Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Sulle transformazioni puntuali fra tre o più spazi lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.1, p. 87–95.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_1_87_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

Sulle trasformazioni puntuali fra tre o più spazi lineari.

Nota di MARIO VILLA (a Bologna)

Sunto. - *In alcune questioni sulle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi riesce particolarmente utile ricorrere alla rappresentazione della trasformazione sulla varietà di Segre. Dalla presente Nota appare che il vantaggio anzidetto si conserva nelle questioni analoghe relative a trasformazioni puntuali fra tre o più spazi proiettivi.*

1. - In questi ultimi venticinque anni sono state svolte, in Italia e fuori, numerose ricerche, di varia natura, sulle trasformazioni puntuali fra due spazi lineari dal punto di vista della geometria differenziale. È chiaro che ricerche analoghe possono farsi più generalmente per trasformazioni puntuali fra tre o più spazi lineari.

In alcune questioni sulle trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi (come, ad esempio, nei problemi d'approssimazione del 2° ordine) riesce particolarmente utile ricorrere alla rappresentazione della trasformazione sulla varietà di SEGRE prodotto cartesiano dei due spazi [1] [2]. Orbene, come apparirà da questa breve Nota, il vantaggio anzidetto si conserva nelle questioni analoghe relative a trasformazioni puntuali fra tre o più spazi proiettivi.

(1) M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*, Note I e II, «Rendiconti della Reale Accademia d'Italia, Serie VII, Vol. III, p. 718 (1942) e Vol. IV, p. 1 (1943);

M. VILLA, *Sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali fra due spazi mediante trasformazioni cremoniane*, «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», Serie V, Vol. III, p. 216 (1942);

M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, Note I, II, III, «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», Ser. VIII, Vol. IV, pp. 55, 192, 295 (1948).

(2) C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, «Rend. del Circolo Matematico di Palermo», Vol. V, p. 192 (1891).

2 - Se indichiamo con x_i le coordinate (omogenee) di uno spazio proiettivo, con y_k le coordinate di un secondo spazio proiettivo, con z_l quelle di un terzo spazio proiettivo, ecc ..., una equazione del tipo

$$\sum_{i, k, l \ldots} a_{ikl \ldots} x_i y_k z_l \ldots = 0 \tag{1}$$

le a essendo costanti, rappresenta una corrispondenza fra gli spazi che chiameremo ancora *reciprocità*. Fissati $n-1$ punti in $n-1$ degli spazi considerati (in numero di n) rimane, per la (1), in generale, determinato un iperpiano nello spazio rimanente ([3]).

Supponiamo, per fissare le idee, che gli n spazi abbiano tutti la stessa dimensione r, e consideriamo r reciprocità fra di essi. Fissati genericamente $n-1$ punti in $n-1$ degli spazi considerati, rimane determinato un unico punto dello spazio rimanente, cioè il punto intersezione degli r iperpiani determinati dagli $n-1$ punti nelle r reciprocità. Nasce così fra gli n spazi una trasformazione puntuale che chiameremo *trasformazione di Godeaux*, in quanto per $n=2$ si ha appunto una trasformazione che ho chiamato di GODEAUX ([4]).

Una trasformazione di GODEAUX fra n spazi proiettivi di dimensione r è dunque rappresentata da un sistema costituito da r equazioni indipendenti del tipo (1).

Per $r=2$ e $n=3$, ad esempio, si ha la trasformazione, che possiamo chiamare ancora *trasformazione quadratica*, rappresentata dal sistema

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{i, k, l} a_{ikl} x_i y_k z_l = 0 \\ &\sum_{i, k, l} b_{ikl} x_i y_k z_l = 0 \end{aligned} \right. \qquad (i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

([3]) La corrispondenza in discorso si chiama anche *plurilineare*. In particolare, per $n=3$, trilineare. Per il caso di tre rette si veda anche per la bibliografia sull'argomento: E. MORGANTINI, *Teoria delle corrispondenze trilineari tra forme di prima specie*, « Rend. del Seminario Matematico dell'Univ. di Padova, Vol. IX, p. 1 (1938).

([4]) M. VILLA, *Transformations ponctuelles et transformations crémoniennes*, « Colloque de Géométrie Algebrique du centre Belge des Récherches Mathématiques (CBRM) », Liège (1952), p. 50.

Fissato in una dei tre piani π_1, π_2, π_3, ad esempio in π_1, un punto P_1, le coppie di punti di π_2, π_3, che assieme a P_1 formano terne di punti corrispondenti, si corrispondono in una trasformazione quadratica ordinaria, ecc. ecc.

3 - Siccome la varietà di SEGRE relativa agli n spazi considerati ha le equazioni parametriche

$$X_{ikl\,...} = x_i y_k z_l \;... \tag{3}$$

ne viene che nei problemi in cui intervengono trasformazioni di GODEAUX conviene appunto ricorrere alla varietà di SEGRE, in quanto le n-uple corrispondenti nella (1) sono rappresentate dalla varietà intersezione della varietà di SEGRE con l'iperpiano

$$\Sigma\, a_{ikl\,...}\, X_{ikl\,...} = 0.$$

Le trasformazioni di GODEAUX sono quindi rappresentate dalla varietà intersezione della varietà di SEGRE con un S_{N-r} — essendo $N = (r+1)^n - 1$ la dimensione dello spazio lineare ambiente della varietà di SEGRE — (e inversamente).

Nei problemi sulle trasformazioni puntuali fra tre o più spazi lineari relativi all'approssimazione del 2° ordine con trasformazioni di GODEAUX — problemi analoghi a quelli già considerati per $n = 2$ [5] — è quindi particolarmente utile ricorrere alla rappresentazione sulla varietà di SEGRE.

4. - Illustrerò nel seguito le osservazioni svolte esaminando il caso più semplice, quello delle trasformazioni puntuali fra tre rette, lasciando ad altri o ad altra occasione di riprendere eventualmente la ricerca.

Sia dunque $\mathfrak{C}$ una trasformazione (o corrispondenza) puntuale fra tre rette r_1, r_2, r_3 [6] e sia O_1, O_2, O_3 una terna di punti

[5] M. VILLA, op. cit. nella [1].

[6] Una trasformazione (o corrispondenza) fra tre rette (o spazi lineari) si potrebbe anche chiamare *tri-trasformazione* o *tri-corrispondenza*, e analogamente per quattro spazi tetra-corrispondenza, per più spazi *pluri-corrispondenza*.

corrispondenti. Assumiamo O_1, O_2, O_3 come origini delle coordinate (proiettive o ascisse) su r_1, r_2, r_3 e indichiamo rispettivamente con x, y, z tali coordinate su r_1, r_2, r_3. La trasformazione $\mathfrak{C}$ sarà rappresentata da un'equazione del tipo

$$z = f(x, y) \tag{4}$$

dove la funzione f s'intenderà sviluppabile nell'intorno di $x = 0$, $y = 0$ in serie di potenze [7]. Pertanto la (4) potrà scriversi

$$z = ax + by + px^2 + sxy + qy^2 + [3] \tag{7}$$

essendo a, b, p, s, q numeri dati e indicando con [3] l'insieme dei termini in x, y di grado superiore al secondo ($a \neq 0$, $b \neq 0$) [8].

La varietà di SEGRE relativa alle tre rette è la V_3 appartenente allo spazio proiettivo S_7 che ha le equazioni parametriche [9]

$$\begin{aligned} X_1 &= xyz \\ X_2 &= xy \\ X_3 &= xz \\ X_4 &= yz \\ X_5 &= x \\ X_6 &= y \\ X_7 &= z \\ X_8 &= 1. \end{aligned} \tag{8}$$

[7] Più generalmente una corrispondenza fra le tre rette è rappresentata da un'equazione del tipo

$$F(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

dove la F ammette derivate prime continue.

Supposto nella terna di punti corrispondenti O_1, O_2, O_3

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0, \tag{6}$$

la (5) può scriversi nella forma (4).

[8] Quando $a \neq 0$, $b \neq 0$ la terna (O_1, O_2, O_3) si dirà *regolare*.

[9] La varietà di SEGRE relativa a due rette è una quadrica dell'S_3 (e una proiettività fra le due rette è rappresentata da una conica della

La corrispondenza $\mathfrak{C}$ di equazione (4) è rappresentata sulla V_3 dalla superficie Φ di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} X_1 &= xyf \\ X_2 &= xy \\ X_3 &= xf \\ X_4 &= yf \\ X_5 &= x \\ X_6 &= y \\ X_7 &= f \\ X_8 &= 1. \end{aligned}$$

Il punto P rappresentativo della terna O_1, O_2, O_3 ha le coordinate (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1). I punti derivati primi P_x, P_y e i punti derivati secondi P_{xx}, P_{yy}, P_{xy} relativi al punto P (di Φ) hanno rispettivamente le coordinate

$$\begin{aligned} &P_x\,(0, 0, 0, 0, 1, 0, a, 0) \\ &P_y\,(0, 0, 0, 0, 0, 1, b, 0) \\ &P_{xx}(0, 0, a, 0, 0, 0, p, 0) \\ &P_{yy}(0, 0, 0, b, 0, 0, q, 0) \\ &P_{xy}(0, 1, b, a, 0, 0, s, 0). \end{aligned}$$

Il piano tangente in P a Φ è individuato dai tre punti P, P_x, P_y ([10]), mentre l'$S(2)$ osculatore in P a Φ è individuato dai sei punti P, P_x, P_y, P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}.

quadrica). Sulla V_3 di Segre relativa a tre rette vi sono tre schiere di quadriche (ciascuna di queste quadriche rappresenta le terne ottenute associando ad un punto fisso di una delle tre rette, tutte le coppie di punti prese dalle altre due). Per ogni punto della V_3 passano tre quadriche dell'S_3 (una per ciascuna schiera).

([10]) La superficie Φ ha in P punto semplice.

Osserviamo che questi sei punti sono linearmente indipendenti in quanto la matrice delle loro coordinate ha caratteristica 6 essendo il determinante da essa estratto (ottenuto sopprimendo la 1^a e la 7^a verticale)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ab \neq 0.$$

L'$S(2)$ osculatore in P a Φ è dunque regolare, cioè è un S_5 (11).

Nell'S_7 ambiente, gli iperpiani che passano per questo S_5 sono dunque ∞^1. D'altra parte ognuno di tali iperpiani [ad eccezione dell'$S(2)$ osculatore in P a V_3] sega la V_3 di SEGRE in una V_2 che rappresenta una trilinearità fra le tre rette, *osculatrice* la data trasformazione $\mathcal{C}$ nella terna di punti corrispondenti O_1, O_2, O_3 (12) (13).

(11) Considerando anche gli altri minori del sesto ordine estratti dalla matrice formata con le coordinate dei sei punti P, P_x, P_y, P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}, si conclude che l'$S(2)$ osculatore in P a Φ è regolare se $ab \neq 0$, non è regolare se $a = b = 0$ Se $a = 0$ $(b \neq 0)$, l'$S(2)$ è regolare oppure no secondo che $p \neq 0$ oppure $p = 0$.

(12) Due trasformazioni puntuali fra le rette r_1, r_2, r_3

$$z = ax + by + px^2 + sxy + qy^2 + [3],$$

$$z = a'x + b'y + p'x^2 + s'xy + q'y^2 + [3],$$

quando i due sviluppi coincidono fino ai termini di grado k, si dirà che si *approssimano* nell'intorno di ordine k della terna $(0, 0, 0)$ o anche che hanno nella terna $(0, 0, 0)$ un *contatto d'ordine* k. Se $k = 2$ si dirà pure che le due trasformazioni si *osculano* nella terna $(0, 0, 0)$. La nozione di contatto ha carattere invariante per trasformazioni regolari qualunque sulle tre rette.

(13) Fra gli ∞^1 iperpiani passanti per l'$S(2)$ osculatore in P a Φ, si deve escludere l'$S(2)$ osculatore in P a V_3, cioè l'iperpiano $X_1 = 0$. Questo iperpiano sega la V_3 nella superficie per cui $xyz = 0$, cioè nella superficie costituita dalle tre quadriche dell'S_3 passanti per P [si veda la

Si ha dunque:

Data una trasformazione puntuale fra tre rette, esistono ∞^1 *trilinearità che la osculano in una terna regolare di punti corrispondenti.*

Gli ∞^1 iperpiani passanti per l'$S(2)$ osculatore in P a Φ hanno le equazioni

$$(9) \qquad X_1 + \lambda\left[\left(\frac{bp}{a} + \frac{aq}{b} - s\right)X_2 - \frac{p}{a}X_3 - \frac{q}{b}X_4 - aX_5 - bX_6 + X_7\right] = 0,$$

dove λ è un parametro.

Per le (8), le ∞^1 trilinearità osculatrici in (O_1, O_2, O_3) a $\mathcal{C}$ sono quindi

$$(10) \qquad xyz + \lambda\left[\left(\frac{bp}{a} + \frac{aq}{b} - s\right)xy - \frac{p}{a}xz - \frac{q}{b}yz - ax - by + z\right] = 0$$

dove $\lambda \neq 0$ ([14]).

Per la (9), l'$S(2)$ osculatore in P a Φ è rappresentato dal

nota ([9])]. Questa superficie ha in P punto triplo e non può quindi osculare la superficie Φ nel suo punto semplice P. Si può anche osservare che la trilinearità (degenere) $xyz = 0$ relativa a $X_1 = 0$ non oscula la $\mathcal{C}$ in O_1, O_2, O_3 (e quindi va esclusa) in quanto per essa non è verificata la condizione (6).

([14]) Si osservi che dalla (8) si ricava (essendo $\lambda \neq 0$)

$$z = \lambda\,\frac{ax + by - \left(\frac{bp}{a} + \frac{aq}{b} - s\right)xy}{-\left(\frac{p}{a}x + \frac{q}{b}y - 1\right)\lambda + xy} =$$

$$= \lambda\left[ax + by - \left(\frac{bp}{a} + \frac{aq}{b} - s\right)xy\right]\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{p}{a}\frac{1}{\lambda}x + \frac{q}{b}\frac{1}{\lambda}y + \ldots\right) =$$

$$= ax + by + px^2 + qy^2 + sxy + \ldots$$

sistema di equazioni

$$(11)\qquad \begin{cases} X_1 = 0 \\ \left(\frac{bp}{a} + \frac{aq}{b} - s\right)X_2 - \frac{p}{a}X_3 - \frac{q}{b}X_4 - aX_5 - bX_6 + X_7 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo nelle (11) alle X le relative espressioni date dalle (8), si ottiene

$$\begin{cases} xyz = 0 \\ ax + by - z - \left(\frac{bp}{a} + \frac{aq}{b} - s\right)xy + \frac{p}{a}\,xz + \frac{q}{b}\,yz = 0. \end{cases}$$

Questo sistema si spezza nei tre sistemi

$$(12)\qquad \begin{cases} x = 0 \\ by - z + \frac{q}{b}\,yz = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ ax - z + \frac{p}{a}\,xz = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ ax + by - \left(\frac{bp}{a} + \frac{aq}{b} - s\right)xy = 0. \end{cases}$$

Il primo dei sistemi (12), ad esempio, rappresenta la proiettività osculatrice nella coppia (O_2, O_3) alla corrispondenza fra le rette r_2, r_3 di equazione $z = by + qy^2 + [3]$ nella quale si corrispondono le coppie di punti che assieme ad O_1 formano terne di punti corrispondenti in $\mathfrak{C}$. Tale proiettività osculatrice ha infatti l'equazione ([15])

$$z = \frac{by}{-\frac{q}{b}\,y + 1}$$

che coincide appunto con la 2^a delle equazioni del primo dei sistemi (12).

([15]) M. VILLA, *Lezioni di Geometria*. Vol. II, Cedam, Padova, 1962, p. 287.

D'altra parte siffatta proiettività è rappresentata sulla V_3 di SEGRE da una conica [16].

Si conclude quindi:

L' $S(2)$ osculatore in P a Φ interseca la V_3 di Segre nelle tre coniche che rappresentano le tre proiettività osculatrici, rispettivamente in (O_2, O_3), (O_1, O_3), (O_1, O_2), alle tre corrispondenze fra le rette (r_2, r_3), (r_1, r_3), (r_1, r_2) nelle quali si corrispondono le coppie di punti che assieme rispettivamente ad O_1, O_2, O_3 formano terne di punti corrispondenti in $\mathcal{C}$ [17].

Le tre coniche sono l'intersezione dell' $S(2) = S_5$ osculatore in P a Φ con le tre quadriche dell' S_3 appartenenti a V_3 e passanti per P [18].

5. - Una trasformazione puntuale, ad esempio, fra tre piani $\pi_1(x, y)$, $\pi_2(x', y')$, $\pi_3(x'', y'')$, è rappresentata da equazioni

$$x'' = f(x, y; x', y')$$

$$y'' = \varphi(x, y; x', y')$$

dove per le funzioni f, φ si fanno le solite ipotesi.

Si può osculare, in una terna di punti corsispondenti, con trasformazioni quadratiche (2) (si veda n. 2) $\left(\text{posto } x = \dfrac{x_1}{x_3},\ y = \dfrac{x_2}{x_3};\ x' = \dfrac{y_1}{y_3},\ y' = \dfrac{y_2}{y_3};\ x'' = \dfrac{z_1}{z_3},\ y'' = \dfrac{z_2}{z_3}\right)$, ecc. ecc.

(16) Si veda la nota (9).

(17) La curva intersezione dell' $S(2) = S_5$ osculatore con la V_3 è costituita da tre coniche, d'accordo col fatto che la V_3 di SEGRE è d'ordine 6.

(18) Siccome l' $S(2) = S_5$ osculatore in P a Φ e le tre quadriche dell' S_3 appartenenti alla V_3 e passanti per P, appartengono all' $S(2) = S_6$ osculatore in P alla V_3, appare chiaro che l' S_5 seghi le tre quadriche in coniche.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I. il 24 gennaio 1965