Bollettino
Unione Matematica Italiana

Aldo Belleni-Morante

Su un problema cilindrico di convezione forzata e di conduzione del calore in un reattore nucleare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.1, p. 106–113.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_1_106_0>

Su un problema cilindrico di convezione forzata e di conduzione del calore in un reattore nucleare (*)

ALDO BELLENI-MORANTE (a Firenze) (**)

Sunto. - *Si prova l'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema cilindrico di convezione forzata e di conduzione del calore nella cella elementare di un reattore nucleare, nell'ipotesi che la velocità media del fluido refrigerante vari con il tempo. Il problema ha interesse pratico in relazione ad uno degli incidenti che possono accadere durante il funzionamente a regime di un reattore nucleare e cioé ad un guasto alle pompe che mantengono in moto il fluido.*

Summary. - *Existence and uniqueness of the solution of a cylindrical problem of heat conduction and forced convection in a nuclear reactor cell have been proved. This problem has a practical interest in connection with a possible accident to the cooling system.*

1. - Introduzione.

In un precedente lavoro, [1], si sono studiate, facendo determinate ipotesi, le equazioni che reggono il fenomeno del trasferimento dell'energia termica generata dalle fissioni nucleari in una cella elementare di un reattore nucleare.

Tale cella può essere schematizzata mediante un solido conduttore S a simmetria cilindrica, limitato cioé dalle due superficie cilindriche $r = a$, $r = b$ $(b > a)$ e dai piani $z = 0$, $z = H$, l'asse z coincidendo con l'asse delle superficie cilindriche citate.

Si suppone che il solido sia raffreddato mediante un fluido F che circola nel canale centrale di raggio a e che la superficie $r = b$ sia termicamente isolata. Le fissioni danno poi luogo ad una distribuzione di sorgenti di energia termica per unità di volume, dipendente dalla sola coordinata z, $Q = Q(z)$.

Come già notato in [1], il calcolo della distribuzione della temperatura in S viene semplificato dal fatto che in pratica la

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo n. 6 di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Istituto Matematico « U. Dini ». Università, Firenze.

conduzione del calore é ivi esclusivamente radiale, mentre per il calcolo della temperatura in F é sufficiente tener conto soltanto del fenomeno della convezione forzata, [2].

Il problema viene dunque ricondotto alla determinazione della temperatura nella lastra piana sottile $a \leq r \leq b$, compresa tra i due piani $z = \lambda$ e $z = \lambda + d\lambda$, [3]. La generica lastra scambia poi energia termica solo con il fluido F e, solo tramite questo, con le altre lastre.

Nella presente nota ci proponiamo di studiare la distribuzione di temperatura in S ed in F nell'ipotesi che la velocità media di convezione del fluido refrigerante vari con il tempo. Tale studio ha interesse pratico in relazione ad uno degli incidenti che possono accadere durante il funzionamento a regime di un reattore nucleare e cioé ad un guasto alle pompe che mantengono in moto il fluido refrigerante F.

Elenchiamo per chiarezza i simboli di cui faremo uso nel seguito:

$T_s(z)$, $T(z, t) =$ temperature medie di mescolamento in F nel caso stazionario e non stazionario rispettivamente.

$T_s^0(r, \lambda)$, $T^0(r, \lambda, t) =$ temperature in S.

$H =$ lunghezza del canale refrigerante.

$h(t)$, $h_0 =$ coefficienti di trasferimento del calore attraverso la superficie $r = a$ per $t > 0$ e per $t \leq 0$ rispettivamente.

$k =$ coefficiente di conduttività termica del solido S.

ρ, $\rho_c =$ densità di S e di F rispettivamente.

C_p, $c_p =$ calori specifici di S e di F rispettivamente.

$v(t)$, $v_0 =$ velocità medie di F per $t > 0$ e per $t \leq 0$ rispettivamente.

$G(t) = \pi a^2 \rho_c v(t)$, per $t > 0$.

$G_0 = \pi a^2 \rho_c v_0$.

2. - Richiami per il caso stazionario.

Come é noto, [1], [4], nel caso stazionario si devono risolvere i sistemi seguenti:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dz} T_s(z) = \dfrac{2\pi a h_0}{G_0 c_p} [T_s^0(a, z) - T_s(z)], & \text{per } 0 < z < H; \\ T_s(0) = f_0; \end{cases}$$

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{k}{\rho C_p} \nabla_r^2 T_s^0(r, \lambda) + \dfrac{Q(\lambda)}{\rho C_p} = 0, \quad \text{per } a < r < b; \\ \dfrac{\partial}{\partial r} T_s^0(r, \lambda) \mid_{r=b} = 0, \dfrac{\partial}{\partial r} T_s^0(r, \lambda) \mid_{r=a} = \dfrac{h_0}{k} [T_s^0(a, \lambda) - T_s(\lambda)], \end{cases}$$

ove $\nabla_r^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}$ ed f_0 é una costante assegnata.

Il sistema (1) dà la formulazione matematica del fenomeno della convezione forzata in F, mentre il sistema (2) traduce il problema piano di conduzione nella lastra a quota $z = \lambda$, λ essendo un valore fissato, compreso tra 0 ed H.

Le soluzioni di (1) e (2) hanno la forma, [1]:

$$\text{(3)} \qquad T_s(z) = f_0 + \frac{\pi(b^2 - a^2)}{G_0 c_p} \int_0^z Q(u)\, du,$$

$$\text{(4)} \qquad T_s^0(r, \lambda) = T_s(\lambda) + \frac{Q(\lambda)}{2k} \left[b^2 \log(r/a) - \frac{r^2 - a^2}{2} + \frac{k}{h_0} \frac{b^2 - a^2}{a} \right].$$

3. - Il caso non stazionario.

Supponiamo che la velocità media di F sia una funzione assegnata del tempo $v = v(t)$, $v(t)$ essendo una funzione continua di t e tale che $v(t) \equiv v_0$ per $t \leq 0$.

Si devono ora risolvere, [1], i sistemi seguenti

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{1}{v(t)} \dfrac{\partial}{\partial t} \right] T(z, t) = \dfrac{2\pi a h(t)}{G(t) c_p} [T^0(a, z, t) - T(z, t)], \\ \hfill \text{per } 0 < z < H, \ t > 0; \\ T(z, t) = T_s(z), \quad \text{per } 0 < z < H, \ t \leq 0; \end{cases}$$

$$
(6)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{\rho C_p}\nabla_r^2 T^0(r,\lambda,t)+\dfrac{Q(\lambda)}{\rho C_p}=\dfrac{\partial T^0}{\partial t}, \quad \text{per } a<r<b, \ t>0, \\[2ex] \left.\dfrac{\partial T^0}{\partial r}\right|_{r=b}=0, \quad \left.\dfrac{\partial T^0}{\partial r}\right|_{r=a}=\dfrac{h(t)}{k}\,[T^0(a,\lambda,t)-T(\lambda,t)], \\ \hfill \text{per } t>0; \\[1ex] T^0(r,\lambda,t)=T_s^0(r,\lambda), \quad \text{per } a<r<b, \ t\leq 0. \end{cases}
$$

Il metodo del sistema ausiliario, [5], fornisce per la soluzione di (5):

$$
(7)\quad T(z,t)=\exp[-\Phi(t)]\left\{T_s[z-Z(t)]+\int_0^t \varphi(u)\exp[\Phi(u)]\, T^0[a,z+Z(u)-Z(t),u]\,du\right\},
$$

ove:

$$
(8)\quad Z(t)=\int_0^t v(u)\,du, \quad \varphi(t)=\frac{2\pi a h(t) v(t)}{G(t) c_p}, \quad \Phi(t)=\int_0^t \varphi(u)\,du.
$$

Notiamo che, nel sistema (6) e nelle (8), $h(t)$ può considerarsi una funzione continua e nota del tempo, poiché $h(t)$ è, [4], funzione continua e nota di $v(t)$. Posto:

$$
(9)\quad T^0(r,\lambda,t)=T_s^0(r,\lambda)+D(r,\lambda,t),
$$

e facendo uso della (4), si ricava dalla (7):

$$
(10)\quad \begin{aligned} T(z,t)=T_s(z)&+\exp[-\Phi(t)]\int_0^t \psi(u)\exp[\Phi(u)]\,Q[z+Z(u)-Z(t)]\,du+ \\ &+\exp[-\Phi(t)]\int_0^t \varphi(u)\exp[\Phi(u)]\,D[a,z+Z(u)-Z(t),u]\,du, \end{aligned}
$$

ove:

$$
(11)\quad \psi(u)=\frac{\pi(b^2-a^2)}{G_0 c_p}\left[v(u)\frac{h(u)G_0}{h_0 G(u)}-1\right].
$$

Sostituendo poi la (9) nel sistema (6) e tenendo conto della (2), si ottiene:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{k}{\rho C_p} \nabla_r^2 D(r, \lambda, t) = \dfrac{\partial D}{\partial t}, \ \text{per } a < r < b, \quad t > 0; \\[2mm] \dfrac{\partial D}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0, \ \dfrac{\partial D}{\partial r}\Big|_{r=a} = F(t, \lambda), \quad \text{per } \ t > 0, \\[2mm] D(r, \lambda, t) = 0, \quad \text{per } \ a < r < b, \quad t \leq 0, \end{cases}$$

ove si é posto:

$$(13)\qquad F(t, \lambda) = \frac{h(t)}{k}\,[D(a, \lambda, t) - T(\lambda, t)] + \frac{h(t)}{k}\, T_s^0(a, \lambda) - \frac{b^2 - a^2}{2ak}\, Q(\lambda).$$

Sia adesso $w(r, t)$ la soluzione del sistema seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{k}{\rho C_p} \nabla_r^2 w(r, t) = \dfrac{\partial w}{\partial t}, \quad \text{per } \ a < r < b, \quad t > 0; \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0, \ \dfrac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=a} = -1, \quad \text{per } \ t > 0; \\[2mm] w(r, t) = 0, \quad \text{per } \ a < r < b, \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Non é difficile provare che valgono le disuguaglianze, [3]:

$$(14)\qquad \frac{\partial w}{\partial r} \leq 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \geq 0, \quad w(r, t) \geq 0.$$

Per il teorema di DUHAMEL, [3], si ha allora:

$$D(r, \lambda, t) = -\int_0^t F(s, \lambda)\left[\frac{\partial}{\partial t}\, w(r, t - s)\right] ds,$$

cioé:

$$(15)\qquad D = H + \Omega D,$$

ove:

$$\text{(16)} \qquad H = H(r, \lambda, t) = \frac{b^2 - a^2}{2ak} Q(\lambda) \int_0 \frac{h_0 - h(s)}{h_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} w(r, t-s)\right] ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{h(s)}{k} \left[\frac{\partial}{\partial t} w(r, t-s)\right] \exp[-\Phi(s)] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_0^s \exp[\Phi(u)] \psi(u) Q[z + Z(u) - Z(s)] du \right\} ds,$$

$$\text{(17)} \qquad \Omega D = -\int_0^t \frac{h(s)}{k} \left[\frac{\partial}{\partial t} w(r, t-s)\right] D(a, \lambda, s) ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{h(s)}{k} \left[\frac{\partial}{\partial t} w(r, t-s)\right] \exp[-\Phi(s)] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_0^s \left[\frac{d}{du} \exp[\Phi(u)]\right] D[a, z + Z(u) - Z(s), u] du \right\} ds.$$

4. - **Esistenza ed unicità della soluzione della** (15).

Con riferimento a noti procedimenti di analisi funzionale, [6], indichiamo con C lo spazio delle funzioni continue $y = y(r, \lambda, t)$ definite per $a \leq r \leq b$, $0 \leq \lambda \leq H$, $0 \leq t \leq t_0$, ove t_0 é una costante di cui fra breve diremo. Per ogni $y \in C$, la norma sia definita come segue:

$$\| y \| = \max_{\substack{a \leq r \leq b \\ 0 \leq \lambda \leq H \\ 0 \leq t \leq t_0}} | y(r, \lambda, t) | .$$

Osserviamo che l'operatore Ω, definito per ogni $y \in C$, é additivo ed omogeneo; posto poi $\bar{h} = \max_{0 \leq s \leq t_0} | h(s) |$, si ha:

$$| \Omega y | \leq \| y \| \frac{\bar{h}}{k} \left\{ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} w(r, t-s) ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial t} w(r, t-s)\right] \exp[-\Phi(s)] \left[\int_0^s \frac{d}{du} \exp[\Phi(u)] du \right] ds \right\} .$$

Segue:

$$
\begin{aligned}
|\Omega y| \leq \|y\| \frac{\bar{h}}{k} \Big\{ & w(r, t) + \\
& + \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial t} w(r, t-s) \right| \exp[-\Phi(s)] \Big\{ \exp[\Phi(s)] - 1 \Big\} ds \Big\} \leq \\
\leq \|y\| \frac{\bar{h}}{k} \Big\{ & w(r, t)[2 - \exp[-\Phi(t_0)]] \Big\} \leq \\
& \leq \|y\| \frac{\bar{h}}{k} w(a, t_0) \Big\{ 2 - \exp[-\Phi(t_0)] \Big\}.
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\|\Omega\| \leq \frac{\bar{h}}{k} \Big\{ 2 - \exp[-\Phi(t_0)] \Big\} w(a, t_0). \tag{18}
$$

L'operatore Ω é perciò limitato; segue che Ω é un operatore lineare. Notiamo poi che. se t_0 é sufficientemente piccolo, si ha:

$$
\frac{\bar{h}}{k} w(a, t_0) \Big\{ 2 - \exp[-\Phi(t_0)] \Big\} < 1.
$$

poiché $\lim\limits_{t_0 \to 0} w(a, t_0) = 0$.

Dunque, se t_0 é sufficientemente piccolo, Ω é una contrazione e la (15) ammette in C una ed una sola soluzione. Procedendo poi in maniera analoga a quanto già fatto in [1], é possibile dimostrare l'esistenza e l'unicità della (15) per $0 \leq t \leq 2t_0$. $0 \leq t \leq 3t_0$, ..., e cioé in ogni intervallo finito di tempo.

Dalla (15) segue:

$$
\|D\| \leq \frac{\|H\|}{1 - \|\Omega\|}. \tag{19}
$$

Si ha poi:

$$
\|H\| \leq \left\{ \frac{b^2 - a^2}{2akh_0} \max_{0 \leq s \leq t_0} |h(s) - h_0| + \frac{h}{k} \bar{\psi} t_0 \right\} w(a, t_0) Q, \tag{20}
$$

ove si é posto:

$$\bar{Q} = \max_{0 \leq \lambda \leq H} |Q(\lambda)| \ , \ \bar{\psi} = \max_{0 \leq u \leq t_0} |\psi(u)| \, .$$

Dalle (18), (19), (20), e ricordando la (9), si ottiene:

$$\max_{\substack{a \leq r \leq b \\ 0 \leq \lambda \leq H \\ 0 \leq t \leq t^0}} | T^0(r, \lambda, t) - T^0_s(r, \lambda) | = \| D \| \leq \tag{21}$$

$$= \frac{\dfrac{b^2 - a^2}{2ah_0} \max\limits_{0 \leq s \leq t_0} | h(s) - h_0 | + \bar{h}\bar{\psi} t_0}{k - \bar{h}w(a, t_0) \{ 2 - \exp[- \Phi(t_0)] \}} \, w(a, t_0)\bar{Q}.$$

La (21) fornisce un limite superiore della variazione della temperatura in S rispetto allo stato stazionario. Si capisce quindi come la (21) abbia un interesse pratico in relazione ad incidenti del tipo di quelli descritti nel § 1.

BIBLIOGRAFIA

[1] BELLENI-MORANTE A., *Esistenza ed unicità della soluzione di un problema cilindrico di convezione forzata e di conduzione del calore*, «Atti del Sem. Mat. Fis. Univ. Modena», vol. XIII (1964).

[2] BIASINI L.-EVANGELISTI R., *Un programma Fortran IBM-704 per il calcolo dei transienti termici in un reattore veloce*. Rapporto Tecnico del CNEN, RT/FIMA (62) 1.

[3] CARSLAW H.S.-JAEGER J.C., *Conduction of heat in solids*, «Clarendon Press», Oxford 1959.

[4] GLASSTONE S., «*Principles of nuclear reactor engineering*», Mac Millan, London 1956.

[5] KAMKE E., *Differentialgleichungen Lösungmetoden und Lösungen*, vol. II, Geest-Portig K.-G., Leipzig 1956

[6] VULIKH B. Z., «*Functional analysis for scientists and technologists*», Pergamon Press, Oxford 1963.

Pervenuta alla Segreteria dell U.M.I.
il 1 dicembre 1964