Bollettino
Unione Matematica Italiana

Vittoria Zambelli

Il sottogruppo di Hughes e la serie centrale ascendente.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.4, p. 478–489.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_4_478_0>

Il sottogruppo di Hughes e la serie centrale ascendente

Nota di VITTORIA ZAMBELLI (a Milano) (*) (**)

Sunto. - *Hughes avanzò la seguente ipotesi: siano G un gruppo, p un numero primo e H_p il sottogruppo generato dagli elementi di G di periodo diverso da p; allora si ha $H_p = G$, oppure $H_p = u$, oppure $[G : H_p] = p$.*

In questa nota si mettono in luce i legami del sottogruppo H_p con i gruppi della serie centrale ascendente e si dimostra che in un gruppo, non p-gruppo, il sottogruppo H_p contiene ogni gruppo di tale serie. Si deduce di qui che, se G è un gruppo nilpotente, non p-gruppo, si ha $H_p = G$; resta così provata in questo caso l'ipotesi di Hughes.

Summary. - *Hughes advanced the following conjecture: let G be a group, p a prime and H_p the subgroup of G, generated by all the elements of G, which do not have order p; then either $H_p = u$, or $H_p = G$, or $[G : H_p] = p$.*

Here we study connections between the subgroup H_p and the groups of the upper central series and we show that in a group, which is not a p-group, the group H_p contains every group of such a series. It follows that, if G is a nilpotent group, not a p-group, it is $H_p = G$; in this case Hughes conjecture is proved.

Introduzione.

Siano G un gruppo e p un numero primo; il sottogruppo H_p di G, generato dagli elementi di periodo diverso da p, risulta essere un sottogruppo normale di G e viene chiamato «sottogruppo di HUGHES» relativo al numero primo p. Gli elementi di G, non appartenenti ad H_p, hanno tutti periodo p e quindi il gruppo quoziente $\frac{G}{H_p}$ risulta un p-gruppo.

Il sottogruppo H_p può essere proprio o improprio ([1]). Ovviamente condizione necessaria e sufficiente, affinchè H_p si riduca alla sola unità, è che tutti gli elementi di G (diversi dall'unità) abbiano periodo p.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 18 novembre 1964.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca N. 30 del C.N.R. per l'anno 1964-65.

([1]) Ad esempio, nel gruppo non ciclico di ordine 6, per $p = 2$, il sottogruppo di HUGHES coincide con il sottogruppo ciclico di ordine 3, mentre per $p = 3$, esso coincide con l'intero gruppo; nel gruppo trirettangolo, per $p = 2$, H_p si riduce alla sola unità.

In questa nota si mettono in luce i legami del sottogruppo H_p con altri sottogruppi notevoli di G. Si considerano dapprima alcune proprietà del sottogruppo K_p, generato dall'unità e dagli elementi di periodo p, e valendosi di queste, si deduce il fatto, d'altronde ben noto, che in un gruppo abeliano il sottogruppo H_p è improprio. Si dimostra poi che il sottogruppo H_p, quando è diverso dall'unità, contiene il centro di G. Anche da questo risultato segue immediatamente la succitata proprietà circa i gruppi abeliani. Si confronta quindi il sottogruppo H_p con i gruppi della serie centrale ascendente e si stabiliscono delle condizioni sufficienti, affinchè H_p contenga il centro r-esimo di G. Si raggiunge poi lo scopo sostanziale del lavoro, che è quello di mostrare come in un gruppo G, non p-gruppo, il sottogruppo H_p contenga tutti i gruppi della serie centrale ascendente.

Di qui si deduce che in un gruppo nilpotente, non p-gruppo, il sottogruppo H_p coincide con l'intero gruppo G. Infine si stabilisce che la coincidenza di H_p con il centro r-esimo è condizione caratteristica per i gruppi nilpotenti, non p-gruppi, di lunghezza r.

Notiamo che per i casi trattati viene confermata una congettura di HUGHES [2], secondo la quale il sottogruppo H_p è improprio, oppure ha indice p in G; nei nostri casi il sottogruppo H_p è sempre improprio.

2. – Accanto al sottogruppo H_p consideriamo il sottogruppo normale K_p, generato dall'unità e dagli elementi di periodo p. Ogni elemento di G appartiene necessariamente ad almeno uno dei due sottogruppi H_p e K_p; pertanto, se uno di essi si riduce alla sola unità, l'altro coincide con G. Più in generale si può affermare che

TEOREMA 1. – *Se uno dei due sottogruppi H_p e K_p è contenuto propriamente in G, l'altro coincide con G.*

Per quanto detto sopra, rimane da considerare il caso in cui uno dei due sottogruppi sia proprio. Supponiamo che H_p sia proprio. Un elemento $k \in G$, non appartenente ad H_p, sta necessariamente in K_p; scelto allora un qualunque elemento h di H_p, l'elemento hk non può appartenere ad H_p, perchè apparterrebbe ad H_p anche

[2] La congettura di HUGHES venne confermata da HUGHES stesso per $p=2$, quindi da STRAUS e SZEKERES per $p=3$; in seguito ne dimostrarono la validitá HUGHES e THOMPSON nel caso di gruppi finiti, non p-gruppi, e ZAPPA nel caso di p-gruppi finiti, di classe $\leq p$.

k, contro l'ipotesi. Pertanto $hk \in K_p$, da cui segue che $h \in K_p$, ed essendo h qualunque in H_p, si ottiene che $H_p \subseteq K_p$ e quindi che $K_p = G$.

Analogamente si verifica che, se K_p è proprio, si ha $H_p = G$; c.d.d.

Osserviamo che si può tuttavia presentare il caso in cui entrambi i sottogruppi H_p e K_p coincidano con G, come ad esempio nel gruppo totale su quattro lettere, per $p = 2$.

Dal Teorema 1 si deducono i seguenti corollari,

COROLLARIO 2. – *In un gruppo abeliano il sottogruppo H_p è improprio.*

Infatti in un gruppo abeliano il sottogruppo K_p contiene, oltre all'unità, tutti e soli gli elementi di periodo p. Pertanto, se H_p contiene qualche elemento diverso dall'unità, K_p è contenuto propriamente in G e quindi $H_p = G$.

COROLLARIO 3. – *Se G è un gruppo nilpotente finito, non p-gruppo, allora $H_p = G$.*

Essendo G un gruppo nilpotente finito, potrà venire espresso come prodotto diretto dei suoi sottogruppi di SYLOW

$$G = P \times Q \times \dots \times R,$$

di ordine rispettivamente p^α, q^β, ..., r^γ, con $p, q, \dots, r$ numeri primi diversi tra loro.

Per il secondo teorema di SYLOW gli elementi di periodo p appartengono a P e quindi $K_p \subseteq P$. Avendo escluso che G sia un p-gruppo, il sottogruppo P è contenuto propriamente in G e quindi lo è anche K_p. Segue allora $H_p = G$.

Relazioni fra il sottogruppo H_p e il centro di G.

3. – TEOREMA 4. – *Se in G vi è un elemento normale, diverso dall'unità e di periodo diverso da p, si ha $H_p = G$.*

Sia h un elemento normale, diverso dall'unità di G e di periodo diverso da p; tale elemento appartiene ad H_p. Se esistesse un elemento g di G non appartenente ad H_p, esso avrebbe periodo p; inoltre nemmeno l'elemento hg potrebbe appartenere ad H_p. Si avrebbe quindi

$$(hg)^p = u$$

e

$$g^p = u .$$

Essendo h normale, si ha

$$(hg)^p = h^p g^p ,$$

da cui segue

$$h^p = u$$

contro l'ipotesi. Pertanto $H_p = G$; c.d.d.

COROLLARIO 5. – *Se H_p è un sottogruppo proprio, gli elementi del centro C_1 di G, diversi dall'unità, hanno tutti periodo p.*

Infatti se un elemento $\neq u$ del centro avesse periodo diverso da p, H_p coinciderebbe con G, per il Teorema 4.

COROLLARIO 6. – *Se $H_p \neq u$ e $H_p = C_1$, allora $H_p = G$ e G è abeliano.*

Infatti essendo $H_p \neq u$, esso contiene almeno un elemento $\neq u$ di periodo diverso da p; tale elemento, per le ipotesi fatte, appartiene anche a C_1 e quindi è normale. Dal Teorema 4 segue che $H_p = G$ e quindi che $G = C_1$ è abeliano.

TEOREMA 7. – *Se $H_p \neq u$, il sottogruppo H_p contiene il centro C_1 di G.*

Essendo per ipotesi $H_p \neq u$, esiste certamente un elemento $h \neq u$ di H_p di periodo diverso da p. Supponiamo che esista un elemento c di C_1 non appartenente ad H_p; l'elemento hc non può appartenere ad H_p e quindi si ha

$$c^p = u$$

$$(hc)^p = u .$$

Essendo

$$(hc)^p = h^p c^p$$

segue l'assurdo

$$h^p = u .$$

Pertanto un qualsiasi elemento di C_1 appartiene ad H_p e quindi C_1 è contenuto in H_p; c.d.d.

Dal Teorema 7 scende come immediata conseguenza che, se in un gruppo abeliano si ha $H_p \neq u$, allora $H_p = G$, come già visto nel Corollario 2. Si può quindi affermare che

TEOREMA 8. – *Se $H_p \neq u$, condizione necessaria e sufficiente, affinchè il gruppo G sia abeliano, è che sia $C_1 = H_p$.*

Relazioni fra il sottogruppo H_p e i gruppi della serie centrale ascendente.

4. – Nel paragrafo precedente si sono messi in luce alcuni legami tra il sottogruppo H_p e il centro C_1 di G, con particolari considerazioni nel caso dei gruppi abeliani. In questo paragrafo e in quelli seguenti si confronterà il sottogruppo H_p con un qualsiasi gruppo C_r della serie centrale ascendente, considerando in particolare i gruppi nilpotenti.

Per evitare scritture troppo complicate, d'ora innanzi il gruppo H_p verrà semplicemente indicato come sottogruppo H, restando sottinteso il numero primo p, a cui tutti i discorsi si riferiscono.

TEOREMA 9. – *Se il gruppo quoziente $\frac{G}{C_{r-1}}$ del gruppo G rispetto al suo centro $(r-1)$-esimo C_{r-1} contiene qualche elemento di periodo diverso da p, allora il sottogruppo H contiene il centro r-esimo C_r di G (e di conseguenza H contiene ogni C_s, con $s < r$).*

Consideriamo l'omomorfismo naturale ω

$$G \longrightarrow \frac{G}{C_{r-1}}.$$

Se un elemento di G ha periodo p, le sua immagine in $\frac{G}{C_{r-1}}$ ha periodo p, oppure è l'unità. Pertanto gli elementi di $\frac{G}{C_{r-1}}$ di periodo diverso da p e diversi dall'unità, hanno per controimmagine nell'omomorfismo ω elementi di G di periodo diverso da p. Detto H^{r-1} il sottogruppo generato dagli elementi di periodo diverso da p di $\frac{G}{C_{r-1}}$ e $\overline{H}^{r-1}$ la sua controimmagine in G, si ha

$$\overline{H}^{r-1} \xrightarrow[\omega]{} H^{r-1}$$

$$\overline{H}^{r-1} \subseteq H.$$

Detto C_1^{r-1} il centro di $\frac{G}{C_{r-1}}$, poichè per ipotesi $\frac{G}{C_{r-1}}$ contiene qualche elemento di periodo diverso da p, si ha che H^{r-1} non si riduce alla sola unità e che

$$C_1^{r-1} \subseteq H^{r-1};$$

quindi

$$C_r \subseteq \overline{H}^{r-1},$$

essendo per definizione il centro r-esimo di G la controimmagine in ω di C_1^{r-1}. Segue

$$C_r \subseteq H; \text{ c.d.d.}$$

COROLLARIO 10. - *Se in* $\dfrac{G}{C_{r-1}}$ *il sottogruppo* H^{r-1}, *generato dagli elementi di periodo diverso da* p, *coincide con* $\dfrac{G}{C_{r-1}}$ *allora* $H = G$.

Infatti si ha

$$\overline{H}^{r-1} = G$$

e quindi, poichè

$$\overline{H}^{r-1} \subseteq H \subseteq G,$$

si ha

$$H = G; \text{ c.d.d.}$$

TEOREMA 11. - *Un gruppo* G *sia tale che il gruppo quoziente* $\dfrac{G}{C_{r-1}}$ *contenga qualche elemento di periodo diverso da* p; *allora condizione necessaria e sufficiente, affinchè* G *sia un gruppo nilpotente di lunghezza* r, *è che* $H = C_r$.

Dimostriamo che la condizione è necessaria.

Poichè si ha per ipotesi $G = C_r$, il gruppo quoziente $\dfrac{G}{C_{r-1}}$ è abeliano e quindi il suo sottogruppo di HUGHES H^{r-1} è improprio; date le ipotesi, si ha necessariamente (cfr. Corollario 2)

$$H^{r-1} = \frac{G}{C_{r-1}}$$

e di conseguenza

$$H = \overline{H}^{r-1} = G.$$

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente.

Per il Teorema 9 sussiste la relazione

$$C_r \subseteq \overline{H}^{r-1} \subseteq H.$$

Se

$$H = C_r\,,$$

segue

$$\overline{H}^{r-1} = C_r$$

e quindi per l'omomorfismo naturale di G su $\dfrac{G}{C_{r-1}}$ si ha

$$H^{r-1} = C_1^{r-1}.$$

Per il Corollario 6 si ha

$$H^{r-1} = \frac{G}{C_{r-1}}$$

e quindi

$$\overline{H}^{r-1} = H = G = C_r\,; \text{ c.d.d.}$$

5. – Allo scopo di stabilire ulteriori legami tra il sottogruppo H e i gruppi della serie centrale ascendente, premettiamo una osservazione, che certamente, è ben nota, anche se non l'ho espressamente ritrovata nella letteratura corrente.

LEMMA 12. – *Nell'omomorfismo naturale* ω *di un gruppo* G *sul gruppo quoziente* $\dfrac{G}{C_k}$ (*dove* C_k *è il centro* k*-esimo di* G) *il centro* $(k+r)$*-esimo di* G *è l'insieme delle controimmagini del centro* r*–esimo di* $\dfrac{G}{C_k}$.

Dimostriamo il lemma facendo induzione su r.

Il lemma è vero per $r = 1$, per definizione di centro $(k+1)$–esimo. Ammettiamolo vero per $(r-1)$ e dimostriamolo vero per r.

Per l'ipotesi di induzione il centro $(r-1)$-esimo di $\dfrac{G}{C_k}$ avrà per controimmagine nell'omomorfismo ω il centro $(k+r-1)$-esimo di G. Quindi il centro $(r-1)$-esimo di $\dfrac{G}{C_k}$ sarà $\dfrac{C_{k+r-1}}{C_k}$.

Introdotti gli omomorfismi naturali

$$G \xrightarrow[\omega]{} \frac{G}{C_k} \xrightarrow[\tau]{} \frac{G}{C_k}\Big/\frac{C_{k+r-1}}{C_k} \xleftrightarrow[j]{} \frac{G}{C_{k+r-1}}$$

e

$$G \xrightarrow[\sigma]{} \frac{G}{C_{k+r-1}},$$

si ha

$$\sigma = \omega\tau j$$

Il centro r–esimo di $\frac{G}{C_k}$ è controimmagine in τ del centro di $\frac{G}{C_k}\Big/\frac{C_{k+r-1}}{C_k}$ e quindi in τj del centro di $\frac{G}{C_{k+r-1}}$.

Pertanto la controimmagine in ω del centro r–esimo di $\frac{G}{C_k}$ risulta controimmagine in $\omega\tau j$, e quindi in σ, del centro di $\frac{G}{C_{k+r-1}}$ e coincide perciò con il centro $(k+r)$–esimo; c.d.d.

Si può così stabilire una nuova condizione sufficiente, affinchè sia $H = G$, spostando l'attenzione dal gruppo G al gruppo $\frac{G}{C_k}$.

Teorema 13. – *Se il gruppo quoziente di un gruppo G rispetto a un suo centro C_k è nilpotente di lunghezza r e $\frac{G}{C_{k+r-1}}$ contiene qualche elemento di periodo diverso da p, allora si ha $H = G$.*

Infatti per il Lemma precedente il centro $(r-1)$–esimo di $\frac{G}{C_k}$ è dato da $\frac{C_{k+r-1}}{C_k}$.

Inoltre sussiste l'isomorfismo

$$\frac{G}{C_k}\Big/\frac{C_{k+r-1}}{C_k} \longleftrightarrow \frac{G}{C_{k+r-1}};$$

segue da ciò che, se $\frac{G}{C_{k+r-1}}$ contiene qualche elemento di periodo diverso da p, anche il gruppo quoziente $\frac{G}{C_k}\Big/\frac{C_{k+r-1}}{C_k}$ contiene elementi di periodo diverso da p.

Per il Teorema 11

$$H^k = \frac{G}{C_k};$$

per il Corollario 10 si ha allora $H = G$; c.d.d.

Sempre valendoci del risultato stabilito nel Lemma 12, possiamo dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 14. – *Se un gruppo G non è un p-gruppo, allora il suo sottogruppo di Hughes contiene la serie centrale ascendente.*

Osserviamo anzitutto che, non essendo per ipotesi G un p-gruppo, il sottogruppo H contiene certamente qualche elemento diverso dall'unità.

Ora se si presenta il caso $G = H$, l'asserto è ovvio. Rimane quindi da considerare il caso in cui H è sottogruppo proprio di G.

Consideriamo in tal caso l'omomorfismo naturale di G sul gruppo quoziente $\frac{G}{C_1}$.

Detto H^1 il sottogruppo di HUGHES di $\frac{G}{C_1}$, sono possibili i seguenti casi:

I) $H^1 = \frac{G}{C_1}$; da ciò seguirebbe $H = G$, contro l'ipotesi

II) H^1 si riduce alla sola unità di $\frac{G}{C_1}$; in questo caso tutti gli elementi di $\frac{G}{C_1}$ avrebbero periodo p. Poichè per ipotesi $H \neq u$, G, per il Corollario 5 gli elementi del centro C_1 avrebbero tutti periodo p; per un qualsiasi elemento g di G si avrebbe allora in relazione all'omomorfismo naturale

$$G \longrightarrow \frac{G}{C_1}$$

$$g \longrightarrow g' \quad \text{con} \quad g' \in \frac{G}{C_1}$$

$$g^p \longrightarrow (g')^p$$

$$(g')^p = u'$$

$$g^p \in C_1$$

e quindi

$$(g^p)^p = g^{p^2} = u,$$

da cui seguirebbe che G è un p-gruppo, contro l'ipotesi.

III) H^1 è sottogruppo proprio di $\frac{G}{C_1}$: è questo l'unico caso compatibile con le ipotesi.

Per il Corollario 5 e per il Teorema 7, H^1 contiene il centro C_1^1 di $\frac{G}{C_1}$ e gli elementi di C_1^1 hanno tutti periodo p. Per l'omomorfismo

$$G \longrightarrow \frac{G}{C_1}$$

si ha

$$\overline{H}^1 \longrightarrow H^1$$

con

$$\overline{H}^1 \subseteq H$$

e quindi da

$$C_1^1 \subseteq H^1$$

segue

$$C_2 \subseteq \overline{H}^1 \subseteq H.$$

Osserviamo ora che, avendo tutti gli elementi di C_1 periodo p, $\frac{G}{C_1}$ non può essere un p-gruppo, perchè altrimenti lo sarebbe anche G. Si può pertanto applicare a $\frac{G}{C_1}$ il risultato conseguito per G e ottenere

$$C_2^1 \subseteq H^1,$$

essendo C_2^1 il secondo centro di $\frac{G}{C_1}$.

Per il Lemma 12 nell'omomorfismo di G su $\frac{G}{C_1}$ si ha

$$C_3 \longrightarrow C_2^1$$

e quindi

$$C_3 \subseteq H.$$

Applicando il risultato così ottenuto per G al gruppo quoziente $\frac{G}{C_1}$, si trova che H^1 contiene il terzo centro di $\frac{G}{C_1}$ e quindi che H contiene il quarto centro di G. Così procedendo, si dimostra l'asserto; c.d.d.

A questo punto siamo in grado di estendere il risultato del Corollario 2.

COROLLARIO 15. – *In un gruppo nilpotente, non p–gruppo, il sottogruppo H è improprio e coincide con G.*

Per il Teorema 14 il sottogruppo H contiene tutta la serie centrale ascendente e quindi anche G. Pertanto si ha $H = G$; c.d.d.

Ho preferito enunciare il corollario sotto questa forma, in quanto mi interessava particolarmente il legame tra un gruppo nilpotente e il suo sottogruppo di HUGHES. Tuttavia, sotto forma lievemente diversa, esso risulta la condizione necessaria del seguente teorema, con cui si completa l'estensione ai gruppi nilpotenti delle proprietà già viste per i gruppi abeliani.

TEOREMA 16. – *Sia G un gruppo, non p–gruppo; condizione necessaria e sufficiente, affinchè G sia nilpotente di lunghezza r, è che sia $H = C_r$.*

Dimostriamo che la condizione è sufficiente; dimostriamo cioè che, se G non è un p-gruppo e $H = C_r$, allora si ha $H = G = C_r$.

Dimostriamo l'asserto facendo induzione su r.

Per $r = 1$ il teorema è vero, per il Corollario 6. Ammesso vero l'asserto per $(r-1)$, dimostriamolo vero per r.

Consideriamo il gruppo $\frac{G}{C_1}$. Se esso fosse un p-gruppo, almeno un elemento di C_1 dovrebbe avere periodo diverso da p, perchè altrimenti tutti gli elementi di G avrebbero periodo dato da una potenza di p e G sarebbe un p-gruppo, contro l'ipotesi. Ma se esiste un elemento di C_1 di periodo diverso da p, per il Teorema 4 si ha necessariamente $G = H$; pertanto nel caso che $\frac{G}{C_1}$ sia un p-gruppo, l'asserto è dimostrato.

Possiamo supporre quindi che $\frac{G}{C_1}$ non sia un p-gruppo. Il suo centro $(r-1)$-esimo è dato da $\frac{C_r}{C_1}$ e quindi da $\frac{H}{C_1}$. Poichè per l'omomorfismo

$$G \longrightarrow \frac{G}{C_1}$$

si ha

$$\bar{H}^1 \longrightarrow H^1,$$

dove

$$\bar{H}^1 \subseteq H,$$

segue che

$$H^1 \subseteq \frac{C_r}{C_1} = \frac{H}{C_1}.$$

D'altra parte, non essendo $\frac{G}{C_1}$ un p-gruppo, H^1 contiene tutta la serie centrale ascendente di $\frac{G}{C_1}$ e in particolare il centro $(r-1)$-esimo

$$H^1 \supseteq \frac{C_r}{C_1}.$$

Si ha pertanto

$$H^1 = \frac{C_r}{C_1}.$$

Ma allora per l'ipotesi di induzione si ha

$$H^1 = \frac{C_r}{C_1} = \frac{G}{C_1},$$

da cui segue

$$\overline{H}^1 = G, \quad \text{e poichè} \quad H \supseteq \overline{H}^1$$

$$H = G = C_r; \quad \text{c.d.d.}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] D.R. Hughes, Bull. Am. Math. Soc. 63 (1957).

[2] D. R. Hughes, J. G. Thompson, *The H_p-problem and the structure of H_p-group,* «Pac. Journ. of Math.» 9 (1959).

[3] E.G. Straus, G. Szekeres, *On a problem of D.R. Hughes,* «Proc. Amer. Math. Soc.», 9 (1958).

[4] G. Zappa, *Contributo allo studio del problema di Hughes sui gruppi,* «Ann. di Math.» 57 (1962).

[5] G. Zappa, R. Permutti, *Gruppi, corpi, equazioni.* Feltrinelli, Milano 1963.

[6] M. Hall, *The theory of groups,* New York 1959.