Bollettino
Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* V. L. Zaguskin, Handbook of Numerical Methods for Solution of Equations, Pergamon Press, London, 1961 (L. Caprioli)
* Giuseppe Belardinelli, Fonctions Hypergéometriques de plusieurs variables ed résolution analytique des équations algébriques générales,Gauthier-Villars, Paris, 1960 (L. Caprioli)
* G. Papy, I gruppi, Feltrinelli, Milano (Luigi Antonio Rosati)
* Selected Papers of Richard von Mises, Vol II: Probability and Statistics; General, Amer. Math. Soc., Providence, 1964 (Bruno de Finetti)
* K. Pach, T. Frey, Vector and tensor analysis, Terra, Budapest, 1964 (Dario Graffi)
* H. Lebesgue, En marge du calcul des variations, Insitut de Mathématiques, Université, Genève, 1963 (Silvio Cinquini)
* Oeuvres de Camille Jordan, Gauthier-Villars, Paris, Vol. I, II, III, 1961-1962 (G. Sansone)
* Yu. V. Linnik, Decomposition of Probability distributions, Oliver and Boyd, Edinburgh London, 1964 (G. Sansone)
* Karl Strubecker, Differentialgeometrie Band I. Kurven-theorie der Ebene und des Raumes, W. de Gruyter, Berlin, 1964 (G. Sansone)
* E. W. Beth, I fondamenti logici della Matematica, Feltrinelli, Milano, 1963 (Antonio Pignedoli)
* Francesco G. Tricomi, Istituzioni di Analisi Superiore, Edizioni Cedam, Padova, 1964 (R. Nardini)
* R. Zurmühl, Matrizen und ihre technischen Anwendungen, Springer-Verlag, Berlin, 1964 (R. Nardini)
* J. Dieudonné, Fondaments de l'analyse moderne, Gauthier-Villars, Paris, 1963 (Gianfranco Cimmino)
* G. Vranceanu, Leçon de Géometrie différentielle, Vol. I, II, Gauthier-Villars, Paris, 1955-1956 (F. Fava)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **19** (1964), n.4, p. 503–518.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_4_503_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

RECENSIONI

V. L. Zaguskin, *Handbook of Numerical Methods for Solution of Equations*, (Trad. dal russo di G. O. Harding, Pergamon Press, London, 1961, XIX + 195 pp., 40 Sc.).

Il volume (dedicato nella edizione originale, agli ingegneri ed agli studenti degli Istituti Tecnici russi) si propone di illustrare i più importanti fra i numerosi procedimenti per la risoluzione numerica delle equazioni (algebri che e trascendenti) che, particolarmente in quest'ultimo ventennio, sono stati oggetto di numerose ricerche. A queste il volume fa frequente riferimento, per quanto riguarda le questioni di carattere teorico; e si dedica, più in particolare, all'aspetto strumentale dei vari metodi, ai criteri per la maggiorazione degli errori e per il computo e la eventuale riduzione delle incertezze delle valutazioni approssimate.

Due capitoli (il primo è una sintesi delle proprietà dei polinomi e dei fondamenti di analisi algebrica; il secondo tratta delle approssimazioni numeriche e delle relative incertezze) precedono l'esposizione oggetto del libro, che s'articola in quattro successivi capitoli. Nel primo di questi (III del volume) sono illustrati i metodi di Gräffe-Lobatchewsky, di Brodetsky-Smeal, di Bernoulli e di Lin (questi ultimi preceduti da un breve cenno sui metodi iterativi). Il IV capitolo tratta, in sostanza, altri metodi di successive approssimazioni e, in particolare, quelli classici di Newton, e di Bairstow, oltre ad una variante del procedimento di Lin proposta da A. Y. Belostotsky. Degni di nota alcuni criteri per accrescere, in certe condizioni, la rapidità di convergenza di questi metodi. Al particolare problema della risoluzione delle equazioni di secondo, terzo, quarto e quinto grado ed alla estrazione di radici è dedicato il capitolo V. Alcuni procedimenti di risoluzione numerica di sistemi di equazioni (lineari e non), e precisamente: il metodo d'iterazione (e variante di Seidel) ed il metodo di Newton, sono brevemente illustrati nel VI ed ultimo capitolo, insieme al metodo classico di Gauss per i sistemi lineari. Chiudono il volume una tavola numerica per la determinazione speditiva d'una radice reale dell'equazione cubica ed una sufficiente bibliografia.

Il fine soltanto strumentale che, dichiaratamente, l'A. si è proposto e che può ben dirsi raggiunto, giustifica l'aspetto talora frammentario del l'esposizione, sempre, comunque, chiara ed arricchita da molti e ben scelti esercizi.

L. Caprioli

Giuseppe Belardinelli, *Fonctions Hypergéometriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales*, (Mém. des Sciences Mathématiques, fasc. CXLV, Gauth. - Vill., Paris, 1960, 74 pp., 15 NF).

Breve, ma di alto pregio scientifico per la chiarezza della esposizione, per la ricchezza della bibliografia riportata, questo « Mémorial » pone in chiara luce l'interesse delle funzioni ipergeometriche nella teoria delle funzioni ed il ruolo fondamentale che può essere attribuito alle funzioni ipergeometriche di più variabili nella risoluzione analitica della equazione algebrica generale.

L'opera s'articola in due parti, la prima delle quali richiama: la serie ipergeometrica di Gauss, l'equazione differenziale e la funzione di Gauss e le rappresentazioni di quest'ultima secondo Eulero, Pincherle, Mellin e Barnes (Cap. I); le funzioni ipergeometriche d'ordine superiore (e sempre d'una sola variabile, Cap. II) e le funzioni d'ordine superiore in più variabili (di Appel, di Lauricella, di Horn, di Kampé de Fériet, Cap. III).

Un breve cenno storico sulla risoluzione dell'equazione di quinto grado apre la seconda parte, di cui un primo capitolo (IV) tratta lo studio dell'equazione trinomia generale (formule di Heymann-Capelli e di Harley-Heymann-Mellin). L'equazione algebrica generale è oggetto dell'ultimo capitolo (V): sono qui studiati il sistema differenziale risolvente di Mellin, le serie di Lagrange e di Capelli; e, circa le proprietà di queste ultime, il teorema di Birkeland e le sue connessioni con alcuni risultati di Belardinelli.

L. CAPRIOLI

G. PAPY, «I gruppi», Feltrinelli, Collana di aggiornamento e didassi, pp. 264 (traduzione dal francese di A. Pescarini).

Si tratta di un testo di iniziazione agli elementi fondamentali della teoria dei gruppi e, come avverte l'A. nella prefazione, esso si rivolge particolarmente ai professori e agli studenti delle scuole secondarie superiori. La trattazione è pertanto sempre chiara e precisa e abbonda di esempi scelti molto appropriatamente nel bagaglio di cognizioni di uno studente di scuola media superiore.

Dei dieci capitoli che compongono l'opera i primi tre sono interamente dedicati alla definizione di gruppo, il quarto è dedicato al concetto di sottogruppo e il quinto ai gruppi abeliani. Nel sesto capitolo, attraverso uno studio dettagliato del gruppo degli interi, si arriva ai teoremi fondamentali dell'aritmetica elementare. La trattazione serve anche ad illustrare il concetto di reticolo e ad introdurre quello di anello.

Il settimo capitolo è dedicato ai concetti di omomorfismo e di isomorfismo e l'ottavo ai gruppi di permutazioni. Nel nono capitolo l'introduzione del concetto di gruppo con operatori permette di inquadrare la nozione di spazio vettoriale e quella di ideale. Nell'ultimo capitolo vengono dimostrati i teoremi di Jordan-Hölder, Schreier e Zassenhaus.

Come appare dal contenuto dei capitoli, la nozione di gruppo viene usata sia per lo studio di argomenti d'algebra e d'aritmetica elementari sia per l'introduzione di molti concetti d'algebra astratta, sicchè appare chiaramente la portata del concetto di gruppo e l'importanza che esso assume nella costruzione di diverse parti della matematica.

Interessanti ed originali tavole a colori, didatticamente indovinate, fanno appello all'intuizione visiva del lettore e numerosissimi esercizi illustrano i dieci capitoli.

La lettura di questo libro si presenta particolarmente utile per i professori medi di vecchia preparazione che potranno rinnovare la propria cultura ed adeguare il proprio insegnamento ai criteri che si vanno sperimentando nei cosiddetti « corsi pilota » Anche i nuovi laureati e gli studenti dei corsi universitari di algebra potranno attingervi chiarimenti utili ed esempi istruttivi.

Il libro presuppone una certa conoscenza di elementi di teoria degli insiemi; ad ogni modo contiene anche una breve appendice (appena un vocabolario) sulle principali definizioni e notazioni insiemistiche utilizzate.

LUIGI ANTONIO ROSATI

Selected Papers of Richard von Mises, Vol. II: *Probability and Statistics; General;* Amer. Math. Soc., Providence, 1964.

Dopo il primo volume (Geometria, Meccanica, Analisi), questo secondo (ed ultimo) è dedicato per la massima parte (28 lavori per complessive 445 pagine) ai contributi di von Mises alla teoria delle probabilità e alla statistica e si conclude con alcuni scritti (9, per 106 pagine) di carattere generale e vario. Tra questi, il primo e l'ultimo (concernenti risp. K. J. Saliger, uno studioso progettista e costruttore di aerei morto in un volo di collaudo nel 1917, ed il poeta Rainer Maria Rilke) servono un po' come casi-limite a illustrare la personalità e la vastità d'interessi di von Mises, che gli altri saggi delineano in modo perspicuo e con stretto riferimento ai campi di ricerca coltivati ed agli argomenti scientifici trattati. Può ben dirsi che in essi si trovi la chiave per penetrare i motivi che spiegano la scelta di dati atteggiamenti e il particolare interesse per dati argomenti; specie per la comprensione e la giusta collocazione dei contributi alla probabilità e la statistica appare opportuno iniziare la lettura dai saggi di carattere generale.

Ne balza vivida l'immagine del faticoso contrastato procedere delle scoperte e vedute chiarificatrici della scienza in un mondo sempre irretito da fumosità metafisiche e da pseudoproblemi dovuti all'illusione che ogni accostamento di parole che sia grammaticalmente una frase costituisca una proposizione di cui abbia senso chiedere se sia vera o falsa indipendentemente dall'esistenza di un criterio operativo cui debba intendersi ricondotta. I passi in avanti sono quelli di Socrate, Galileo, Hume, Mach; le resistenze che puntellano l'arretratezza mentale possono esemplificarsi con Platone e Kant. Sarebbe troppo lungo anche solo accennare ai molteplici aspetti sotto i quali von Mises illustra e sostiene efficacemente la validità e l'importanza di tale punto di vista per la civiltà in generale, per la visione scientifica del mondo aperta ad ogni proprio superamento, per la connessione tra le varie scienze particolari e l'inserimento ovunque in esse della matematica, per l'unità di matematica « pura » e « applicata ».

Il von Mises designa la sua posizione come *positivismo* (vicino a quello del « circolo di Vienna »), ma, per il rigetto di ogni pretesa di giungere a conclusioni definitive ed esclusive, sarebbe forse più appropriato parlare di *pragmatismo* (come in Vailati; punto di vista cui, per chiarezza, dichiaro di aderire). Molti punti cruciali, molte delle consuete obiezioni (difficili a smantellare per le nebulosità e ambiguità di formulazione), trovano in questi scritti precisazioni e risposte ammirevoli per chiarezza ed efficacia.

* * *

Nella teoria delle probabilità c'è sempre da distinguere una parte riguardante le questioni controverse sul significato e l'interpretazione dei concetti e risultati e l'altra concernente gli sviluppi matematici sostanzialmente indipendenti da tali aspetti preliminari; tanto più ciò vale per von Mises, il cui nome è associato soprattutto ad una sua « interpretazione asintotica » della probabilità, che è discutibile, mentre molti contributi e punti di vista nella trattazione matematica di vecchi e nuovi problemi sono indubbiamente di grande valore.

La « interpretazione asintotica » consiste nel definire la probabilità come limite della frequenza su una successione di prove con risultati « irregolari » (colla sua terminologia, di un « Kollektiv » ove valgano il « Grenzwertaxiom » ed il « Regellosigkeitsaxiom »): si tratta del tentativo più spinto e consapevole di uscire dalla palude dei concetti sfuggenti in fatto di probabilità per approdare su un terreno solido, dal lato di un'interpretazione oggettiva. Per tale motivo, le obiezioni che egli muove ad altre teorie appaiono in genere fondate e tali da dover trovare consenziente chiunque accetti le stesse esigenze filosofiche, anche se per adeguarvisi abbia scelto di approdare sul lato opposto, quello dell'interpretazione soggettiva: si tratta di due concezioni estremamente lontane o vicine (come due punti poco al di qua o al di là del punto improprio) perchè rispondenti in modo diverso alla medesima esigenza di chiarezza. E ciascuna rimprovera all'altra e nega per sè il difetto di essere insufficiente ad eliminare il metafisicismo: è metafisico basare le applicazioni (sempre nel finito) su osservazioni gratuite non verificabili e irrilevanti circa ipotetiche successioni infinite, o basta come giustificazione dire che si tratta di un semplice « modello »? ed è metafisico all'opposto occuparsi dei giudizi di probabilità come tali, come gradi di fiducia, senza pretendere che « esista » un significato oggettivo? A proposito di « esiste », proprio von Mises (p. 543) dice chiaramente che in contesti simili a questo il termine « makes no sense »; e perchè non qui? Si tratta forse dell'effetto del piccolo divario che può tuttavia sussistere tra il positivismo di von Mises e quel che ho indicato come pragmatismo (e non è il caso di proseguire il confronto perchè ciò significherebbe approfittare della recensione per esporre una volta di più il proprio punto di vista).

* * *

Nella scelta e nella trattazione di problemi matematici di teoria delle probabilità, non relativi a dette questioni di principio, il von Mises ha una spiccata tendenza ed abilità per l'individuazione delle circostanze analitiche che producono risultati corrispondenti a delle applicazioni probabilistiche, giungendo in tal modo ad estendere tali conclusioni o precisare le ipotesi per essi necessarie o sufficienti. L'esempio più cospicuo è quello dell'estensione del « teorema centrale » (tendenza verso la « distribuzione normale », o gaussiana, o « degli errori ») dal caso consueto di una *somma* di un gran numero di grandezze aleatorie indipendenti a quelli di una loro « qualunque » *funzione statistica* (beninteso: « qualunque » salvo condizioni « poco restrittive »); su tale argomento si trova anche un articolo in italiano (l'unico in tale raccolta, dal « Giorn. Ist. It. Attuari », 1934), oltre ad uno in tedesco e tre in francese (*). Molto generale è pure l'impostazione conducente a considerare prodotti di funzioni per cui si portino a coincidere i massimi (p. 35); ma analoga cura di generalizzare e precisare condizioni e risultati s'incontra nello studio di vari interessanti problemi specifici, come quello degli eventi « rari » (p. 107), le iterazioni (p. 113), i valori estremi (p. 129 e p. 271), le probabilità di ripartizione e occupazione (p. 313), ecc. Menzioniamo ancora, per indicare l'interesse ad applicazioni effettive, uno studio sullo squilibrio della distribuzione per età della popolazione della Germania nel primo dopoguerra (p. 149), e, all'opposto, come contributi a problemi classici, quelli sul problema dei momenti (p. 295) e sulle leggi dei grandi numeri (p. 210 e altrove).

Vale la pena di notare come, in nesso a quest'ultimo argomento, il

(*) In tutto, i 28+9 lavori della I e II Parte sono: 14+6 in tedesco, 1+0 in italiano, 6+0 in francese, 7+3 in inglese (di questi 1+2 inediti); sono in tedesco gli scritti fino al 1933 e parecchi posteriori, dal 1934 e dal 1938 risp. cominciano quelli in francese ed in inglese. I rinvii indicano un lavoro mediante la 1ª pagina (o, talvolta, la pagina esatta).

von Mises abbini costantemente ai teoremi diretti quelli *inversi*, nel senso del teorema di Bayes, e come egli espressamente si distacchi e dissenta dal punto di vista (molto diffuso, specie quando scriveva) che di tale teorema voleva fare a meno (p. 445: « the basis of any statistical theory of inference is supplied by the concept due to Bayes »; « the Neyman Pearson method of testing hypotheses... leads to a weak and in many cases insufficient answer »; « it is to be hoped that, as the unjustified and unreasonable attacks on the Bayes'theory, initiated by R. A. Fisher, diminish, those and similar problems will attract the attention of competent statisticians »). Sebbene in questo vi sia piena concordanza con la concezione soggettivistica, rimane naturalmente la differenza d'interpretazione: le probabilità (iniziali, come ogni altra) vanno sempre pensate come frequenze limiti (e, con tale ingombrante complicazione, sarebbe difficile qualsiasi effettiva applicazione). Però in un caso che porta ad un'esemplificazione effettiva (p. 532) von Mises mostra di valutare la « probabilità iniziale » proprio come farebbe un soggettivista, ossia tenendo conto di tutto ciò che può influire sulla sua opinione: « everything we know about the die a priori (its make, the people involved in the tossing) has decisively more bearing upon our judgement than the result of three tossings ». È vero che egli si scusa poi (p. 535, nota (5)) di essersi espresso in modo « colloquial », « not in the tecnical sense of my theory of probability », ma resta il fatto che tale tra duzione sarebbe impossibile senza capovolgere il significato chiarissimo di un'affermazione del genere.

Il volume, ottimamente presentato (e con due ritratti dell'Autore), si chiude con un'accurata bibliografia (145 lavori di cui 14 volumi, oltre a brevi note, manoscritti inediti, recensioni, scritti su R. M. Rilke, ecc)

BRUNO DE FINETTI

K. PACH e T. FREY, *Vector and tensor analysis*, Terra, Budapest; 1964.

I primi quattro capitoli di questo libro contengono quelle nozioni di calcolo vettoriale che si premettono a qualsiasi corso di Meccanica razionale (cioè l'algebra dei vettori e le proprietà dei vettori funzioni di una variabile scalare) e la teoria dei campi vettoriali. Nel quinto e nel sesto capitolo si inizia la trattazione dei tensori nello spazio ordinario, che però gli AA. introducono e studiano solo come omografie o iperomografie (corrispondenti ai tensori tripli) vettoriali, cioè conforme ai procedimenti della scuola italiana di cal colo vettoriale (Burali-Forti, Marcolongo, Burgatti, Boggio e loro discepoli) probabilmente però ad essi sconosciuta come appare dalle notazioni usate. Quindi nei capitoli in discorso si studiano le proprietà delle omografie e delle iperomografie, in particolare dell'omografia derivata da un vettore rispetto a un punto (detta dagli AA. gradiente di un vettore), i teoremi integrali, e le loro applicazioni; particolarmente interessante la trattazione dei campi vettoriali non stazionari. Nell'ultimo capitolo si introducono le coordinate curvilinee e le prime nozioni di calcolo tensoriale come covarianza e controvarianza, si giunge però solo fino all'espressione del gradiente, della divergenza e del rotazionale in coordinate curvilinee, omettendo gli altri sviluppi di calcolo tensoriale (i simboli di Christoffel non sono neppure citati) e limitandosi sempre allo spazio ordinario chè, solo nell'ultima pagina, si accenna allo spazio a più di tre dimensioni.

Comunque il libro costituisce un'ottima introduzione alla Fisica matematica classica. Inoltre contiene numerose e interessanti applicazioni del calcolo vettorale (specialmente geometriche), perciò il libro si presenta assai utile, non solo per gli ingegneri a cui è dedicato, ma anche per i matematici.

DARIO GRAFFI

H. LEBESGUE, *En marge du calcul des variations*, Institut de Mathématiques, Université, Genève, 1963, pp. 122.

Il presente volumetto (n. 12 della Collezione delle Monografie dell'« Enseignement mathématique ») riproduce un manoscritto dell'autorevole Maestro della teoria delle funzioni di variabile reale scomparso nel 1941. Innanzi tutto, pur tralasciando di manifestare la naturale sorpresa per il fatto che tale manoscritto è stato trovato soltanto recentemente, si deve esprimere a L.C. Young il più vivo ringraziamento per essersi assunto l'impegno di curarne la pubblicazione.

A prescindere da alcune pagine intercalate per ragioni esplicative, che si presume siano state scritte alla data alla quale Lebesgue preparò il testo della pubblicazione, questa riproduce, con qualche eventuale ritocco, alcuni articoli apparsi in data più o meno lontana in diversi giornali matematici.

Del tutto elementare è la trattazione del Cap. I, nel quale è riportato, senza alcuna variante, un articolo del 1918 sul minimo della somma delle distanze PA, PB, PC da tre punti assegnati A, B, C di un punto P variabile nel piano ABC.

Oggetto del Cap. II è il problema degli isoperimetri, inteso quale minimo del rapporto tra il quadrato del perimetro e l'area da esso racchiusa. Dopo alcuni preliminari viene riportato un articolo pubblicato da Lebesgue nel 1914, mentre, attraverso alle considerazioni sviluppate nelle successive pagine, l'A. perviene a concludere che, come è ben noto, il metodo diretto ha come primo obiettivo la dimostrazione dell'esistenza dell'elemento estremante in modo indipendente dalle equazioni differenziali, le quali intervengono successivamente per determinare l'estremante stesso.

Nel Cap. III viene riportato l'articolo del 1921: « Sur quelques questions de minimum relatives aux courbes orbiformes et sur leurs rapports avec le Calcul des variations », al quale Lebesgue ha arrecato qualche variante per eliminare alcune obiezioni, che gli erano state comunicate da T. Bonnesen.

D'origine un po' diversa è il testo del Cap. IV, avente come oggetto il problema della curva di minima distanza congiungente due punti di una superficie sviluppabile: esso trae origine dalle lezioni di un corso sulle applicazioni geometriche dell'Analisi svolto alla Sorbonne negli anni 1910-1921.

Così pure il Cap. V, che contiene una rapida esposizione del metodo classico del Calcolo delle variazioni, è tratto da un corso di lezioni tenute da Lebesgue al Collège de France.

La Monografia termina con il Cap. VI, la cui parte prevalente è costituita da una coppia di articoli del 1937, nei quali Lebesgue sviluppa un'acuta critica alla dimostrazione di un lemma geometrico (il cui enunciato, peraltro, è esatto), sul quale è basato il metodo di Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet. Tale coppia di articoli è preceduta da alcune pagine inedite, le quali costituiscono un'introduzione storica al metodo diretto del Calcolo delle variazioni. Lebesgue ricorda le origini del metodo, le quali risalgono a C. Arzelà e a D. Hilbert, e l'ufficio del teorema di Giulio Ascoli; si sofferma sulla propria « Thèse » nella quale (vogliamo ricordarlo esplicitamente nelle presenti righe) la definizione di curva rettificabile fornisce un esempio di semicontinuità nel campo funzionale, e, pur riconoscendo l'importanza dell'opera di L. Tonelli nel Calcolo delle variazioni, vuole « rappeler la toute petite part qui me revient dans ces progrès ». Ma questo desiderio è in antitesi con la realtà affermata da scienziati di indiscussa autorità (ad esempio: J. Hadamard; V. Volterra e J. Pérès), allorchè con riferimento al Calcolo delle variazioni si sono espressi sulla « découverte de la semicontinuité que l'on doit à M. Tonelli », e hanno scritto di lui quale « veritable fondateur des méthodes nouvelles ». Chi ha meditato nei propri anni giovanili l'opera scientifica, profonda e costruttiva, di H. Lebesgue sente tanta ammirazione per il sommo autore della teoria delle funzioni di variabile reale, che il « rappeler la toute petite part », anche quando l'affermazione fosse del tutto esatta, nulla potrebbe aggiungere alla di lui figura di Scienziato universalmente riconosciuta.

La pubblicazione della Monografia in esame, la quale presenta un interesse storico, dà occasione di richiamare l'attenzione dei giovani studiosi su H. Lebesgue, uno dei più grandi matematici della prima parte dell'attuale secolo.

Silvio Cinquini

Oeuvres de Camille Jordan publiées sous la direction de M. Gaston Julia, Membre de l'Institut par M. Jean Dieudonné professeur à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques; T. I., XL + 498 pp., 1961, (85 N. F.); T. II, VI + 556 pp., 1961, (85 N. F.); T. III, XXI + 554 pp., 1962, (85 N. F.), (Paris Gauthier-Villars).

Nella letteratura matematica, sopratutto alla fine della seconda guerra mondiale, è stata ripresa la consuetudine di pubblicare le memorie dei matematici di massimo risalto durante la loro vita o quasi subito dopo la loro scomparsa. Sono apparse in Francia le memorie di E. Cartan, in Italia quelle di L. Tonelli e di R. Caccioppoli, in Germania quelle di C. Carathéodory e di E. Hecke; in U.S.A. quelle di J. v. Neuman, in Ungheria quelle di A. Haar e di F. Riesz, in U.R.S.S. quelle di S. N. Bernstein.

La ristampa delle memorie dei grandi matematici scomparsi nel primo quarantennio del nostro secolo era invece pressapoco cessata e tale ristampa diveniva via via più difficile perchè fatalmente si assottigliavano le fila di coloro che, essendo stati scolari di questi Maestri, meglio ne potevano curare la pubblicazione.

Fortunatamente anche per queste ristampe, sopratutto nell'ultimo decennio, vi è stata una ripresa, e in Francia, ultimata l'edizione in 11 volumi delle memorie di H. Poincaré, appare ora quelle delle memorie di Camille Jordan.

Jean Dieudonné ha raccolto in quattro volumi le memorie e le note di Jordan, e nel periodo 1961-1962 la Casa Editrice Gauthier-Villars ha già pubblicato i primi tre volumi.

I T. I e II contengono i lavori sulla teoria dei gruppi, il T. III i lavori dedicati all'algebra lineare e alla teoria dei numeri.

G. Julia ha premesso al I vol. una bella prefazione che tratteggia in brevi linee la grande Opera Scientifica di C. Jordan che con E. Galois e S. Lie può considerarsi uno dei tre grandi creatori della teoria dei gruppi.

Nel T. I all'indice cronologico delle memorie e note di Jordan segue un'introduzione di 26 pagine di J. Dieudonné sia al tomo I che al tomo II, nella quale le ricerche di Jordan sono associate per affinità in 5 gruppi:

I) Generalità sui gruppi; applicazioni alle equazioni algebriche (teoria di Galois); II) Gruppi lineari su un corpo primo finito; III) Sottogruppi del gruppo lineare complesso; IV) Gruppi transitivi e gruppi primitivi; V) La costruzione dei gruppi risolubili.

Di queste ricerche il Dieudonné fa un'analisi completa; i principali risultati sono da lui riassunti esprimendoli in linguaggio moderno, indicando anche i lavori più recenti ove alcuni di questi stessi risultati sono ripresi e sviluppati.

Anche al T. III il Dieudonné premette una perspicua introduzione di 16 pagine suddividendo la materia in cinque gruppi: I) Geometria ad n dimensioni; II) Forme bilineari e forme quadratiche; III) Teoria degli invarianti; IV) Equivalenza aritmetica delle forme; V) Altri lavori di teoria dei numeri.

Il T. IV delle Opere di Jordan è dalla Casa Editrice Gauthier Villars annunciato come in corso di stampa.

Al Prof. Dieudonné che in questo periodo di grande fioritura di studi algebrici ha dato agli studiosi la possibilità di risalire per molte questioni in questo campo alle fonti, va la riconoscenza del mondo matematico.

G. SANSONE

YU. V. LINNIK, *Decomposition of Probability distributions*, edited by S. J. Taylor; (Oliver and Boyd, Edinburgh London), VIII + 242 (1964), 84 s.

S. J. Taylor, lettore di matematica al Westfield College di Londra, ha dato una buona traduzione dal russo del volume di Yu. V. Linnik « Decomposition of Probability distributions » apparso nel 1960.

La prima metà di questo volume riguarda la teoria delle funzioni caratteristiche; la seconda parte descrive i risultati più recenti, apparsi sopratutto nei periodici russi, sulla teoria della fattorizzazione delle funzioni di di stribuzione.

La trattazione della materia richiede l'uso raffinato della teoria delle funzioni di variabile reale e delle funzioni di una variabile complessa e perciò questo volume nel quale sono riportate ricerche fondamentali di H. Cramer, A. Ya Khintchine, P. Lévy e dello stesso Autore, può consi derarsi come un validissimo trattato dedicato a coloro che vogliono specializzarsi nell'applicazione dei metodi analitici al calcolo delle probabilità.

Il volume si compone di una Introduzione e di 13 Capitoli.

Nell'Introduzione si pone subito in risalto la connessione tra la fattorizzazione delle funzioni di distribuzione e la teoria delle variabili casuali, e nel Cap. I sono sobriamente richiamati alcuni risultati della teoria delle funzioni di variabile reale e di una variabile complessa necessari per la comprensione del testo. Seguono: 2 - Proprietà delle funzioni caratteristiche delle funzioni di distribuzione; 3 - Funzioni caratteristiche analitiche in una striscia; 4 La fattorizzazione e la α fattorizzazione delle funzioni di distribuzione le cui funzioni caratteristiche sono analitiche in una striscia; 5 - Teoremi concernenti la fattorizzazione delle funzioni di distribuzione Distri buzioni indecomponibili; 6 - Semplici teoremi sulla fattorizzazione delle distribuzioni infinitamente divisibili e relative applicazioni. I capitoli da 7 a 10 trattano la fattorizzazione delle funzioni di distribuzione infinitamente divisibili con spettri limitati e non limitati; i capitoli 11 e 12 contengono particolari risultati di H. Cramér, N. A. Spogov, O. V. Shalaevski, P. Lévy, D. A. Raikov.

Il cap. 13 è un supplemento contenente alcune congetture su nove problemi non risolti.

L'A. ha concentrato la materia in un numero limitato di pagine e ciò lo ha costretto a dare, pur senza nuocere alla chiarezza dell'esposizione, gli enunciati di alcuni teoremi.

Seguono al testo l'indice bibliografico e quello della materia.

G. SANSONE

KARL STRUBECKER, *Differentialgeometrie Band I. Kurven-theorie der Ebene und des Raumes*, Sammlung Goschen Band 1113/1113 a; Zweite, erweiterte Auflage mit 45 Figuren, W. de Gruyter. Berlin 1964, pp. 1-253.

L'A. pubblica la seconda edizione del I Vol. della sua Geometria Differenziale.

La prima edizione di 150 pagine con 18 figure apparve nel 1955; questa è ora arricchita di oltre cento pagine di testo e di 27 figure.

Lo studio è condotto simultaneamente nel campo reale e in quello complesso, il metodo vettoriale è applicato sistematicamente, la materia è esposta con grande chiarezza e concisione, cosicchè il lettore giunto alla fine è in grado di valutare l'assetto che l'A. ha dato ai due Capitoli della Geometria Differenziale sulle curve piane e sulle curve sghembe sia per quel che concerne la parte classica sia per alcune questioni di particolare interesse come per es. sulle ovali, sulle curve di Zindler, sulle curve di Bertrand, sulle curve del piano isotrope.

G. SANSONE

E.W. BETH, *I fondamenti logici della Matematica*, traduzione dal francese di Ettore Casari, Feltrinelli editore, Milano, 1963, pagine 335, prezzo lire 6000.

Nella collana di « Filosofia della Scienza » curata da Ludovico Geymonat appare questa traduzione dall'opera originale francese edita nel 1955 da Gauthier Villars a Parigi. L'opera consta di sei Libri ed è integrata da quattro Appendici e da altre aggiunte, tra cui Esercizi oltre che da una vasta serie di indicazioni bibliografiche. Dignitosa l'edizione curata da Feltrinelli.

Esordendo, l'autore, si richiama alla Teoria della Scienza in Aristotele. Egli scrive testualmente: « Per cogliere l'origine delle recenti discussioni sui fondamenti della Matematica è necessario risalire alla Teoria della Scienza di Aristotele. Le moderne concezioni di questo problema si oppongono tutte in un modo o nell'altro a questa teoria; questa infatti si rivela incapace di risolvere in modo soddisfacente i problemi sollevati dagli sviluppi moderni della Matematica ».

L'autore richiama il concetto di « Scienza deduttiva » in Aristotele e considera poi la Teoria della Scienza di Aristotele come punto di partenza della Metafisica tradizionale e della tradizionale Teoria della conoscenza. Accennando poi alla importanza della Matematica per la Filosofia tradizionale, l'Autore passa rapidamente a rilevare come, nell'età moderna, i rapporti intimi o, meglio gli intimi legami tra la Matematica e la Filosofia si siano spezzati. (Ciò in parte anche se non del tutto, sotto l'influenza del pensiero di Kant e dell'Idealismo tedesco). Lo scopo del volume è proprio quello di dare uno sguardo agli sviluppi moderni della Matematica ed alle concezioni contemporanee intorno agli sviluppi di questa Scienza, nonchè di spiegarne le conseguenze filosofiche.

Col libro secondo ha inizio la trattazione vera e propria. Ed il primo capitolo è dedicato all'esame dei fondamenti della Analisi elementare e si diparte dall'esame della definizione per astrazione. Ci si occupa quindi dei numeri interi e si accenna al passaggio ai numeri razionali, reali, complessi, ricordando anche al lettore la questione consistente nel domandarsi in che cosa consista la superiorità del sistema dei numeri complessi rispetto ai « corpi π radici » e ad altri eventuali sistemi paragonabili, problema trattato indipendentemente da D. van Dantzig, L.S. Pontrjagin ed R. Baer H. Hasse. Il Beth ricorda che il sistema dei numeri complessi si distingue per una combinazione unica di proprietà algebriche e topologiche.

Il secondo capitolo del Libro primo concerne la Teoria del numero naturale. L'autore fa notare come solo in tempi assai recenti si sia riusciti a sviluppare in modo soddisfacente la Teoria del numero naturale. Egli ricorda le concezioni, divergenti fra loro, di G. Cantor, C.S. Peirce, G. Frege, R. Dedekind; nel capitolo in questione verrà illustrato il metodo di Dedekind, dal quale quello di Peirce non si differenzia per molto. (L'autore illustrerà, invece, il metodo di Cantor e quello di Frege del terzo Libro dell'opera).

Si passa ad occuparsi del ragionamento per induzione, alla esposizione del metodo di Dedekind, per concludere poi discutendo la concordanza dei postulati con l'Aritmetica e facendo presente come l'Aritmetica assiomatizzata dalle ricerche di Dedekind e di Peano costituisca il punto di partenza adeguato per l'introduzione dei numeri interi, razionali reali, complessi come è stata illustrata precedentemente.

Il terzo Libro del volume è dedicato alla « Assiomatica formalizzata ». Un primo capitolo di tale libro riguarda la « Logica simbolica » e, dipartendosi dalla storia e dai principi della Logica elementare, giunge alle applicazioni della Logica elementare stessa ad accennare al problema di una « grande Logica », cioè al problema dell'esame della possibilità di costruire un sistema logico « tanto forte » da permettere di fare a meno di tutti i concetti fondamentali e di tutti i postulati accettati ordinariamente come punto di partenza delle teorie matematiche. Tentativi notevoli in questo senso — sia pure sollevanti grandi difficoltà — come quelli di Frege, di Russell e di Quine, vengono discussi nei libri quarto e quinto dell'opera di cui stiamo parlando.

Il secondo capitolo del terzo libro concerne la teoria della dimostrazione. L'autore fa notare subito come la teoria della dimostrazione di Hilbert costituisca un tentativo di consolidare la Matematica classica. Infatti, riconoscendo la serietà della situazione creata dalla scoperta delle antinomie, nonchè la fondatezza delle critiche di Brouwer al modo usuale di sviluppare la Matematica classica, Hilbert ha effettuato una formalizzazione, che si può dire radicale, della Matematica classica stessa ed ha sottoposto le teorie matematiche formalizzate ad una analisi metamatematica. Nell'ambito del capitolo, un paragrafo è dedicato, in particolare, alla non-contraddittorietà della logica degli enunciati, al metodo delle matrici ed al teorema di Lindenbaum; un altro paragrafo è dedicato al « teorema di deduzione » di J. Herbrand.

Il terzo capitolo del libro terzo è dedicato alla Sintassi, alla assiomatizzazione della Sintassi della Logica degli enunciati, alla aritmetizzazione della medesima, al primo ed al secondo teorema di Gödel ed alla loro influenza, cioè alla inevitabile e profonda revisione del punto di vista « finitista » sostenuto da Hilbert. Secondo il pensiero di Gödel, sarà, quindi, impossibile la dimostrazione della non-contraddittorietà della Aritmetica elementare mediante metodi strettamente finitisti.

Il quarto capitolo riguarda la Semantica. L'autore passa dall'analisi semantica della Logica elementare alla dimostrazione topologica del teorema di Löwenheim - Skolem - Gödel, al teorema di Herbrand, alla Logica elementare con identità, alla Logica intuizionistica di Heyting, alla Logica del secondo ordine, ad applicazioni del metodo semantico nella metodologia delle scienze deduttive, al metodo di Padoa etc.

Si passa poi al quarto libro, concernente l'esistenza delle entità matematiche. Esso è suddiviso in tre capitoli. Il primo di essi tratta del logicismo; il secondo della teoria degli insiemi; il terzo dell'intuizionismo. Nel primo di tali capitoli trovano posto l'esposizione del sistema logico di Frege e l'esposizione della antinomia di Russell.

Il secondo capitolo prende le mosse dalla considerazione della teoria degli insiemi da un punto di vista « ingenuo », cioè dal punto di vista di Cantor, il quale appare chiaramente dotato di carattere platonico, e secondo il quale « si chiama insieme ogni riunione di una totalità di certi *oggetti* tra loro ben distinti » detti « elementi » dell'insieme. (Il termine oggetto va preso, ivi, in senso molto lato, fino al concetto di « insieme di insiemi » — assioma di comprensione —). E va tenuto presente che il punto di vista « ingenuo » di Cantor permette di introdurre facilmente il concetto di *insieme vuoto* ed il concetto di *sottoinsieme*).

L'autore passa a trattare del numero cardinale, degli insiemi bene ordinati e del numero ordinale, dell'assioma di scelta. Poi, dopo paragrafi destinati ai numeri transfiniti, al problema e all'ipotesi del continuo, agli insieni finiti, alla assiomatizzazione di Zermelo, alla formalizzazione di Skolen, alla assiomatizzazione di Frenkel, e dopo un paragrafo destinato alla teoria degli insiemi nei suoi rapporti con la Logica, l'autore passa nella terza parte del libro quarto, di cui stiamo parlando, a trattare dell'intuizionismo. L'intuizionismo preparato, anzitutto, da Kant, poi da Kronecker e da Poincaré, è stato sviluppato da Brouwer e dalla sua Scuola. Esso si basa sui seguenti, fondamentali punti di vista: anzitutto non è possibile scindere l'indagine sui fondamenti della Matematica dalle considerazioni intorno alle condizioni sotto le quali ha luogo l'attività spirituale propria del matematico. Le ricerche che rinunciano a considerare tale problema non ci fanno conoscere nulla intorno alla natura vera della Matematica; ma, al più, ci possono dare notizie sull'aspetto esteriore della Matematica stessa.

È, poi, desiderabile riuscire a fondere la Matematica senza fare appello a idee preconcette intorno all'attività e alle entità matematiche. Infine, mentre la Matematica è indipendente dalla Logica, è questa che dipende dalla Matematica, e i principî logici ordinari non meritano, in Matematica, una fiducia illimitata.

Dopo una introduzione, i paragrafi della parte terza sono essenzialmente dedicati all'esistenza e non contraddittorietà, al principio del terzo escluso, alla teoria del continuo, all'Algebra e Geometria intuizioniste, alla Matematica stabile e alle Matematiche affermative di van Dantzig, nonchè alla Matematica senza negazione di Griss.

Il libro quinto è dedicato alle antinomie. « Mezzo secolo fa — scrive l'autore — il mondo scientifico fu scosso dalla scoperta, del tutto insospettata, di certe antinomie che sempravano minacciare i fondamenti della Logica e della Matematica; esse erano particolarmente spiacevoli per ricercatori come Cantor, Dedekind e Frege, che si erano sforzati di dare all'edificio matematico un fondamento ed una struttura atti a soddisfare le esigenze della Logica più stretta ».

Ma l'autore osserva come, dopo cinquanta anni di studî approfonditi, i Matematici abbiano imparato, con Poincarè, a trarre vantaggio dalle antinomie.

L'autore enumera le antinomie: di Russell, di Cantor, di Burali Forti, la celebre antinomia (di Epimenide cretese) « del mentitore ». Seguono le antinomie di Gulling, di Berry, di Richard, di Zermelo-König, di Skolem, le antinomie « della denotazione e dell'analisi », la pretesa antinomia « del risvegliatore », classica nei Diritto consuetudinario, derivante dal Diritto romano.

I paragrafi che seguono sono dedicati alla discussione delle antinomie ed, in particolare, alla osservazione di Behmann, ai risultati di Bochwar, all'assioma di riducibilità, alle ricerche di Quine, all'analisi delle antinomie semantiche, all'analisi della antinomia di Skolem, alla analisi delle antinomie della denotazione e dell'analisi.

Il sesto libro del volume contiene le conclusioni della trattazione. L'autore richiama gli sviluppi recenti nell'ambito della Filosofia generale e li considera come positivi per l'influenza sulla Filosofia generale. L'autore esamina i rapporti della Filosofia matematica col razionalismo tradizionale e con l'irrazionalismo moderno, inaugurato a seguito delle idee di Maine de Biran e di Schopenhauer, da Nietzche e da Bergson. Inquadra poi gli elementi caratteristici della attività matematica ed osserva infine, che « la Filosofia matematica occupa una posizione strategica in seno all'attività filosofica ».

Pare di non dovere aggiungere commenti circa la posizione e la importanza del volume nella attuale letteratura.

ANTONIO PIGNEDOLI

FRANCESCO G. TRICOMI, *Istituzioni di analisi superiore (Metodi matematici della fisica)*, Edizioni Cedam, Padova, 1964, di pag. X-472, L. 6.500.

È un ottimo trattato che offre una scelta di argomenti adatti ai due omonimi insegnamenti fondamentali contemplati per il terzo anno nel nuovo ordinamento dei corsi di laurea in matematica o in fisica. La materia è suddivisa nei seguenti capitoli: I) Elementi della teoria delle funzioni analitiche. II) Cenni sull'integrale di Lebesgue, gli spazi L e le distribuzioni. III) Elementi della teoria delle equazioni integrali. IV) Sviluppi in serie di funzioni ortogonali. V) Complementi sulle equazioni integrali a nucleo simmetrico. VI) Sulle equazioni differenziali nel campo reale. VII) Sulle equazioni differenziali nel campo analitico. VIII) Sulla rappresentazione delle funzioni mediante integrali. IX) Sulle equazioni a derivate parziali del secondo ordine.

L'esposizione è brillante e particolarmente impegnata sul piano didattico: ad aumentare l'efficacia al riguardo concorrono originali commenti intuitivi che spesso introducono o seguono concetti e risultati presentati con tutto rigore (o, talvolta, solo tratteggiati nelle linee essenziali per mantenere la trattazione nei limiti di un corso di ragionevole lunghezza).

Il libro contribuisce senz'altro (come si augura l'Autore) « a mantenere aperto un ponticello sul fossato che malauguratamente si va scavando fra i matematici puri e gli applicati » e può essere utile anche a coloro che desiderino aggiornare la loro non recente cultura matematica, estendendola a diversi argomenti che da poco sono entrati nell'insegnamento istituzionale dell'analisi.

R. NARDINI

R. ZURMÜHL, *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*, IV ed., Springer-Verlag, Berlin, 1964, di pag. XII-452, prezzo DM 36.

Questo noto trattato, scritto prevalentemente per gli ingegneri ma esauriente anche per quanto riguarda i fondamenti e gli sviluppi teorici dell'argomento, appare ora in una nuova rielaborata edizione.

I primi cinque capitoli (riguardanti il calcolo matriciale, le equazioni lineari, le forme quadratiche, il problema degli autovalori, la struttura delle matrici) non presentano cambiamenti sensibili; negli altri due capitoli (uno riguarda la risoluzione numerica di sistemi di equazioni lineari, l'altro è dedicato ad applicazioni del calcolo matriciale all'elettrotecnica, a problemi di elastomeccanica, alla teoria delle vibrazioni, ai sistemi di equazioni differenziali lineari) sono da segnalare numerosi rifacimenti e maggiori sviluppi atti a portare agevolmente il calcolo di problemi fino all'impiego dei moderni mezzi elettronici.

Per maggiori dettagli si rimanda alle recensioni che sulle precedenti edizioni sono apparse in Mathematical Reviews (Vol. *12*, pag. 73; *20*, 756) e in Zentralblatt der Mathematik (Vol. *36*, pag. 149; *83*, 4; *102*, 14).

R. NARDINI

J. DIEUDONNÉ, *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris 1963, pp. XVIII-372.

Questo trattato sarà letto col massimo interesse da tutti quelli che hanno seriamente meditato sul problema di rinnovare l'insegnamento dell'Analisi, proponendosi di renderlo per quanto possibile adeguato allo sviluppo delle più recenti teorie e improntato a quella ricerca di rigore logico, di cui col passare degli anni si è sentita sempre più l'esigenza. Il libro ha infatti lo scopo di instaurare un rinnovamento più radicale di quello, che, in maggiore o minor misura, molti docenti avevano già cercato di ottenere, e ciò l'A. sottolinea vivacemente, contrapponendo talvolta con tono polemico una « Analisi moderna » a una « Analisi classica ». In effetti questa antitesi riesce tuttavia più apparente che reale, poichè l'A. stesso è indotto ad affermare, nelle prime righe della prefazione, che « non bisogna spaventarsi dell'evoluzione delle matematiche », pensando ai « giovani analisti, che sanno unire un abile maneggio degli strumenti moderni a un acuto senso del concreto per abbordare i problemi più classici ».

Tipico è l'atteggiamento della trattazione, che preferisce partire da definizioni assiomatiche astratte e mostrare successivamente come in esse rientrino diversi esempi concreti, anzichè studiare prima questi, per risalire poi alle nozioni generali in cui essi possono includersi come casi particolari, col consueto rpocesso di astrazione che consiste in sostanza nel « dare lo stesso nome a cose differenti », secondo quella che Poincaré scherzosamente chiama « l'arte » del matematico. Senza dubbio questo modo di fare consente di evitare molte ripetizioni, riducendo al minimo il superfluo, e ciò, unitamente a un'estrema concisione di linguaggio e a un appropriato simbolismo, permette all'A. di condensare in un breve volume una materia straordinariamente ricca e di arrivare in molte teorie fino all'esposizione dei più recenti risultati.

Pr le nozioni di « insieme » e di « corrispondenza » (o « applicazione », come i matematici francesi hanno diffuso l'abitudine di chiamarla) si rinunzia nel Cap. I a una impostazione assiomatica, assumendole come primitive, mentre la nozione di « numero intero » e le proprietà fondamentali ad essa relative son supposte già preventivamente acquisite. I numeri reali sono invece definiti per assiomi (sorvolandosi sull'inclusione dell'insieme degli interi in quello dei reali) e nel Cap. II si stabiliscono le prime conseguenze degli assiomi stessi, dando poi le più elementari nozioni connesse a quella di numero reale, come intervalli, estremo inferiore e superiore, funzione reale di una variabile reale.

Il Cap. III, dedicato agli spazi metrici, contiene un primo studio di tutte quelle nozioni spaziali, che si possono stabilire in base alla sola definizione di una distanza, come intorni circolari (o « palle aperte ») e domini circolari (o « palle chiuse »), insiemi aperti, insiemi chiusi, aderenza di un insieme, insieme denso rispetto a un altro, corrispondenza continua fra due spazi, omeomorfismi, limite di una successione di punti, successioni di Cauchy; e si pone inoltre in giusto rilievo l'importanza delle nozioni di spazio completo, compatto, precompatto, localmente compatto, separabile, connesso, localmente connesso, nonchè quella di spazio prodotto cartesiano di due altri. Per le funzioni, che generalmente, non appena possibile, vengono sempre supposte definite in una spazio metrico qualsiasi e a valori anche in uno spazio metrico qualsiasi, nel Cap. IV vengono trattati quegli argomenti, per i quali si richiede che uno almeno di questi due spazi si riduca alla retta reale, come funzioni monotone, continuità delle operazioni razionali, definizioni di logaritmo ed esponenziale, teorema di prolungamento di Tietze Urysohn; quì vengono poi anche introdotti i numeri complessi.

Il Cap. V e il Cap. VI trattano in generale gli spazi di Banach e in particolare gli spazi hilbertiani, partendosi come sempre da definizioni assiomatiche e rimandandosi al seguito per i più importanti esempi. La nozione di norme equivalenti prepara la strada all'introduzione degli spazi topologici, di cui tuttavia lo studio è escluso dai limiti imposti alla trattazione. Vengono considerate le trasformazioni multilineari fra spazi di Banach, poi in particolare le trasformazioni lineari, e infine, più particolarmente ancora, le forme lineari (continue). Le serie sono studiate, supponendo che abbiano per termini vettori di uno spazio normato qualsiasi, ciò che non impedisce dì dare la nozione di prodotto di due serie, in quanto che al prodotto fra i termini di due serie numeriche viene sostituita in generale una trasformazione bilineare fissata a piacere, dalla quale la coppia di spazi di Banach, supposti qui contenere i termini delle due serie, è mutata in un terzo spazio di Banach. Negli spazi hilbertiani, nei quali il prodotto scalare è definito da una forma hermitiana positiva qualsiasi, sono naturalmente studiati i sistemi ortonormali e le loro principali proprietà.

Le nozioni di convergenza uniforme e di equicontinuità vengono trattate, per funzioni definite in uno spazio metrico e a valori in uno spazio di Banach, nel Cap. VII, nel quale trovano il loro giusto posto l'estensione dì Stone del teorema di Weierstrass sull'approssimabilità delle funzioni continue mediante polinomi e il teorema di compattezza di Ascoli.

La derivazione è considerata nel Cap. VIII per funzioni supposte in partenza definite in un aperto di uno spazio di Banach e a valori in un altro spazio di Banach. La « derivata totale » (o, nella nostra terminologia, il « differenziale totale ») si presenta quindi come una trasformazione lineare fra questi due spazi di Banach. Nel caso particolare che l'insieme di definizione sia un intervallo chiuso e limitato della retta reale si dà il teorema della media e la definizione di primitiva; l'integrale è definito poi mediante la primitiva, per le funzioni prive di punti di discontinuità che non siano di prima specie. La trattazione si conchiude con la formula di Taylor, elevata anch'essa all'interessante livello di generalità assunto in principio per dare la definizione di derivata.

Il Cap. IX studia le funzioni analitiche, introdotte mediante serie multiple di potenze con coefficienti che sono vettori di uno spazio di Banach; la trattazione, per quanto riguarda i fondamenti della teoria, viene svolta nel caso di un numero qualsiasi di variabili, e ci si riduce al caso di una sola variabile, soltanto quando si comincia a parlare di serie di Laurent, punti singolari isolati, residui. Il teorema di Cauchy è presentato come proprietà di invarianza dell'integrale esteso a un circuito, nella classe di omotopia di questo. Una appendice espone il metodo di Eilenberg per ricavare proprietà di topologia piana (come il teorema di Jordan) dalla teoria dell'integrale complesso.

Finalmente, nel Cap. X e nel Cap. XI sono raccolti, in condizioni di generalità corrispondenti a tutta la trattazione precedente, i teoremi fondamentali di esistenza per le funzioni implicite e per le equazioni differenziali e la teoria spettrale elementare, ivi compresa la teoria di Riesz degli operatori completamente continui, quella dell'equazione di Fredholm e quella dei problemi di Sturm Liouville (nei quali però le funzioni sono supposte a valori reali, o complessi, numerici).

Un'ultima appendice è dedicata agli elementi dell'Algebra lineare.

Ogni capitolo è corredato da numerosi « problemi », che molte volte consistono in complementi di grande importanza.

Questa breve rassegna non può dare che un'idea assai sommaria del contenuto del libro, il quale è certamente uno dei più interessanti testi di Analisi oggi esistenti e al quale è augurabile che segua una seconda parte, comprendente gli argomenti, che, l'A. indica nella prefazione come i più adatti per un secondo anno di studio, dopo quello in cui dovrebbe essere svolto il contenuto di questo volume.

GIANFRANCO CIMMINO

G. VRANCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, Ed. de l'Acad. de la Rep. Pop. Roumaine. Gauthier-Villars - Paris, Vol. I, pp. 404 (1956); vol. II, pp. 426 (1955).

L'opera, in due volumi, costituisce la seconda edizione, migliorata ed ampliata, di un trattato di geometria differenziale dedicato alla teoria degli spazi a connessione: il vol. I, pubblicato per la prima volta nel 1947, comparve anche in lingua rumena nel 1952; il II vol. fu pubblicato per la prima volta, in rumeno, nel 1951.

Da rilevare subito che l'esposizione della teoria degli spazi a connessione (sp. a c.) viene fatta adottando un punto di vista che consente all'Autore di riunire in un'unica trattazione le differenti ed ormai classiche concezioni degli spazi suddetti (in particolare la concezione facente capo alla scuola americana di Princeton e quella di Cartan).

Nonostante il carattere sostanzialmente « locale » della trattazione degli spazi considerati, va pure subito posto in rilievo che l'opera non manca di alcuni cenni, riuniti in un aggiornato, se pur breve, cap., relativamente ad alcune questioni concernenti anche la teoria globale degli sp. a c.

In vista delle finalità dell'opera — finalità alle quali abbiamo, in parte, già accennato — l'Autore provvede anzitutto — nel 1° dei sei capitoli del vol. I — ad informare dettagliatamente il lettore circa i procedimenti di calcolo utilizzati nel trattato, ossia sul cosidetto « calcolo delle coordinate » (o calcolo di Ricci nella sua forma abituale) e sul calcolo delle congruenze, consentendo quest'ultimo un naturale accostamento al « calcolo esteriore » (delle forme di Pfaff) di E. Cartan.

Pure di carattere « introduttivo » si possono considerare il 2° ed il 3°

capitolo; nel 2° vengono trattati i gruppi continui finiti con procedimenti che bene s'inquadrano negli schemi proprii del calcolo differenziale assoluto; nel 3° si esaminano problemi di equivalenza (di forme di Pfaff, di gruppi, di congruenze) sia in generale che in casi particolari, passando poi, come applicazione, alla determinazione di invarianti di equazioni differenziali (ordinarie) del 1° e 2° ordine.

Negli ultimi tre capitoli (del 1° volume) si affronta la teoria (vera e propria) degli sp. a c. e precisamente degli sp. a c. affine (cap. 4°), degli spazi di Riemann (cap. 5°) e degli sp. a c. proiettiva (cap. 6°).

Il 2° volume, pure suddiviso in sei capitoli, inizia (cap. I) con uno studio degli spazi « parzialmente proiettivi » (detti anche « spazi di Kagan ») e degli sp. a c. con gruppo massimo di automorfismi (in particolare: con gruppo massimo di movimenti quando si tratta di spazi di Riemann).

Il cap. successivo tratta degli sp. a c. conforme (di Weil), delle proprietà conformi degli spazi di Riemann e contiene inoltre una classificazione delle connessioni conformi in base al gruppo conforme di trasformazioni di congruenze.

Il 3° cap. è dedicato a quegli spazi che, senza essere Riemanniani, possiedono un tensore del 2° ordine; in particolare si considerano spazi con un tensore due volte covariante emisimmetrico (spazi simplettici) e di questi alcuni casi particolari nonche spazi con un tensore del 2° ordine controvariante oppure misto.

Nel 4° cap. si analizzano questioni relative a sottospazi e problemi di immersione in sp. a c. affine e proiettiva nonchè alcune proprietà degli spazi anolonomi.

Nel cap. 5° la teoria degli sp. a c. e degli spazi anolonomi viene utilizzata per studiare gli invarianti delle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine.

L'ultimo cap. — come si è già detto — è dedicato a questioni di carattere globale concernenti gli sp. a c.; naturalmente, nel corso di un solo cap., non può figurare una trattazione sistematica sia pure di qualcuno soltanto degli aspetti tipici della geometria differenziale globale: l'Autore si limita pertanto alla scelta di quei problemi a cui più facilmente è possibile accostarsi avendo a disposizione gli strumenti di calcolo e le nozioni che si trovano illustrati nei capitoli precedenti (e, in particolare, nel 1° volume).

Tra le questioni trattate figurano proprietà globali degli spazi a connessione costante, delle autoparallele degli spazi e curvatura costante di particolari spazi proiettivi complessi (collegati a spazi considerati nel cap. 2°, vol. II).

Qualche cenno si ha pure relativamente al teorema di Gauss-Bonnet dimostrato sia per superficie orientabili chiuse che per spazi di Riemann ad un numero pari di dimensioni.

Il trattato costituisce pertanto una preziosa ed ampia fonte di informazione e nello stesso tempo appare consigliabile come strumento atto a dare ottimi orientamenti su svariati campi di ricerca e, in special modo, su quelli che sono stati (e sono tuttora) oggetto di ricerche dell'Autore stesso e della sua attivissima scuola.

F. FAVA