BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROBERTO MAGARI

Sui sistemi di assiomi "minimali" per una data teoria.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.4, p. 423–435.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_4_423_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

Sui sistemi di assiomi « minimali » per una data teoria

Nota di Roberto Magari (Firenze) (*) (**)

Sunto. - *Si introduce una relazione di preordine fra i sistemi di assiomi per una data teoria T, in modo da dare un'interpretazione rigorosa della locuzione: « il sistema S è più debole del sistema S' » e si determinano poi, con metodi algebrici, i sistemi di assiomi « minimali » per T. In termini algebrici: si studia una relazione di preordine definita fra i sistemi di generatori di un dato filtro in un'algebra di Boole.*

1. - Premessa.

In matematica si presenta spesso la necessità di dare un sistema di assiomi per una data teoria non contraddittoria T, vale a dire un insieme di proposizioni di T da cui siano deducibili tutte e sole le proposizioni di T.

Oltre al classico requisito di indipendenza (1), si cerca di solito di soddisfare, nella scelta degli assiomi, ad altri requisiti non sempre facili da esplicitare.

Fra i criteri di scelta più interessanti è quello che porta a scegliere fra due sistemi di assiomi S e S' per una data teoria T il più « debole ». Non si deve ovviamente intendere la locuzione « S è più debole di S' » nel senso che S permetta di dedurre meno di S', dato che, per ipotesi, ambedue permettono di dedurre tutte e sole le proposizioni di T.

A prima vista si sarebbe tentati di asserire che se S ed S' sono ambedue sistemi di assiomi indipendenti per T allora nè S è, in senso stretto, più debole (nel senso consueto di questa locuzione) di S' nè viceversa, il che ricondurrebbe il problema di determinare, per una data teoria, un sistema di assiomi che non possa ulteriormente essere « indebolito » al problema classico, già ricordato, della ricerca di sistemi di assiomi indipendenti. È facile però convincersi che questo punto di vista non tien conto com-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C. N. R., per l'anno 1964-1965.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 15 ottobre 1964.

(1) Non parlo del requisito di non contraddittorietà visto che, per ipotesi, T è non contraddittoria.

pletamente dell'uso comune del concetto e che questo ha implicazioni più sottili.

Per illustrare la questione sarà opportuno partire da un esempio.

È noto che nel calcolo dei predicati del primo ordine con identità ([2]) si può costruire la teoria del primo ordine ([3]) dei piani grafici mediante le seguenti assunzioni (assiomi della teoria): ([4])

S_1: *Quali che siano x, y, se Px e Py e $x \neq y$ allora esiste uno e un sol r tale che Lr e Ixr e Iyr.*

S_2: *Quali che siano r, s, se Lr e Ls e $r \neq s$ allora esiste uno e un sol x tale che Px e Ixr e Ixs.*

$S = \{S_1, S_2\}$ risulta un sistema di assiomi *indipendenti* per la teoria.

D'altra parte è noto che costituisce un sistema di assiomi *indipendenti* per la teoria anche il sistema $S' = \{S_1, S'_2\}$ dove S'_2 è l'espressione:

S'_2: *Quali che siano r e s, se Lr e Ls e $r \neq s$ allora esiste* ***almeno*** *un x tale che Px e Ixr e Ixs.*

Il fatto che S_2 implichi S'_2 (più precisamente che « $S_2 \rightarrow S'_2$ » sia una tesi del calcolo) ma non viceversa ([5]) ci porterà ora a dire che S' è più debole di S (ma non viceversa) nonostante che si tratti di due sistemi di assiomi indipendenti per la stessa teoria.

Più in generale, sia S un sistema di assiomi per una teoria T costituito da certe proposizioni $p_1, p_2, \dots, p_n$ e S' sia un altro sistema di assiomi per T costituito dalle $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n \wedge q$, essendo q una proposizione di T distinta dalle p_i; può accadere che ambedue i sistemi soddisfino al requisito di indipendenza,

([2]) Per tutti i riferimenti alla logica ved. E. CASARI [1].

([3]) Cfr. HENKIN [5].

([4]) « I » indica un predicato binario, « P », « L » predicati unari. Si interpreti intuitivamente Px come « x è un punto », Lr come « r è una retta », Ixr come « x è incidente a r ». Per chiarezza queste espressioni vengono presentate in forma non simbolica, anche se aderente alla forma simbolica. Il discorso si riferisce tuttavia a certe espressioni formali.

([5]) Ovviamente sia « $S_2 \rightarrow S'_2$ » che « $S'_2 \rightarrow S_2$ » sono invece tesi della teoria. Per la comprensione dell'argomento questa distinzione deve essere tenuta ben presente. È necessario anche distinguere fra il sistema di assiomi $\{p, q\}$ e il sistema $\{p \wedge q\}$. (« $\wedge$ » indica qui e nel seguito la congiunzione logica).

tuttavia il senso comune matematico sarà portato a classificare S come « più debole » di S' (e, in generale, non viceversa).

Si può concludere, mi pare, che il concetto di « più debole » non è banalmente riconducibile a concetti noti dell'assiomatica. È opportuna quindi una ricerca di carattere metamatematico che dovrà concludersi con la proposta di un preciso criterio in base al quale decidere se un dato sistema di assiomi S è o no più debole di un altro. Presumibilmente la precisazione di questo carattere dovrà permettere di introdurre un ordine fra i possibili sistemi di assiomi per una data teoria.

In questa ricerca affronto precisamente i seguenti due problemi:

1° – *Formulazione metamatematica di una relazione « più debole , che risulti il più possibile aderente alla nozione ordinariamente usata (ma non rigorosamente definita) dai matematici nell'assiomatizzazione delle teorie.*

2° – *Studio delle conseguenze della formulazione proposta e in particolare ricerca degli eventuali elementi minimali per la relazione « più debole » (che risulterà, sotto certe condizioni, di ordine parziale).*

L'interesse di quest'ultimo problema sta nel fatto che gli eventuali elementi minimali di cui sopra costituiranno altrettanti sistemi di assiomi ottimali per quanto riguarda il requisito che ho cercato di indicare (requisito che, come si vedrà, implica in particolare quello di indipendenza). Risulterà che, se T ammette una assiomatizzazione finita, allora esistono sistemi finiti di assiomi per T tali che ogni sistema di assiomi che sia più debole di uno di essi è costituito da un maggior numero di assiomi (quindi ottimali se non si vogliono ottenere indebolimenti a spese di un aumento illimitato del numero di assiomi) Inoltre, dato un sistema finito di assiomi per T che non sia del tipo indicato, esiste un suo indebolimento S' del tipo indicato.

Il n. 2 è dedicato al problema 1° e i nn. 3 e 4 al problema 2° che viene ricondotto a un problema puramente algebrico. Infine il n. 5 viene dedicato ad alcune osservazioni complementari.

2. – Per affrontare il problema 1° mi riferisco al seguente schema:

sia L un calcolo logico introdotto al solito modo, ossia mediante l'elencazione dei suoi segni primitivi (in particolare dei connettivi logico-proposiziouali « $\overline{}$ », « $\vee$ ». « $\wedge$ ». « · », « $\leftrightarrow$ », da interpretare intuitivamente come « non », « o », « e », « implica »,

« equivale »), le regole di formazione dei suoi « segni » e delle sue « espressioni », i suoi assiomi e schemi di assiomi e le sue regole di deduzione. Sia poi T una teoria formulata in L mediante opportune assunzioni (cioè mediante un sistema di assiomi per T nel senso fin qui usato).

In generale le assunzioni conterranno certe variabili libere (corrispondenti a quelli che si chiamano ordinariamente « concetti primitivi ») e queste non potranno essere sostituite nel corso di una dimostrazione di una tesi di T. Se L' è l'insieme delle espressioni di L che non contengono altre variabili libere oltre, eventualmente, quelle di una certa classe di variabili che si conviene di non poter sostituire nel corso di una dimostrazione, è facile vedere che non costituisce una limitazione per il nostro problema la considerazione delle sole espressioni di L'.

Per semplificare l'esposizione è opportuno premettere la seguente:

def. 1 – *Due insiemi di espressioni S, S' di L' (in particolare due sistemi di assiomi per T) saranno detti congruenti ($S \equiv S'$) se e solo se esiste una zioneapplica biunivoca λ di S su S' tale che, per ogni $p \in S$ sia $\vdash p \longleftrightarrow \lambda p$ (si legga: $p \longleftrightarrow \lambda p$ è una tesi di L).*

Propongo ora di condizionare la scelta della definizione di « più debole » mediante le seguenti proprietà, che mi sembrano inferibili dall'uso comune della locuzione:

(°) *Se S_1, S_2, S'_1, S'_2 sono sistemi di assiomi per T e si ha:*

$S_1 \equiv S'_1$,

$S_2 \equiv S'_2$

S_1 *più debole di* S_2,

allora è: S'_1 *più debole di* S'_2.

(°°) *« più debole » è una relazione di preordine parziale (ossia riflessiva e transitiva) sull'insieme dei sistemi di assiomi per T.*

Sia ora R_1 la relazione fra sistemi di assiomi per T definita da:

def. 2 – *SR_1S' se e solo se esiste una applicazione biunivoca φ di S in S' tale che per ogni $p \in S$ si abbia:*

$\vdash \varphi p \rightarrow p$.

Dagli esempi dati e da altri simili non difficili a costruire mi sembra chiaro che se SR_1S' (S, S' sistemi di assiomi per T) allora S deve essere considerato « più debole » di S' (strettamente o no). Non è però chiaro se la R_1 debba considerarsi una definizione adeguata di «più debole» o se l'uso comune porti a considerare in certi casi un sistema S più debole di un sistema S' senza che sia SR_1S'. Il seguente esempio mi sembra indicare come più accettabile la seconda possibilità.

Sia $S = \{p, q\}$, $S' = \{p', q'\}$ e sia $\vdash p' \to p$, $\vdash p' \to q$. Non sarà in generale SR_1S', mentre mi sembra plausibile assumere S più debole di S' (si noti che in questo caso S' non è un sistema di assiomi indipendenti). D'altra parte nell'esempio ora citato è SR_2S' dove R_2 è definita da:

def. 3 - *SR_2S' se e solo se esiste una applicazione φ di S in S' tale che per ogni $p \in S$ si abbia:*

$\vdash \varphi p \to p.$

La R_2 porta tuttavia, se accettata come definizione adeguata di «più debole» a un apparente paradosso. Cercherò di spiegarlo con un nuovo esempio.

Sia $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ $(n > 1)$ un sistema di assiomi indipendenti per T, supposta finitamente assiomatizzabile, e sia $S' = \{p_1 \wedge \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n\}$. Qualunque sia la definizione che vogliamo dare di «più debole» purchè soddisfi alla (^{oo}) si avrà per questi due sistemi di assiomi una delle seguenti possibilità: (6)

(α) SRS' (ma non $S'RS$),

(β) S equivalente ad S' nel senso che SRS' e $S'RS$,

(γ) $S'RS$ (ma non SRS')

(δ) S e S' sono inconfrontabili

(R = «più debole»).

Ora è chiaro che si dovrà cercare di definire la R in modo da evitare le possibilità (β) e (γ). Se infatti si verificasse la (β) tutti i sistemi finiti di assiomi per T risulterebbero equivalenti (nel senso indicato) e se si verificasse la (γ) il sistema costituito da un solo assioma, facilmente ottenibile da un qualunque sistema finito dato congiungendone gli assiomi, risulterebbe ottimale per il requisito in esame.

Può apparire paradossale anche una definizione che porti alla (α) (ed è il caso della R_2) perchè secondo una simile definizione

(6) Mi sembra che si debba assumere che la relazione «più debole» sia tale che si verifichi sempre la stessa fra le possibilità elencate, qualunque sia la coppia S, S' del tipo indicato.

un dato sistema di assiomi può essere indebolito considerando ad esempio un suo assioma come congiunzione di più espressioni ed assumendo queste espressioni, insieme agli altri assiomi del sistema dato, come assiomi distinti per un nuovo sistema. (Questa possibilità ha dei limiti che saranno precisati in seguito). In vista di questa circostanza mi pare opportuna la considerazione di una terza relazione così definita:

def. 4 – *SR_3S' se e solo se SR_2S' e inoltre il numero degli assiomi di S non supera il numero degli assiomi di S'.*

Mentre le considerazioni svolte (e altre che non è il caso di elencare) rendono a mio parere plausibile che una adeguata definizione di « più debole » si ottenga identificandola con la R_2 o con la R_3 mi sembra che il concetto sia abbastanza vago da rendere difficile o addirittura insensata una scelta fra queste due possibilità. Nel seguito studierò quindi ambedue le relazioni.

Tuttavia per comodità parlando di « più debole », « indebolimento » etc., mi riferirò alla R_2. È facile vedere che sia la R_2 che la R_3 soddisfano alle condizioni (°) e (°°).

Prima di procedere a uno studio del problema 2° è opportuno applicare un noto procedimento, dovuto a LINDENBAUM e a TARSKI (ved. ad esempio [3]) che permette di trasformarlo in un problema algebrico.

Sia ρ la relazione di equivalenza su L' per cui:

$$p \rho q \text{ se e solo se } \vdash p \longleftrightarrow q \qquad (p, q \in L').$$

La ρ risulta sostitutiva rispetto ai connettivi « $\neg$ », « $\vee$ », « $\wedge$ », cosicchè si possono definire in L'/ρ delle operazioni ponendo:

$$[p] + [q] = [p \vee q]$$

$$[p] \cdot [q] = [p \wedge q]$$ ([p], [q] etc. indicano le classi di equivalenza contenenti p, q etc.)

$$-[p] = [\neg p].$$

Posto ancora:

$$0 = [\neg p]$$

$$1 = [p]$$

dove p indica ora una qualunque tesi di L', è facile vedere che:

$A = (L'/\rho, +, \cdot, -, 0, 1)$ è un' algebra di BOOLE

$[p] \leq [q]$ se e solo se $\vdash p \rightarrow q$. (dove « $\leq$ » è la relazione definita in A da: $p \leq q$ se e solo se $p \cdot q = p$)

l'immagine dell'insieme delle tesi di T nell'applicazione canonica σ di L' su L'/ρ è un filtro F di A,

i sistemi di assiomi per T hanno per immagine in σ i sistemi di generatori di F (7) e viceversa e in particolare i sistemi di assiomi indipendenti hanno per immagine sistemi di generatori indipendenti.

Dato che R_2 e R_3 soddisfano la (°) il problema 2° risulta completamente traducibile in un problema algebrico relativo ad A. Per chiarezza il problema sarà riformulato in termini algebrici (la R_2 e la R_3 si traducono nelle relazioni di cui nelle deff. 6 e 7) e gli eventuali riferimenti alle considerazioni metamatematiche fin qui svolte risulteranno inessenziali per la deduzione dei risultati. Tralascerò anzi di interpretare in termini metamatematici alcuni risultati algebrici sufficientemente trasparenti.

3. - Sia $A = (\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0, 1)$ (8) un'algebra di Boole e F un suo filtro che supporrò, salvo diversa indicazione, proprio e distinto da $\{1\}$. Indicherò con $\mathcal{G}$ l'insieme dei sistemi di generatori di F, con $\widehat{\mathcal{G}}$ l'insieme dei sistemi di generatori indipendenti, con $\mathcal{G}_\alpha$ (essendo α un numero cardinale) l'insieme degli elementi di $\mathcal{G}$ aventi cardinalità α (o, come dirò, di ordine α) e infine con $\widehat{\mathcal{G}}_\alpha$ l'insieme $\widehat{\mathcal{G}} \cap \mathcal{G}_\alpha$.

Sia ora $\preccurlyeq$ la relazione binaria definita in $\mathcal{G}$ dalle:

def. 5 - *Se $H, K \in \mathcal{G}$ e φ è un'applicazione di H in K, la φ si dirà implicativa se e solo se:*

(1) $\varphi p \leq p$, per ogni $p \in H$. (9).

def. 6 - *$H \preccurlyeq K$ se e solo se esiste una applicazione implicativa di H in K* (H, $K \in \mathcal{G}$).

(7) Un sottoinsieme H di F sarà detto un sistema di generatori di F se l'intersezione dei filtri di A contenenti H coincide con F; sarà detto poi un sistema di generatori indipendenti, se nessun suo sottoinsieme proprio è un sistema di generatori. È facile vedere che se H è un sistema di generatori di F allora ogni elemento di F è della forma $\overset{n}{\underset{1}{\overline{|i|}}}\, p_i + q$ con $p_i \in H$, $q \in A$; in altri termini gli elementi di F sono tutti e soli quelli che risultano maggiori o uguali di almeno una intersezione finita di elementi di H.

(8) In questa scrittura $\mathcal{A}$ rappresenta un insieme, 0,1 elementi di $\mathcal{A}$; $+$, $\cdot$, operazioni binarie su $\mathcal{A}$, $-$ un'operazione unaria su $\mathcal{A}$. Per le proprietà che caratterizzano le algebre di Boole ved. ad esempio Sikorski [4]. Nel seguito userò il simbolo A anche per indicare l'insieme $\mathcal{A}$.

(9) Si ricordi la connessione fra « $\leq$ » e « $\rightarrow$ ».

Si ha subito:

LEMMA 1 – *La $\preccurlyeq$ è una relazione di preordine parziale (ossia riflessiva e transitiva) in $\mathfrak{G}$.*

dim. ovvia

TEOR. 1 – *La restrizione della $\preccurlyeq$ a $\widehat{\mathfrak{G}}$ è una relazione di ordine parziale.*

dim. Tenuto presente il lemma 1 basterà dimostrare che:

(2) se $H \preccurlyeq K$ e $K \preccurlyeq H$ allora $H = K$ (quali che siano $H, K \in \widehat{\mathfrak{G}}$).

Siano dunque $H, K \in \widehat{\mathfrak{G}}$ con $H \preccurlyeq K$ e $K \preccurlyeq H$ e siano:

φ una applicazione implicativa di H in K,

ψ una applicazione implicativa di K in H.

La $\sigma = \psi\varphi$ risulta essere una applicazione implicativa di H in sè. Se la σ non fosse identica, se cioè esistesse almeno un $p \in H$ per cui $\sigma p \neq p$, per un tal p si avrebbe addirittura $\sigma p < p$, onde $H - \{p\}$ sarebbe ancora un sistema di generatori di F, contro l'ipotesi che H sia un sistema di generatori *indipendenti* di F. La σ è dunque identica, ma allora, qualunque sia $p \in H$, si ha:

$p = \sigma p = \psi\varphi p \leq \varphi p \leq p$, da cui $p = \varphi p$ e quindi $H \subseteq K$. Analogamente si trova $K \subseteq H$ e quindi $H = K$.

LEMMA 2 - *Se $H \in \mathfrak{G}$, $K \in \widehat{\mathfrak{G}}$ allora ogni (eventuale) applicazione implicativa di H in K è suriettiva.*

dim. Sia per assurdo φ una applicazione implicativa di H in K non suriettiva. $\varphi(H) \subset K$ risulterebbe allora un sistema di generatori di F, contro l'ipotesi che sia $K \in \widehat{\mathfrak{G}}$.

4. – Le considerazioni svolte nella premessa e nel n. 2 porterebbero ora alla ricerca di eventuali elementi minimali di $(\widehat{\mathfrak{G}}, \preccurlyeq)$. È però facile vedere che:

TEOR. 2 – *Se H è un elemento minimale di $(\widehat{\mathfrak{G}}, \preccurlyeq)$ allora ogni $p \in H$ è il complementare di un atomo di A. In particolare se A è priva di atomi, $(\widehat{\mathfrak{G}}, \preccurlyeq)$ è privo di elementi minimali.*

dim. Sia H minimale in $(\widehat{\mathfrak{G}}, \preccurlyeq)$, $p \in H$ e, per assurdo, $-p$ non sia un atomo.

Esiste allora almeno un $q \in A$, $q \neq 0$ e $q < -p$ e, posto $r = (-p) \cdot (-q)$ si ha:

(3) $q + r = -p$, ossia:

(4) $(-q) \cdot (-r) = p$ e inoltre:

(5) $p < -q$, $p < -r$.

Sia ora H' l'insieme che ha per elementi gli elementi di H diversi da p e inoltre gli elementi $-q$ e $-r$ e sia φ l'applicazione di H' in H che è identica sugli elementi di $H' \cap H$ e porta $-q$ e $-r$ in p. Dalla (4) segue che $H' \in \mathfrak{G}$ (si può supporre anzi, salvo a considerare in luogo di H' un suo opportuno sottoinsieme, che sia $H' \in \widehat{\mathfrak{G}}$) e dalle (5) segue che la φ è implicativa onde, tenuto conto del teor. 1, $H' < H$ e H non è minimale, contro l'ipotesi.

D'altra parte quando A è un'algebra di BOOLE ottenuta a partire da un calcolo logico come nella premessa essa è in generale libera infinita e (quindi) priva di atomi cosicchè proprio nel caso che ci interessa $(\widehat{\mathfrak{G}}, \preccurlyeq)$ è privo di elementi minimali. Il risultato appare tuttavia meno sconcertante se si osserva che dalla dimostrazione del teorema 2 risulta che H' ha, quando H è finito, un numero di elementi in generale maggiore. Ora è chiaro che hanno in generale scarso interesse gli indebolimenti di un sistema di assiomi ottenuti aumentando il numero degli assiomi. Più che gli elementi minimali di $(\widehat{\mathfrak{G}}, \preccurlyeq)$ interessano quindi gli elementi minimali di $(\mathfrak{G}, R)$ dove R è la relazione definita in $\mathfrak{G}$ da:

def. 7 - *HRK se e solo se $H \preccurlyeq K$ e l'ordine di H non supera l'ordine di K.*

Ovviamente la restrizione della R a $\widehat{\mathfrak{G}}$ è ancora una relazione di ordine parziale.

Sia ora S l'insieme dei filtri massimali di A, (insieme « duale » di A) λ l'isomorfismo (di STONE) di A nell'algebra di BOOLE $\mathfrak{B}(S)$ di tutti i sottoinsiemi di S (« algebra di BOOLE » rispetto alle operazioni insiemistiche) che ad ogni $p \in A$ associa l'insieme λp dei filtri massimali a cui p appartiene, e infine si ponga $\bar{A} = \lambda(A)$, $\bar{F} = \lambda(F)$.

Sia ancora X (ovviamente non vuoto) l'intersezione di tutti gli elementi di $\bar{F}$. È facile vedere che $\bar{F}$ è costituito precisamente da tutti e soli gli elementi di $\bar{A}$ che contengono X. Non sempre accade che sia $X \in \bar{A}$; precisamente, supposto che A ed F siano ricavati come nella premessa, si ha:

LEMMA 3 - *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *F ammette un sistema finito di generatori.*

(a′) *T è finitamente assiomatizzabile.*

(b) *F ammette un sistema di generatori di ordine* 1.

(b′) *T ammette un sistema di assiomi avente un solo elemento.*

(c) $X \in \bar{A}$.

dim. ovvia.

Facilmente si prova che:

LEMMA 4 – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme H finito di elementi di A sia un sistema di generatori di F è che l'intersezione degli elementi di $\lambda(H)$ sia X.*

La rappresentazione di A ora considerata e in particolare l'introduzione di X danno utili suggerimenti per la ricerca degli elementi minimali di $(\mathcal{G}, R)$.

Se si considerano, in luogo degli elementi di A i loro complementari le considerazioni precedenti suggeriscono che i complementari degli elementi di un $\lambda(H)$ con H minimale in $(\mathcal{G}, R)$ formino una ripartizione di $-X$. In altri termini, se per « antiripartizione » di un insieme N rispetto a un suo soprainsieme M intendiamo un insieme $\mathfrak{L}$ di sottoinsiemi di M tale che:

(6) se $Y \in \mathfrak{L}$ allora $Y \neq M$,

(7) se $Y, Z \in \mathfrak{L}$, allora $Y \cup Z = M$,

(8) $\bigcap\limits_{Y \in \mathfrak{L}} Y = N$,

la rappresentazione fatta ci porta a considerare quegli elementi H di $\mathcal{G}$ tali che $\lambda(H)$ sia una antiripartizione di X rispetto a S; si considerino allora gli elementi «semiminimali» secondo la seguente:

def. 8 – *Un $H \in \mathcal{G}$ si dirà semiminimale se e solo se $1 \notin H$ e per ogni coppia di elementi distinti p, q di H si ha:*

(9) $p + q = 1$.

Ovviamente condizione necessaria e sufficiente perchè un $H \in \mathcal{G}$ sia semiminimale è che $\lambda(H)$ sia una antiripartizione di X rispetto ad S.

Si ha subito:

LEMMA 5 - *Se H è semiminimale allora $H \in \widehat{\mathcal{G}}$.*

dim. Sia H semiminimale e sia per assurdo p un elemento di H tale che $H - \{p\} \in \mathcal{G}$; p è un elemento di F e essendo per ipotesi $H - \{p\} \in \mathcal{G}$ si potranno trovare certi elementi $p_1, p_2, \dots, p_n$ (n finito) di $H - \{p\}$ per cui si abbia $p \geq \overline{|i|}_1^n p_i$.

D'altra parte, essendo H semiminimale, $p + p_i = 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, quindi $p_i \geq -p$ e si trova allora $p \geq \overline{|i|}_1^n p_i \geq -p$ ossia $p = 1$ contro l'ipotesi che H sia semiminimale. La contraddizione dimostra il lemma.

Si ha ora:

TEOR. 3 - *Se $K \in \mathcal{G}$ ha ordine α non superiore al numerabile allora esiste un elemento semiminimale H di ordine non superiore a K e tale che $H \preccurlyeq K$.*

(cioè un elemento semiminimale H con HRK).

dim. Si ordinino gli elementi di K in una successione $\{p_i\}$ $0 \leq i < \alpha$ e per ogni $i < \alpha$ sia $\bar{p}_i = p_i + \Sigma_h{}_0^{i-1} (-p_h)$, $(\bar{p}_0 = p_0)$. Sia H l'insieme di quelli fra i $\bar{p}_i$ che sono diversi da 1, si ha:

$\overline{|i|}_0^n p_i = \overline{|i|}_0^n \bar{p}_i$ $(n < \alpha)$, per cui il filtro generato da K (ossia F) coincide con quello generato dal sistema dei $\bar{p}_i$ e quindi con quello generato da H, onde $H \in \mathcal{G}$.

Sia $i \neq k$, $(i, k < \alpha)$ (e suppongo anzi $i < k$), si ha:

$$\bar{p}_i + \bar{p}_k = p_i + \Sigma_h{}_0^{i-1} (-p_h) + p_k + \Sigma_r{}_0^{k-1} (-p_r) = p_i + (-p_i) + \dots = 1 \text{ onde,}$$

tenuto conto che è $1 \notin H$, H risulta semiminimale.

Infine $\bar{p}_i \geq p_i$ onde $H \preccurlyeq K$. Che poi l'ordine di H non superi l'ordine di K è ovvio.

TEOR. 4 - *Se $H \in \mathcal{G}$ è un elemento semiminimale di ordine finito α non esiste alcun $K \neq H$, $K \in \mathcal{G}$ di ordine $\beta \leq \alpha$ per cui $K \preccurlyeq H$. In altri termini gli elementi semiminimali di ordine finito sono minimali in $(\mathcal{G}, R)$. (Tenuto conto del teor. 3 si ha anche che essi sono i soli elementi minimali di ordine finito).*

dim. Sia H un elemento semiminimale di ordine finito α e sia $K \preccurlyeq H$ con $\beta \leq \alpha$, (essendo β l'ordine di K). Dimostrerò che K coincide con H. Esiste, in queste ipotesi, una applicazione implicativa φ di K in H ed essendo, per il lemma 5, $H \in \widehat{\mathcal{G}}$, la φ è suriettiva (lemma 2). Poichè α e β sono finiti e $\beta \leq \alpha$ la φ risulta anzi biunivoca e $\beta = \alpha$.

Posto ora $\bar{H} = \lambda(H)$, $\bar{K} = \lambda(K)$ sia p un elemento qualunque di K, $Y = \lambda p$, $\bar{Y} = \lambda\varphi p$, $Y' = \bigcap_{\substack{Z \in \bar{K} \\ Z \neq Y}} Z$, $Y' = \bigcap_{\substack{Z \in \bar{H} \\ Z \neq \bar{Y}}} Z$.

Si ha:

$$X = \bigcap_{Z \in \bar{K}} Z = \bigcap_{Z \in \bar{H}} Z,$$

ossia:

$$(X =) \qquad Y \cap Y' = \bar{Y} \cap \bar{Y}'. \tag{10}$$

Essendo la φ implicativa si ha anche:

$$Y \supseteq \bar{Y}, \quad Y' \supseteq \bar{Y}'. \tag{11}$$

Infine, tenuto conto del fatto che H è semiminimale:

$$\bar{Y} \cup \bar{Y}' = \bar{Y} \cup \bigcap_{\substack{Z \in \bar{H} \\ Z \neq \bar{Y}}} Z = \bigcap_{\substack{Z \in \bar{H} \\ Z \neq \bar{Y}}} (\bar{Y} \cup Z) = S, \tag{12}$$

Dalle (10), (11) e (12) segue $Y = \bar{Y}$ (e $Y' = \bar{Y}'$) onde $p = \varphi p$. La φ è dunque identica e $H = K$. Il teorema è così dimostrato.

5. - Nel caso di una teoria T finitamente assiomatizzabile (e in parte nel caso di una teoria assiomatizzabile con un'infinità numerabile di assiomi), il problema 2° riceve, mi pare, una risposta soddisfacente dai teoremi 3 e 4.

Nel caso di una teoria che non ammetta una assiomatizzazione finita (o anche per una teoria che la ammetta, quando si vogliano considerare sistemi di infiniti assiomi) si ripresenta invece in generale anche per $(\mathcal{G}, R)$ una situazione analoga a quella data dal teorema 2 per $(\mathcal{G}, \preccurlyeq)$.

Si deve tener ben presente che i teoremi 3 e 4 non rendono privo di interesse il lavoro del matematico che volesse costruire un sistema minimale di assiomi per una data teoria finitamente assiomatizzabile, e questo nonostante che il procedimento dato nella dimostrazione del teorema 3 sia effettivo. La riduzione del problema posto nella premessa al semplice problema algebrico considerato nei paragrafi 2 e 3 è infatti stata possibile prescindendo dalle particolari formulazioni di un dato assioma.

Sia ad esempio T la teoria del primo ordine dei piani grafici considerata nella premessa. Il sistema di assiomi $(S_1, S_2 \vee \neg S_1)$ (ossia $(S_1, S_1 \rightarrow S_2)$) a cui si arriva a partire da (S_1, S_2) col procedimento indicato nel teorema 3 è minimale (per la R) e più debole del sistema dato, ma la sua costruzione ha poco interesse se non si riesce a formulare il secondo assioma in modo diverso, in modo cioè che non tradisca, per così dire, la sua costruzione. Tuttavia le condizioni date per i sistemi semiminimali (la «$p + q = 1$» diventa, nella interpretazione logica, $\vdash p \vee q$) permettono, in ogni caso, di controllare se un dato sistema finito di assiomi sia minimale. Per esempio il sistema (S_1, S_2') pur essendo più debole di (S_1, S_2) (e, per così dire, più interessante di $(S_1, S_1 \rightarrow S_2)$) non è minimale (è infatti facile trovare dei controesempi alla $S_1 \vee S_2'$ onde è falso che sia $\vdash S_1 \vee S_2'$) e può essere quindi ulteriormente indebolito. In effetti $(S_1, S_1 \rightarrow S_2)$ ne rappresenta appunto un indebolimento ma, come ho già osservato, un indebolimento «non interessante». Tuttavia, ove si trovi un indebolimento «interessante» di (S_1, S_2'), minimale, del tipo (S_1, S_2''), S_2'' risulterà una diversa formulazione di $S_1 \rightarrow S_2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Casari, *Lineamenti di logica matematica*, Feltrinelli, Milano (1960).

[2] L. Henkin, *La structure algébrique des théories mathématiques*, Paris (1956).

[3] L. Henkin e A. Tarski, *Cylindric Algebras*, in Proceedings of Symposia in pure Math., Vol. II (1961).

[4] R. Sikorski, *Boolean Algebras*, Berlin (1960).

[5] M. H. Stone, *The theory of representation of Boolean algebras*, Trans. of Am. Math. Soc. 40, pp. 37-111 (1936).