezioni rispettivamente su $H_0^1(\Omega)$ e su $H^{1/2}(\Gamma)$ di un generico elemento $\varphi \in H^1(\Omega)$ e con $p\psi$ la proiezione su $H_0^{3/2, 3/4}(\Sigma)$ di un generico elemento $\psi \in H^{3/2, 3/4}(\Sigma)$ il teorema 3.2 si può allora enunciare:

TEOREMA 3.3. - *L'applicazione $u \to \{C_0 u, C_T u, S_2 u, S_1 u\}$ definita in $\mathfrak{D}(\bar{Q})$ si prolunga in una applicazione lineare continua $u \to \tau u \equiv \{\tau_1 u, \tau_2 u, \ldots, \tau_6 u\}$ di $\overset{0}{D}_\Lambda$ in*

$$H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2, -3/4}(\Sigma) \times \mathrm{H}^{-1/2, -1/4}(\Sigma);$$

per $u \in \overset{0}{D}_\Lambda$ e $v \in \mathrm{H}^{2,1}(Q)$ si ha:

$$\begin{aligned}(u, \Lambda^* v) - (\Lambda u, v) = {} & <\tau_1 u, pC_0 v> + <\tau_2 u, \gamma C_0 v> + \\ & + < \tau_3 u, -pC_T v > + < \tau_4 u, -\gamma C_T v > + \\ & < \tau_5 u, -pT_1 v > + < \tau_6 u, T_2 v >.\end{aligned} \tag{3.7}$$

OSSERVAZIONE. – Il teorema 3.3 è, almeno sotto certi aspetti, più generale dei risultati (3), (4) di LIONS-MAGENES [7] perchè *permette di scrivere una formula di Green, la* (3.7), *valida per generiche* $u \in \overset{0}{D}_\Lambda$ *e* $v \in \mathrm{H}^{2,1}(Q)$; ed i risultati (3), (4) di LIONS-MAGENES [7] danno un'interpretazione solo per alcuni componenti di τu. Ad es. l'applicazione $u \to \tau_1 u$ è il prolungamento dell'applicazione $u \to C_0 u$ definita in $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ dalla (3.4) (cfr. l'osservazione di pag. 9); $u \to \tau_6 u$ è il prolungamento dell'applicazione $u \to S_2 u$ definita in $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ dalla (3.4); $u \to \{\tau_1 u, \tau_2 u, \tau_5 u\}$ è il prolungamento dell'applicazione $u \to \{C_0 u, S_1 u\}$ definita in $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ dalla (3.5).

N. 4. – Teoremi di isomorfismo.

Si dimostra (cfr. GAGLIARDO [1], LIONS [4], SLOBODETSKY [13]) il teorema:

TEOR. 4.1. – *Sia* $X = \{v \in \mathrm{H}^{2,1}(Q);\ C_T v = 0,\ T_1 v = 0\}$. *Per ogni* $f \in \mathrm{L}^2(Q)$ *esiste, unica e dipendente con continuità da* f, $v \in X$ *tale che* $\Lambda^* v = f$.

Per trasposizione si ha allora:

Sia $v \to L(v)$ una forma lineare continua su X. Esiste, unica e dipendente con continuità da L, $u \in L^2(Q)$ $(= [L^2(Q)]')$ tale che:

$$(u, \Lambda^* v) = L(v) \qquad \text{per ogni } v \in X. \tag{4.1}$$

Particolarizzo ora la forma L. Poichè per $v \in X$ è $C_0 v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, $T_2 v \in \mathrm{H}^{1/2,\,1/4}(\Sigma)$, presi ad arbitrio

$$f \in L^2(Q),\ R \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega),\ S \in \mathrm{H}^{-1/2,\,-1/4}(\Sigma)$$

ha senso prendere $L(v) = (f, v) + < T, C_0 v > + < S, T_2 v >$ dove i crochets indicano le ovvie dualità. La (4.1) diventa:

$$(u, \Lambda^* v) = (f, v) + < R, C_0 v > + < S, T_2 v > \qquad \text{per ogni } v \in X. \tag{4.2}$$

In particolare, prendendo nella (4.2) $v \in \mathfrak{D}(Q)$ si ha:

$$< \Lambda u, v >_{\mathfrak{D}'(Q), \mathfrak{D}(Q)} = < u, \Lambda^* v >_{\mathfrak{D}'(Q), \mathfrak{D}(Q)} = \\ + (u, \Lambda^* v) = (f, v) = < f, v >_{\mathfrak{D}'(Q), \mathfrak{D}(Q)}$$

cioè $\Lambda u = f \in L^2(Q)$ quindi è $u \in \overset{0}{D}_\Lambda$. Allora la (3.7), tenuto conto che $v \in X$ si ha $pC_0 v = C_0 v$, $\gamma C_0 v = C_T v = \gamma C_T v = pT_1 v = 0$, diventa $(u, \Lambda^* v) = (f, v) + <\tau_1 u, C_0 v> + <\tau_6 u, T_2 v>$ che, insieme alla (4.2), dà $\tau_1 u = R$; $\tau_6 u = S$ (basta prendere $v \in X$ con $T_2 v = 0$ il che non restringe il campo di variabilità per $C_0 v$). Ho così dimostrato il teorema (già enunciato in LIONS-MAGENES [7], prop. (5)):

TEOREMA 4.2. - $\{\Lambda, \tau_1, \tau_6\}$ *è isomorfismo di* $\overset{0}{D}_\Lambda$ *su*

$$L^2(Q) \times \mathrm{H}^{-1}(\Omega) \times \mathrm{H}^{-1/2,\, -1/4}(\Sigma).$$

OSSERVAZIONE. - Tenendo cento dell'osservazione al teorema 3.3 si ha il teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati del problema del tipo di DIRICHLET formulato in «forma debole» nel seguente modo: $\Lambda u = f$, $\tau_1 u = R$, $\tau_6 u = S$ dove le condizioni $\tau_1 u = R$, $\tau_6 u = S$ generalizzano le condizioni classiche di DIRICHLET nel senso del teorema di tracce del n. 3.

Se infatti R, S ed u sono «abbastanza regolari» le condizioni $\tau_1 u = R$, $\tau_6 u = S$ si esprimono

$$\int_\Omega C_0 u C_0 \bar{v}\, dx - \int_\Sigma S u T_2 \bar{v}\, d\sigma = <R, C_0 v> + <S, T_2 v>;$$

tale relezione, valendo per ogni $v \in X$, dà $C_0 u = R$, $S_2 u = S$.

Analogamente, partendo dal teorema (cfr. sempre [4], [13]):

TEOR. 4.3. - *Sia* $Y = \{v \in H^{2,1}(Q);\ C_T v = T_2 v = 0\}$. *Per ogni* $f \in L^2(Q)$ *esiste, unica e dipendente con continuità da* f, $v \in Y$ *tale che* $\Lambda^* v = f$.

Si ottiene per trasposizione che, se $v \to L(v)$ è una forma lineare continua su Y, esiste, unica e dipendente con continuità da L, una $u \in L^2(Q)$ tale che si abbia:

$$(u, \Lambda^* v) = L(v) \qquad \text{per ogni } v \in Y. \tag{4.3}$$

Per $v \in Y$ è $\{C_0 v, T_1 v\} \in \{\mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^{3/2,\, 3/4}(\Sigma);\ C_0\}$ cioè si ha $\{pC_0 v, \gamma T_1 v\} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}^{1/2}(\Omega) \times \mathrm{H}_0^{3/2,\, 3/4}(\Sigma)$; quindi ha senso prendere $L(v) = (f, v) + <R, pC_0 v> + <S, \gamma C_0 v> + <T, -pT_1 v>$ dove $f \in L^2(Q)$, $R \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, $S \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$, $T \in \mathrm{H}^{-3/2,\, -3/4}(\Sigma)$. La (4.3) diventa:

$$(u, \Lambda^* v) = (f, v) + <R, pC_0 v> + \\ <S, \gamma C_0 v> + <T, -pT_1 v> \tag{4.4}$$

che, scegliendo $v \in \mathfrak{D}(Q)$, dà

$$< \Lambda u, v >_{\mathfrak{D}'(Q), \mathfrak{D}(Q)} = < u, \Lambda^* v >_{\mathfrak{D}'(Q), \mathfrak{D}(Q)} =$$

$$= (u, \Lambda^* v) = (f, v) = < f, v >_{\mathfrak{D}'(Q), \mathfrak{D}(Q)}$$

cioè $\Lambda u = f \in L^2(Q)$ e quindi $u \in D_\Lambda^0$. Confrontando allora la (4.4) con la (3.7), tenuto conto che, per $v \in Y$ è $pC_T v = \gamma C_T v = T_2 v = 0$, si ottiene

$$< R - \tau_1 u, pC_0 v > + < S - \tau_2 u, \gamma C_0 v > + < T - \tau_5 u, -pT_1 v > = 0$$

ed anche qui si conclude, potendo $pC_0 v$, $\gamma C_0 v$, $pT_1 v$ indipendentemente uno dall'altro, che è $\tau_1 u = R$, $\tau_2 u = S$, $\tau_6 u = T$.

Si è quindi ottenuto il teorema (che completa e precisa la prop. (6) di LIONS-MAGENES [7]):

TEOR. 4.4. - $\{\Lambda, \tau_1, \tau_2, \tau_5\}$ *è un isomorfismo di* D_Λ^0 *su*

$$L^2(Q) \times \mathrm{H}^{-1}(\Omega) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{-3/2, -3/4}(\Sigma).$$

OSSERVAZIONE. - Analogamente alla osservazione al teorema 4.2, si può interpretare il 4.4 come un teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati per il problema del tipo di NEUMANN formulato in «forma debole» nel seguente modo: $\Lambda u = f$, $\tau_1 u = R$, $\tau_2 u = S$, $\tau_5 u = T$ generalizzano le condizioni classiche di NEUMANN nel senso del teorema di tracce del N. 4; se infatti R, S, T ed u sono «sufficientemente regolari» le condizioni $\tau_1 u = R$; $\tau_2 u = S$; $\tau_5 u = T$ si esprimono:

$$\int_\Omega C_0 u C_0 \bar{v}\, dx + \int_\Sigma S_1 u T_1 \bar{v}\, d\sigma = \int_\Omega (R \oplus S) C_0 v\, dy + \int_\Sigma (S \oplus T) T_1 \bar{v}\, d\sigma$$

che, valendo per ogni $v \in Y$, dà

$$C_0 u = R \oplus S; \quad S_1 u = S \oplus T,$$

N. 5. - Osservazioni finali.

Le ipotesi fatte su Ω e su $A(x, t)$ nel N° 1 sono sovrabbondanti; in effetti tutti i ragionamenti sono basati sostanzialmente sulle seguenti ipotesi:

Sia Ω un aperto di $\boldsymbol{R}^n$ ed $A(x, t)$ un operatore differenziale lineare di ordine $2m$ (con m intero > 0 e non necessariamente $m = 1$) tali che valgano le seguenti proprietà:

1) Indicando con A^* l'«aggiunto formale» di A e con Λ, Λ^* rispettivamente $A - \frac{\partial}{\partial t}$; $A^* + \frac{\partial}{\partial t}$, vale la formula di GREEN:

$$(u, \Lambda^* v) - (\Lambda u, v) = \int_\Omega C_0 u C_0 \bar{v}\, dx - \int_\Omega C_T u C_T \bar{v}\, dx + \sum_{i=1}^{2m} \int_\Sigma S_i u T_i \bar{v}\, d\sigma$$

per u, v «sufficientemente regolari» dove S_i, (risp. T_i) sono operatori differenziali lineari di frontiera di ordine $2m-i$ (risp. $i-1$) $(i = 1, 2, \ldots, 2m)$.

2) Vale in $H^{2m,1}(Q) = H^0(0, T; H^{2m}(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^0(\Omega))$ un teorema di tracce del tipo: $u \to \{C_0 u, C_T u, T_1 u, T_2 u \ldots T_{2m} u\}$ è continua surgettiva da $H^{2m,1}(Q)$ su:

$$\{H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \times \prod_{i=0}^{m-1} H^{2m-\frac{1}{2}-i, \frac{2m-\frac{1}{2}-i}{2m}}(\Sigma);\ C_0, C_T\} \times$$

$$\times \prod_{i=m}^{2m-1} H^{2m-\frac{1}{2}-i, \frac{2m-\frac{1}{2}-i}{2m}}(\Sigma)$$

dove con

$$\{H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \times \prod_{i=0}^{m-1} H^{2m-\frac{1}{2}-i, \frac{2m-\frac{1}{2}-i}{2m}}(\Sigma);\ C_0, C_T\}$$

indico il sottospazio di

$$H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \times \prod_{i=0}^{m-1} H^{2m-\frac{1}{2}-i, \frac{2m-\frac{1}{2}-i}{2m}}(\Sigma)$$

formato dalle $(m+2)$-uple $\{\varphi, \chi, \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}\}$ tali che:

$$\varphi|_\Gamma = \psi_0(0);\ \chi|_\Gamma = \psi_0(T);\ \frac{\partial^i \varphi}{\partial \nu^i} = \psi_i(0);\ \frac{\partial^i \chi}{\partial \nu^i} = \psi_i(T).$$

3) L'insieme delle funzioni «sufficientemente regolari» per le quali posso scrivere la formula di GREEN è denso in D^0_Λ.

4) Se $\mathfrak{I}$ è un insieme di m indici distinti in $(1, 2 \ldots 2m)$ e se $X = \{v \in H^{2m,1}(Q)$ con $C_T v = 0;\ T_i v = 0\ \ i \in \mathfrak{I}\}$ vale il teorema $\Lambda^*: X \to L^2(Q)$ è un isomorfismo surgettivo.

Tutti i teoremi enunciati possono generalizzarsi e continuano a valere con dimostrazioni analoghe; lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili in $\overline{Q}$ verrà sostituito dallo spazio delle funzioni «sufficientemente regolari» per cui è valida la formula di GREEN e per concludere dalla (4.2) (o dalla ((4.4)) che $\Lambda u = f$ si prenderà v, invece che in $\mathfrak{D}(Q)$, nello spazio delle funzioni «sufficientemente regolari» a supporto compatto in Q.

Ed è noto (cfr. ad es. i lavori citati di GAGLIARDO [1], LIONS [4] e SLOBODETSKI [13]) che si conoscono delle condizioni sufficienti abbastanza generali su Ω e su A che assicurano la validità delle 1); 2), 3), 4).

BIBLIOGRAFIA

[1] E. GAGLIARDO, *Problema al contorno per le equazioni differenziali lineari di tipo parabolico in m variabili,* Ric. Mat. 5.

[2] P. GRISVARD, In corso di stampa.

[3] L. HORMANDER, *Definition of maximal differential operators,* Ark. Math. 3 - 1958 - p. 560 - 504.

[4] J. L LIONS, *Equations différentielles opérationnelles,* Grundleheren der Math. Wiss. - Band. 111.

[5] J. L LIONS - E. MAGENES, *Problemi ai limiti non omogenei,* III - Ann. Sc· Norm. Sup. Pisa 15-1961 p. 39-101.

[6] — —, *Problemi ai limiti non omogenei,* IV Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 15.1961 p. 311-326.

[7] — —, *Remarques sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques,* C. R Acad. Sci Paris 251-1960 p. 2119-2120.

[8] E. MAGENES, *Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali,* Conferenza tenuta al VII Congresso U.M.I., Genova 1963.

[9] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico,* Ergebnisse der Mathematik N.F. Heft 2.

[10] M. PAGNI, In corso di stampa su Rend Sem. Mat. Modena.

[11] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions;* 5 e II-Hermann - Paris 1950-1951.

[12] — –, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*; I e II; Annales de l'Institut Fourier: 7-1958 p. 1-141; 8-1958 p. 1-209.

[13] L. N. SLOBODETSKY, (in russo) Doklady Akad Nauk 118.

[14] J.L. LIONS, *Une construction d'espaces d'interpolation,* C. R. Acad. Sci Paris, t. 249 (1959), pag. 2159-2261.

[15] A. P. CALDERON, *Intermediate spaces and interpolation,* Studia Mathematica. Serie speciale per il Colloquio di Varsavia, I° (1963) 33-49.