Bollettino
Unione Matematica Italiana

Gino Arrighi

Regole d'abaco nei primi secoli dei numeri in "figure degli Indi"

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.4, p. 490–502.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_4_490_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Regole d'abaco nei primi secoli dei numeri in "figure degli Indi"

Nota di GINO ARRIGHI (a Lucca) (*)

Sunto. - *Vedi il primo paragrafo.*

Non intendo certamente sciogliere a fondo la casistica e spiegare in modo definitivo tutte le questioni insite nel titolo preposto; ovviamente il lavoro dovrebbe esser condotto in una prospettiva più ampia: conoscenza completa di tutti i passi dei testi rimastici aventi riferimento al presente oggetto e loro coordinamento per i tempi ai quali appartengono e per scuole o località nelle quali e per le quali essi sono stati redatti. La estrema rarità della conoscenza delle fonti, da noi tanto e tanto a lungo trascurata, rivelerà i limiti di questa ricerca assai nuova sebbene di appassionante interesse.

Avverto che mi varrò essenzialmente della mia esperienza, acquistata nell'esame di non pochi manoscritti medioevali di aritmetica, però mi servirò anche di alcune opere a stampa che, per essere comparse in tempi immediatamente seguenti o per riflettere quasi un immutato pensiero, possono essere di validissimo ausilio in queste ricerche.

Mostrerò qui, successivamente, alcune considerazioni attorno alla numerazione decimale e diversi procedimenti adottati per la esecuzione delle quattro operazioni: volta a volta avrò a ricordare testi ed autori da cui avrò tratto regole ed esempi.

Cominciando dalla definizione di numero, ricordo che rifacendosi a modelli assai più antichi, M° GUGLIELMO (sec. XII) vescovo

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 25 marzo 1964.

di Lucca, nella sua *De Arithmetica compendiose tractata,* così dice: « Quid sit numerus. Numerus est unitatum collectio vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus ». LEONARDO FIBONACCI in questo modo si esprime nel suo *Liber Abaci* (1202): « Nam numerus est unitatum perfusa collectio sive congregatio unitatum, quae per suos in infinitum ascendit gradus ».

Quest'ultimo passa quindi alla « cognitione novem figurarum yndorum », o delle « nove figure degli Indi » come avrà a tradurre il lucchese VINCENZO BANELLI in tempi più tardi, nell'ordine seguente

.9. .8. .7. .6. .5. .4. .3. .2. .1. .

Lo zero è « figura » di altro tipo; vediamo cosa se ne dice. LEONARDO PISANO spiega: « O quod arabice zephirum appellatur » e, in un manoscritto RICCARDIANO, si insegna: « et dovete sapere ch'el zevero per sè solo non significa nulla ma à potenzia di fare significare » aggiungendo: « et dicina o centinaia o migliaia non si puote scrivere sanza questo segnale, lo quale si chiama zevero » In un manoscritto della Biblioteca di DRESDA, datato 1346 e ricordato da BALDASSARRE BONCOMPAGNI nel « Giornale degli eruditi e curiosi », si legge: « la quale [figura] per sè non significa nulla ma fae significhare l'altre figure e chiamasi in lingua latina zero e in lingua greca cifra overo circhulo e alchuno la chiama nulla». Giovanni de' Danti d'Arezzo, nel manoscritto Riccardiano intitolato *Tractato del algorismo tracto e volgariççato secondo l'a rissmetrica de Boetio* che dicesi compilato «sotto gli anni Domini Mccclxx», lo chiama « çevaro » e « çevero ».

Per la distribuzione delle « figure », o cifre come oggi si dice, leggiamo la prima delle *Regoluzze* di M° PAOLO DADOMARI da Prato detto « dell'Abbaco » (+1374 c.): « Se vuoli rilevare molte figure, a ogni tre farai un punto, cominciando dalla parte ritta inverso la manca; e poi dirai tante volte migliaia quanti sono li punti dinanzi ». Fibonacci propone invece di porre una « virgulam in modum arcus » sopra ogni particolar gruppo di tre cifre. La scoperta dell'accorgimento della interpunzione fu già attribuita a M° Paolo, ma erroneamente giacchè questi fu preceduto dall'inglese Giovanni di Holyvood, il Giovanni da Sacrobosco (+1256), nel *Tractatus de arte numerandi.* Dopo il gruppo delle unità diecine e centinaia, seguivano quelli delle migliaia, delle migliaia di migliaia, delle migliaia di migliaia di migliaia e così via. Nella *Pratica mercantile moderna* (1562) del lucchese Guglielmo Pagnini, il quale avverte esser l' « arithmetica principio et fondamento di tutto il negociare de mercanti », si trovano pure i milioni, migliaia di milioni e così in avanti.

* * *

Per effettuare l'addizione si collocano i numeri « in tabula », cioè in colonna come pure oggi facciamo; e si procede ancora per colonne, o per « filo » o « colonnello » come più tardi si dirà, ma dal basso verso l'alto onde di sopra sarà messo il risultato, così

$$\begin{array}{r} 7333 \\ \hline 25 \\ 461 \\ 6789 \\ 58 \end{array}$$

Circa il riporto si dirà: « et decenas in manu reservet »; più tardi si dirà: « salva le decine ». Alla operazione seguiva la « probatio », la attuale prova per 9, e « proba » è detto il resto della divisione per 9 del risultato. In codice Oliveriano assai tardo ho incontrato questo procedimento a fine di prova: addizionare tutti gli addendi con somma trovata e verificare se il risultato è doppio di quello precedentemente ottenuto.

Verrà poi introdotta ed usata ampiamente una prova fondata similmente sul resto della divisione per 7 la quale sarà ritenuta meno « fallace » di quella per 9 giacchè talune variazioni, quali ad esempio lo scambio di cifre e la introduzione o soppressione di zeri, lasciano inalterato il resto della divisione per 9: comunque si consiglierà di usarle entrambe, e ciò, s'intende, per tutte le operazioni.

* * *

Anche per la sottrazione, ovvero « extratione minorum numerorum de maioribus », il resultato verrà a scriversi al di sopra dei due numeri disposti in colonna; così ad esempio

$$\begin{array}{r} 46 \\ \hline 85 \\ 39 \end{array}$$

Qui toglier 9 da 5 est impossibile, unde addat 10 eiusdem 5, erunt 15 » e così via; però « et pro additis 10, retineat in manu I quod addat cum 3, erunt 4 que extrahat de 8 remanent 4 ». Con la variante, dunque, che, anzichè diminuire 8 di 1 come oggi faremmo, si aumenta di 1 il 3.

Per la prova si ricorrerà ancora a quella per 9 e, poi, alla addizione del «residuo» col «minore» che dovrà dare il «maggiore».

***

Quando si passi alla trattazione della moltiplicazione incontreremo sovente una raccomandazione preliminare: «si vuole tenere a mente» le «librettine», cioè le tavole dei prodotti e, avvertiti di ciò, passiamo alla analisi dei vari procedimenti che s'incontrano.

Quello sul quale Leonardo si intrattiene più a lungo, e che nel seguito sarà detto «per crocetta», verrà mostrato da due esempi forniti da quell'autore che pone sempre il resultato, detto «summa», al di sopra dei due fattori i quale sono disposti come pure oggi si dispongono. Nella moliplicazione

$$\begin{array}{r} 1913 \\ \hline 37 \\ 49 \end{array}$$

il procedimento si svolge secondo le fasi seguenti:

$$7 \times 9 = 63,$$

si pone il 3 sul 7 e si conserva il 6;

$$7 \times 4 = 28,$$

$$28 + 6 = 34,$$

$$9 \times 3 = 27,$$

$$34 + 27 = 61,$$

si pone l'1 sul 3 e si conserva il 6

$$3 \times 4 = 12$$

$$12 + 6 = 18$$

si pone il 18 dinanzi all'1.

Nella moltiplicazione, in verità più complessa,

$$\begin{array}{r} 56088 \\ \hline 123 \\ 456 \end{array}$$

le fasi dei calcoli si susseguono come appresso:

$$3 \times 6 = 18,$$

si pone l'8 sopra il 3 e si conserva l'1;

$$3 \times 5 = 15,$$

$$15 + 1 = 16,$$

$$6 \times 2 = 12,$$

$$16 + 12 = 28,$$

si pone l'8 sopra il 2 e si conserva il 2;

$$3 \times 4 = 12,$$

$$6 \times 1 = 6,$$

$$2 \times 5 = 10,$$

$$12 + 6 + 10 + 2 = 30,$$

si pone lo 0 sull'1 e si conserva il 3;

$$2 \times 4 = 8,$$

$$5 \times 1 = 5,$$

$$8 + 5 + 3 = 16,$$

si pone il 6 dinanzi lo 0 e si conserva l'1;

$$1 \times 4 = 4,$$

$$4 + 1 = 5,$$

si pone il 5 dinanzi al 6.

In tempi a noi più vicini, il pesciatino P. Lorenzo Forestani, nella sua *Pratica d'arithmetica e geometria,* dirà che questo metodo è « molto bello », ma « alquanto difficile per li molti incrociamenti » onde un esempio, quale il nostro secondo, sarà da lui destinato a quelli di « perspicace ingegno ».

Lo stesso Leonardo mostra però « alius modus multiplicandi valde laudabilis, maxime in multiplicandis magnis numeris » : quello col « quadrilaterum in forma scacherii ». Mostrerò come esempio la moltiplicazione che egli stesso esegue ricercando il prodotto di 4321 per 567

	4	3	2	1	
3	0	2	4	7	7
2	5	9	2	6	6
2	1	6	0	5	5

Notata la disposizione delle cifre dei fattori, presento il dispositivo della successione dei calcoli :

$$1 \times 7 = 7,$$

si pone il 7 nella casella alta di destra ;

$$2 \times 7 = 14,$$

si pone il 4 nella casella che precede e si conserva l'1 ;

$$3 \times 7 = 21,$$

$$21 + 1 = 22,$$

si pone il 2 nella casella che precede e si conserva il 2 ;

$$4 \times 7 = 28,$$

$$28 + 2 = 30,$$

si pongono lo 0 e il 3 nella casella che precedono ;

in modo analogo si perviene al riempimento delle caselle delle due sottostanti righe. Per ottenere il prodotto si sommano i numeri contenuti nelle diagonali che vanno dall'alto in basso e da sinistra a destra, così

7 e lo si segna 7;

$4 + 6 = 10$,

si segna lo 0 a sinistra del 7 e si conserva l'1;

$2 + 2 + 5 + 1 = 10$

si segna lo 0 a sinistra dello 0 e si conserva l'1;

$0 + 9 + 0 + 1 = 10$

si segna lo 0 a sinistra dello 0 e si conserva l'1;

$3 + 5 + 6 + 1 = 15$

si segna il 5 a sinistra dello 0 e si conserva l'1;

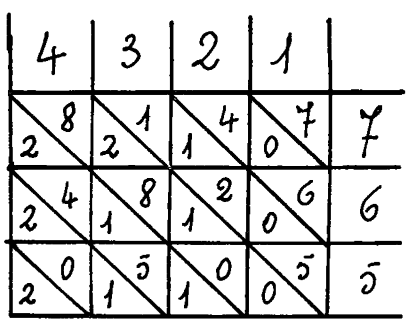
$2 + 1 + 1 = 4$,

e si segna il 4 a sinistra del 5;

2 e lo si segna a sinistra del 5;

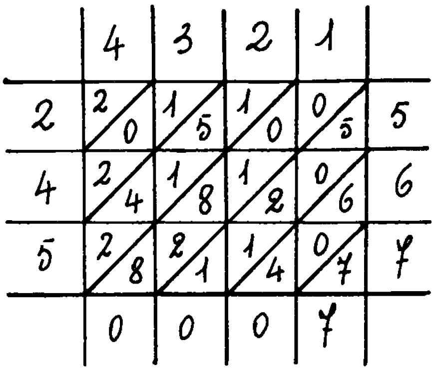
si giunge, in tal guisa, alla determinazione del prodotto 2450007.

Una variante a tale procedimento, consistente nello scrivere i singoli prodotti per intero nelle caselle, si trova mostrata in un



codice del XV secolo intitolato *Algorismus* in cui è detto del moltiplicare « per scachero ». Mostro il dispositivo relativo alla moltiplicazione dei due numeri precedentemente considerati dove il prodotto si deduce effettuando le somme secondo le diagonali segnate.

Altra variante, che permette di ritrovare il prodotto sui lati di sinistra e in basso del rettangolo, ci è mostrata dalla moltiplicazione « per quadro » insegnata nel *Tractatus algorismi* di M° Iacopo « de Florentia apud montem Pesulanum » contenuto in un codice Riccardiano datato dei primi del Quattrocento; la mostrerò moltiplicando i soliti numeri, così



dove è da notarsi la inversione delle cifre del fattore disposto sul lato di destra del rettangolo.

Più tardi comparirà il dispositivo da noi pure oggi adottato che il predetto M° Iacopo dirà « per bericuocclo » lo chiamerà Filippo Calandri quando, nella sua *Arithmetica*, mostra a Giuliano de' Medici figlio di Lorenzo il Magnifico che « 543 vie 654 fanno » etc..

Simile a questo, ma con la inversione dei prodotti parziali, sarà il moltiplicar « per castelluccio » assai usato in Firenze che trovo in autori più tardi

$$\begin{array}{r} 549 \\ 438 \\ \hline 219000 \\ 17520 \\ 3942 \\ \hline 240462 \end{array}$$

e quello « per l' adietro » che è il « proprio universal multiplicare » adoperato in Firenze che traggo, come il precedente, dalla ricordata opera del Forestani

$$\begin{array}{c} 54 \text{------------} 43 \\ \hline 2150 \\ \ \ 172 \\ \hline 2322 \end{array}$$

e che si differenzia dal precedente solo per la disposizione dei due fattori.

* * *

L' operazione del dividere, o « del partire » come si dirà in volgare, è certamente la più complessa onde non dispiacerà veder qui raccomandazioni ed esercizi che in tempi posteriori porrà ancora il solito Forestani. Il partir « per testa » o « per colonna », egli avverte, è « il primo modo del partire, che nelle scuole s' esserciti da' fanciulli » ; così si esegue la divisione per un numero di una cifra

$$\begin{array}{ll} 2) & 9876 \\ & 4938 \end{array}$$

Ci parla poi del partire « a regolo » ponendo l' eventuale resto a sinistra del quoziente e procedendo sempre nella divisione, per il medesimo numero o per numeri diversi, del quoziente provato alla cui sinistra sia posto, com' è detto il precedente resto ; così, ad esempio, dividendo sempre per 4,

$$\begin{array}{rl} & \ \ \ \ 4 \\ & 234567 \\ 3 & 058641 \\ 1 & 764660 \\ 0 & 441165 \\ 1 & 110291 \end{array}$$

o, dividendo successivamente per 4, 5 6, 7, 8,

da 4 fino a 8
234567
3 058641
1 611728
2 268621
5 324088
0 665511

E « quante più regole farai, — ci dice il Forestani — tanto più ti praticherai, e manderai a memoria le librettine, si che bisogna durar fatiga, perchè *Nulla virtus est sine labore,* e questo afferma il Filosofo, *quod virtus consistit, circa difficile, et iterum bonum est difficile, malum autem facile.* Di maniera che sempre le cose laudabili s' acquistano con difficoltà e perciò il nostro Poeta Dante n' invita, dicendo

Hormai convien figliuol che tu ti spoltri
Disse il Maestro mio, che pur in piuma
In fama non si vien, nè sotto coltre.
Sotto la qual chi sua vita consuma,
Cotal vestiglio di se in terra lascia,
Qual fumo in aria, o nell' acqua la schiuma.

« Sono alcuni curiosi i quali vanno alle scuole, et in 4. o 6. giorni vorrebbero abbracciare tutte le scienze, e non hanno parte alcuna di patienza; e quel che è peggio si lamentano de' Maesti, che li trattengono qualche giorno sopra una regola, o propositione, non havendo riguardo, che qualunque edifitio mal fondato in breve tempo cade, e và in rovina, ma questi tali i lor fondamenti stabili li fanno nelle vanità, lascivie, e giuochi, dietro ai quali andaranno mesi, et anni, di giorno, e di notte con mille biasimi, et infamie, con danno grandemente dell' anima, e del corpo, consumando i beni paterni, e materni, et alla fine si trovano senza virtù, e senza robba, perciò che non imparano cosa, che col tempo, gli habbia ad apportare utilità alcuna: perciò che quelle virtù, che li possono immortalare, e render giovevoli a ciascuno sono da quelli disprezzate, e si vergognano di andare alle scuole àd impararle. ».

Passerò adesso ad illustrare il procedimento seguito dal Fibonacci per calcolare il quoziente di 24059 per 31. Si comincia col porre il divisore sotto il dividendo, in colonna come fossimo per eseguire l'addizione, indi si procede come appresso. Giacchè il 24 è minore del 31, si considera il 240 in cui, il 31, sta 7 volte (il 7 si segna nella riga al disotto del divisore e in colonna con lo 0 del dividendo); poi si dice: 7 per 3 fa 21, a 24 manca 3 (si scrive il 3 sopra il 4); 7 per 1 fa 7, a 30 manca 23 (si scrive il 2 sopra il 3 e il 3 sopra lo 0); onde abbiamo

```
 2
 33
24059
   31
  7
```

Ora si considera il 235, che è disposto su varie righe, in esso, il 31, sta 7 volte (il 7 si scrive a destra del precedente 7): poi si dice: 7 per 3 fa 21, a 23 manca 2 (si scrive il 2 sopra l'altro 3); 7 per 1 fa 7, a 25 manca 18 (si scrive l'1 sopra il 2 di destra e l'8 sopra il 5); onde abbiamo

```
  1
 22
 338
24059
   31
  77
```

Ora si considera il 189 in cui, il 31, sta 6 volte (il 6 si scrive a destra del secondo 7); poi si dice: 6 per 3 fa 18, a 18 non manca nulla; 6 per 1 fa 6, a 9 manca 3; abbiamo

```
  1
 22
 338
24059
   31
  776
```

e resta 3 « que ponat super virgula de 31 », cioè si scriva 8/31, ed il quoziente è esattamente 776 3/31.

Il dispositivo si sarebbe potuto completare ponendo il resto 3 sopra il 9 e collocando degli zeri quando si otteneva un resto nullo, così

```
  0
  1
 220
 3383
24059
   31
  776
```

Troviamo più tardi il « partir per galea o galera » nel cui dispositivo compare, al disopra del dividendo, tutto ciò che trovavasi nel precedente metodo; ma il quoziente sta a destra del dividendo ed il divisore viene ricostituito ogni volta che si trova una nuova cifra del quoziente. Mostrerò qui di seguito le varie fasi di questo notevole metodo

```
 2
 33
24059  (7
 31

  1
 22
 338
24059  (77
 311
  3

   0
   1
  220
  3383
 24059  (776
  3111
   33
```

Il Forestani commenta che questo procedimento « è molto bello, e speditivo, ma assai più difficile per i principianti, che non è partire a Danda »; di questo si parlerà fra poco.

La denominazione riferita è dovuta al fatto che il dispositivo dei calcoli viene ad assumere la forma di una imbarcazione: ricordo di essermi imbattuto in un ben studiato esempio che mostrava un tre–alberi con le vele spiegate.

Aggiungerò per finire che fra le prime forme della attuale disposizione trovo il « partitore », cioè il divisore, alla sinistra del « partitivo », che sarebbe il dividendo, e il quoziente nel luogo ora occupato dal divisore; così nella divisione di 85796 per 687,

```
687)          85796  (124
              687
              -----
              1709
              1374
              -----
               3356
               2748
              -----
                608
```

E questo si dirà il « partire a danda » con la specificazione di « danda alla lunga » quando per effettuare la sottrazione si pone il prodotto sotto il precedente resto parziale, altrimenti si dirà « danda alla breve ». Il nome si spiega, forse, « perchè le cifre, scritte le une sotto le altre somigliano in certo modo con la loro disposizione a ciascuna di quelle due cigne, con le quali si reggono per di dietro i bambini quando incominciano a camminare, e che in molte parti di Toscana diconsi Dande. » (*Vocabolario degli accademici della Crusca*).

Il Forestani, infine, dice che questo metodo « è molto bello, e necessario a chi esperto ragioniere esser desidera ».

* * *

E qui concludo questa rapida corsa fra i procedimenti d'abbaco per i numeri espressi colle « figure degli Indi », numeri « sani » o interi cioè; altra volta potrei mostrare i calcoli dei « rotti » o frazioni e com'esse si « schisano » cioè si semplificano dividendo « denominante » (numeratore e denominatore) per il loro « maggior commune ripiego » che è poi il loro massimo comun divisore.