Roberto Conti

Sulla stabilità in grande.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.1, p. 80–86.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_1_80_0>

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sulla stabilità in grande

Nota di ROBERTO CONTI (a Firenze)

Sunto. - *Si estende un criterio di Barbashin-Krasovskii-Massera per la stabilità asintotica uniforme in grande della soluzione nulla di una equazione differenziale ordinaria in uno spazio di Banach.*

Summary. - *An extension is given of a criterion due to Barbashin-Krasovskii-Massera for the uniform asymptotic stability in the large of the null solution of an ordinary d.e. in a Banach space.*

1. Lo studio dei processi di regolazione automatica ha dato origine alla nozione di stabilità asintotica « in grande » della soluzione nulla di una equazione differenziale

$$(E) \qquad \dot{x} = f(t, x), \qquad f(t, 0) = 0.$$

Con t si indica una variabile reale nell'intervallo $E^1_+ : 0 < t < +\infty$, con x un punto di uno spazio di BANACH X con norma $|x|$ (in particolare $X = E^n$, spazio euclideo degli n-vettori reali

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

con norma $\|x\| = (\sum_1^n x_i^2)^{1/2}$), con $f(t, x)$ una funzione da $E^1_+ \times X$ in X sufficientemente regolare affinchè per ogni punto $(\tau, \varkappa)$ di $E^1_+ \times X$ sia assicurata l'esistenza e l'unicità locale della soluzione $x(t)$ della (E) che soddisfa la condizione iniziale $x(\tau) = \varkappa$. Quando occorra indichiamo con $x(t; \tau, \varkappa)$ tale soluzione, anche se, per ogni $(\tau, \varkappa)$ la x risulta funzione univoca della t soltanto per $t \geq \tau$.

Diremo che la soluzione nulla della (E) è *attrattiva in grande* se si ha

$$(1) \qquad \lim_{t \to +\infty} |x(t; \tau, \varkappa)| = 0, \qquad (\tau, \varkappa) \in E^1_+ \times X.$$

La soluzione nulla della (E) si dice *asintoticamente stabile in grande* (a.s. in grande) se essa è attrattiva in grande ed inoltre stabile secondo LIAPUNOV, vale a dire se esiste una funzione $\delta(\tau, \varepsilon) > 0$ definita per $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$, tale che

$$(2) \qquad \| x \| < \delta(\tau, \varepsilon), \qquad \tau \leq t \Rightarrow \| x(t; \tau, x) \| < \varepsilon.$$

La definizione di stabilità asintotica in grande è dovuta (per $X = E^n$) a E. A. BARBASHIN-N. N. KRASOVSKII [2]; agli stessi Autori (sempre per $X = E^n$) è dovuta anche la seguente, più restrittiva, nozione di stabilità asintotica *uniforme*. (E. A. BARBASHIN-N. N. KRASOVSKII [3]). Nella forma adottata da J. L. MASSERA [1] diremo che la soluzione nulla della (E) è *uniformemente asintoticamente stabile in grande* (u.a.s. in grande) se esistono una funzione $\sigma(r)$ definita per $r \geq 0$, positiva, continua, crescente, $\sigma(0) = 0$, ed una funzione $T(r, \varepsilon)$, definita per $r \geq 0$, $\varepsilon > 0$, positiva, continua, tali che

$$(3) \qquad \| x \| < r, \qquad 0 < \tau \leq t \Rightarrow \| x(t; \tau, x) \| < \sigma(r)$$

$$(4) \qquad \| x \| < r, \qquad 0 < \tau < \tau + T(r, \delta) \leq t \Rightarrow \| x(t; \tau, x) \| < \varepsilon.$$

Estendendo un criterio di E. A. BARBASHIN-N. N. KRASOVSKII ([3]), J. L. MASSERA ([9], Th. 22) ha provato il seguente

TEOREMA A. - *La soluzione nulla della*

$$(E) \qquad \dot{x} = f(t, x), \qquad f(t, 0) = 0$$

è u.a.s. in grande se esiste una funzione reale $V(t, x)$ definita in $E_+^1 \times X$ avente le seguenti proprietà:

a) $V(t, x)$ è localmente lipschitziana:

b) $V(t, x)$, è «definita positiva», vale a dire si ha

$$a(\| x \|) \leq V(t, x)$$

per qualche funzione $a(r)$ definita per $r \geq 0$, positiva, continua, crescente, $a(0)$;

c) $V(t, x)$ è «infinitamente grande», vale a dire, per la $a(r)$ di b) si ha

$$\lim_{r \to +\infty} a(r) = +\infty;$$

d) la $V(t, x)$ ha una «limitazione superiore infinitesima», vale a dire si ha

$$V(t, x) \leq b(\| x \|)$$

per qualche funzione $b(r)$ avente le proprietà richieste alla $a(r)$ in b);

e) la funzione

$$\lim_{h \to 0+} \sup [V(t+h, x+hf(t, x)) - V(t, x)]/h$$

è «definita negativa», vale a dire si ha

$$\lim_{h \to 0+} \sup [V(t+h, x+hf(t, x)) - V(t, x)]/h \leq -c(\| x \|)$$

per qualche funzione $c(r)$ avente le proprietà richieste alla $a(r)$ in b).

Il «metodo delle V», o «secondo metodo di LIAPUNOV», su cui è basato il precedente criterio è un caso particolare del «metodo di confronto» o «metodo delle V, Φ» che, in luogo delle sole V, utilizza coppie di funzioni V, Φ per dedurre le proprietà delle soluzioni della (E) dalle analoghe proprietà delle soluzioni dell'equazione scalare

$$(e) \qquad \dot{v} = \Phi(t, v). \qquad \Phi(t, 0) = 0.$$

Il metodo delle V, Φ è stato applicato con successo, in particolare, allo studio della stabilità (Cfr. ad es. H. A. ANTOSIEWICZ [1], C. CORDUNEANU [5], [6], [7]; v. anche G. SANSONE-R. CONTI [10], p. 476). Seguendo questo indirizzo proveremo un criterio (Teorema B) che generalizza il Teor. A e successivamente daremo un criterio (Teorema C) di stabilità asintotica in grande, non uniforme, ed un criterio (Teorema D) di attrazione in grande.

2. Dalla condizione a) del Teorema A segue ovviamente che

a_1) $V(t, x)$ è continua.

e, come si vede facilmente, segue anche che

a_2) per ogni soluzione $x(t)$ della (E) si ha

$$\lim_{h \to 0+} \inf [V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))]/h =$$

$$= \lim_{h \to 0+} \inf [V(t+h, x(t) + hf(t, x))) - V(t, x(t))]/h.$$

Osserviamo poi che, detta $r = b(v)$ la funzione inversa della $v = b(r)$, dalla condizione $d)$ segue $\bar{b}(V(t, x)) \leq \| x \|$, quindi $-c(\| x \|) < -c(\bar{b}(V(t, x)))$.

La funzione $c(\bar{b}(v))$ è definita per $v \geq 0$, positiva, continua, crescente, nulla per $v = 0$. Pertanto la condizione $e)$ è più restrittiva della

e′) si ha

$$\lim_{h \to 0+} \inf [V(t+h,\ x + hf(t, x)) - V(t, x)]\, h \leq -d(V(t, x))$$

per qualche funzione $d(v)$, definita per $v \geq 0$, positiva, continua, crescente, $d(0) = 0$.

Si vede poi facilmente che se $d(v)$ ha le proprietà ora dette, la soluzione nulla dell'equazione scalare

$$\dot{v} = -\varphi(v)$$

con $\varphi(v) = d(v)$, $v \geq 0$, $\varphi(v) = -d(-v)$, $v < 0$, è u.a.s. in grande. Pertanto, ammettere la $e')$ (ed a maggior ragione la $e)$) è più restrittivo che ammettere l'esistenza di una funzione reale $\Phi(t, v)$, definita in $E^1_+ \times E^1$, $\Phi(t, 0) = 0$, tale che

e_1) si abbia

$$\lim_{h \to 0+} \inf [V(t+h,\ x + hf(t, x)) - V(t, x)]/h$$
$$\leq \Phi(t,\ V(t, x)), \qquad (t, x) \in E^1_+ \times X;$$

e_2) la soluzione nulla dell'equazione differenziale scalare

$$(e) \qquad \dot{v} = \Phi(t, v), \qquad \Phi(t, 0) = 0$$

sia u.a.s. in grande.

Dalle precedenti osservazioni segue allora che il Teorema *A* è incluso nel

TEOREMA B. - *La soluzione nulla dell'equazione*

$$(E) \qquad \dot{x} = f(t, x), \qquad f(t, 0) = 0\,.$$

è u.a.s. in grande se valgono le condizioni a_1), a_2), b), c), d), e_1), e_2).

Per provare il teor B ci serviremo del

Lemma. - *Valgano le condizioni* a_1). a_2), e_1). *Detta* $v(t)$ *la soluzione della* (e) *che soddisfa la condizione*

$$v(\tau) = V(\tau, x)$$

(la soluzione massima se $(\tau, V(\tau, x))$ *non è per la* (e) *un punto di unicità destra), si ha*

$$V(t, x(t; \tau, x)) \leq v(t) \tag{5}$$

per ogni $t \geq \tau$ *per cui* $x(t; \tau, x)$, $v(t)$ *siano definite entrambe.*

La dimostrazione è sostanzialmente la stessa del Lemma provato in R. Conti [4] e la riportiamo per comodità al lettore.

Indicata con $v_n(t)$ la soluzione (la soluzione massima) della equazione

$$v = \Phi(t, v) + 1/n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{e_n}$$

che soddisfa la condizione $v_n(\tau) = V(\tau, x)$, è noto che, fissato $T > \tau$ in modo che $v(t)$ sia definita in $[\tau, T]$, esiste (Cfr. E. Kamke [8], p. 83) un intero $n(T) > 0$ tale che se $n > n(T)$, la $v_n(t)$ è anch'essa definita in $[\tau, T]$ e si ha $\lim_n v_n(t) = v(t)$, uniformemente in $[\tau, T]$.

Pertanto per provare la (5) basta mostrare che, fissato $T > \tau$ tale che $v(t)$ e $x(t; \tau, x)$ siano entrambe definite in $[\tau, T]$, e determinato l'intero $n(T)$, si ha

$$V(t, x(t; \tau, x)) \leq v_n(t), \qquad t \in [\tau, T], \qquad n > n(T). \tag{5_n}$$

Procedendo per assurdo, esista un intero $\bar{n} > n(T)$ ed esistano $\bar{t} \in (\tau, T)$ tali che $V(\bar{t}, x(\bar{t}; \tau, x)) > v_{\bar{n}}(\bar{t})$. Da a_1) si ha che l'insieme di tali $\bar{t}$ è aperto, quindi unione di intervalli. Se (θ, θ') è uno di questi intervalli avremo

$$V(\theta, x(\theta; \tau, x)) = v_{\bar{n}}(\theta)$$
$$V(\theta + h, x(\theta + h; \tau, x)) > v_{\bar{n}}(\theta + h), \qquad \theta < \theta + h < \theta'.$$

Sottraendo membro a membro, dividendo per $h > 0$ e facendo $h \to 0+$ si ha

$$\lim_{h \to 0+} \inf [V(\theta + h, x(\theta + h; \tau, x)) - V(\theta, x(\theta; \tau, x))]/h \geq$$
$$\geq \Phi(\theta, v_{\bar{n}}(\theta)) + 1/\bar{n} =$$

$$= \Phi(\theta,\ V(\theta,\ x(\theta\,;\ \tau,\ \varkappa))) + 1/\bar{n} >$$

$$> \Phi(\theta,\ V(\theta,\ x(\theta\,;\ \tau,\ \varkappa))).$$

Ma allora la a_2) e la e_1) non possono valere contemporaneamente. Con ciò è provata la (5_n) e quindi. per $n \to \infty$, la (5).

Dalla (5) e dalla condizione b) segue $0 \leq a(\,|\,x(t;\ \tau,\ \varkappa)\,|\,) < v(t)$ per ogni $t > \tau$ per cui siano definite $x(t;\ \tau,\ \varkappa)$ e $v(t)$. Quest'ultima è per e_2) definita in $[\tau,\ +\infty)$ quindi per c) la $x(t:\ \tau,\ \varkappa)$ è anche essa definita in $[\tau,\ +\infty)$: infatti se fosse definita soltanto in $[\tau,\ t+)$ con $t+ < +\infty$ si avrebbe (A. WINTNER [11]) $\lim_{t \to t^+} |\,x(t;\ \tau,\ \varkappa)| = +\infty$, e quindi anche $\lim_{t\to t^+} a(|\,x(t;\ \tau,\ \varkappa)||) = +\infty$.

Pertanto abbiamo

$$0 \leq a(\,|x(t;\ \tau,\ \varkappa)||\,) \leq v(t), \qquad t \in [\tau,\ +\infty). \tag{6}$$

Ancora per la e_2) esistono una funzione $\tilde{\sigma}(\tilde{r})$, definita per $\tilde{r} \geq 0$, positiva, continua, crescente, $\tilde{\sigma}(0) = 0$, ed una funzione $\tilde{T}(\tilde{r},\ \tilde{\varepsilon})$, definita per $\tilde{r} \geq 0$, $\tilde{\varepsilon} > 0$, positiva, continua, tali che

$$V(\tau,\ \varkappa) < \tilde{r}, \qquad 0 < \tau \leq t \Rightarrow v(t) < \tilde{\sigma}(\tilde{r})$$

$$V(\tau,\ \varkappa) < \tilde{r}, \qquad 0 < \tau < \tau + \tilde{T}(\tilde{r},\ \tilde{\varepsilon}) \leq t \Rightarrow v(t) < \tilde{\varepsilon}.$$

D'altronde la trasformazione $\tilde{r} = b(r)$, $\tilde{\varepsilon} = a(\varepsilon)$ è invertibile. Detta $\tilde{a}$ la funzione inversa della a e posto $\sigma(r) = \tilde{a}(\tilde{\sigma}(b(r)))$, $T(r,\ \varepsilon) = \tilde{T}(b(r),\ a(\varepsilon))$ le precedenti relazioni diventano

$$V(\tau,\ \varkappa) < b(r), \qquad 0 < \tau \leq t \Rightarrow v(t) < a(\sigma(r))$$

$$V(\tau,\ \varkappa) < b(r), \qquad 0 < \tau < \tau + T(r,\ \varepsilon) \leq t \Rightarrow v(t) < a(\varepsilon).$$

Ma per la condizione d) da $|\,\varkappa\,| < r$ segue $V(\tau,\ \varkappa) < b(r)$ e tenendo conto della (6) le relazioni precedenti danno luogo alle (3) e (4).

Oss. - Dalla precedente dimostrazione appare che la condizione c) serve soltanto per garantire la più generale

c_1) *la soluzione* $x(t;\ \tau,\ \varkappa)$, *qualunque sia* $(\tau,\ \varkappa)$ *sia definita per* $t \in [\tau,\ +\infty)$.

3. Servendosi ancora del Lemma del n. precedente si dimostrano senza difficoltà i due criteri seguenti:

TEOREMA C. - *La soluzione nulla della* (E) *è a.s. in grande se valgono le condizioni* $a_1)$, $a_2)$, $b)$, $c)$ (*od anche* $c_1)$), $e_1)$ *ed inoltre*

$e_3)$ *la soluzione nulla della* (e) *sia a.s. in grande.*

TEOREMA D. - *La soluzione nulla della* (E) *è attrattiva in grande se valgono le condizioni* $a_1)$, $a_2)$, $b)$, $c)$ (*od anche* $c_1)$), $e_1)$ *ed inoltre*

$e_4)$ *la soluzione nulla della* (e) *sia attrattiva in grande.*

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANTOSIEWICZ, « Math. Zeitsch », 78 (1962), 44-52.

[2] E. A. BARBASHIN - N. N. KRASOVSKII, « Dokl. Akad. Nauk SSSR », 86 (1952), 454-456.

[3] — —, « Prikl. Mat. i Meh. », 18 (1954), 345-350.

[4] R. CONTI, « Boll. U. M. I. », (3) 11 (1956), 510-514

[5] C. CORDUNEANU, « Analele Stiint. Univ. Al. I. Cuza », Iasi, Sec. 1, 6 (1960), 47-58.

[6] — —, ibid., 7 (1961), 247-252.

[7] — —, Revue Roumaine de Math. pures et appl. », 9 (1964) 229-236.

[8] E. KAMKE, « Differentialgleichungen reeller Funktionen », Leipzig, 1930.

[9] J. L. MASSERA, « Annals of Math. », 64 (1956), 182-206.

[10] G. SANSONE - R. CONTI, *Non-linear differential equations*, « Pergamon Press », 1964.

[11] A. WINTNER, « Amer. Jour. of Math. », 68 (1946), 173-178.

Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
il 13 gennaio 1965