Bollettino Unione Matematica Italiana

Demore Quilghini

Sul problema della conduzione del calore nel muro.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.1, p. 96–105.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_1_96_0>

Sul problema della conduzione del calore nel muro

Nota di DEMORE QUILGHINI (a Firenze) (*) (**)

Summary. - *In this paper we study the problem of conduction of heat in a wall and suppose that mass density is a function of temperature and therefore variation of volume takes place.*

In particular we introduce a suitable lagrangian coordinate and reduce the problem to another one in which variation of volume is neglected.

1. Introduzione. - In un recente lavoro [3] (1) ho studiato un problema del tipo di STEFAN nella ipotesi che la densità materiale sia costante, diversa da fase a fase prendendo in considerazione anche le variazioni di volume che si verificano durante il processo del cambiamento di fase.

Tale studio viene notevolmente semplificato introducendo una opportuna coordinata lagrangiana che permette di dare al problema la stessa forma matematica nella quale si suole schematizzare il fenomeno quando non si considerano le variazioni di volume. Il procedimento seguito in [3] per realizzare tale trasformazione non è però condizionato dalla ipotesi della costanza della densità materiale nelle due fasi e può estendersi anche nella ipotesi che tale grandezza sia funzione della temperatura.
Argomento di questa nota è appunto quello di generalizzare tale procedimento fornendo così uno schema semplice nel quale inquadrare i fenomeni di conduzione del calore in un muro accompagnati da variazione di volume.

Sia M un sistema materiale solido termicamente isotropo e siano $k = k(T)$, $c = c(T)$ e $\rho = \rho(T)$ rispettivamente la conducibilità termica, il calore specifico a pressione costante e la densità materiale delle particelle P di M che si trovano alla temperatura T. Supponiamo che ad un certo istante, che assumiamo come istante iniziale $t = O$, M occupi uno strato piano indefinito S_0 di spessore

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo n° 6 di Ricerca Matematica del C. N. R.

(**) Istituto Matematico «U. DINI» Viale G.B. Morgagni, 67/a Firenze.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

$s_0 > 0$ e che la temperatura alla quale si trovano inizialmente le particelle di M dipenda soltanto dalla distanza da uno dei due piani che limitano S_0. In tali ipotesi, e se le condizioni per la temperatura sulle facce che limitano M per $t > 0$ si esprimono esclusivamente mediante assegnate funzioni del tempo, la conduzione del calore in M è unidimensionale ed anche per $t > 0$ M occupa uno strato piano indefinito S il cui spessore s è, a causa delle variazioni di volume dovute alla supposta dipendenza di ρ da T, una funzione del tempo $s(t) > 0$, $s(0) = s_0$, a priori incognita.

Ciò premesso assumiamo un riferimento cartesiano ortogonale $\Omega \equiv (x, y, z)$ tale che i piani di equazione $x = 0$ e $x = s(t)$ coincidano con i piani che limitano S e, tenuto conto che le particelle P di M si muovono in Ω a causa delle variazioni di volume sopra dette, indichiamo con $v = \dfrac{dx}{dt}$ la velocità, in Ω, delle particelle di M che all'istante t hanno ascissa x. In queste condizioni, e supposto infine che la conduzione del calore in M avvenga a pressione costante, l'equazione indefinita che regge il fenomeno è:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{k\frac{\partial T}{\partial x}\right\} = c\rho\frac{\partial T}{\partial t} + vc\rho\frac{\partial T}{\partial x}, \quad o < t, \quad o < x < s(t). \tag{1}$$

Per giustificare la (1) *ragioniamo come segue. Fermo restando il significato di v, di k e di ρ indichiamo con $c^* = c^*(T)$ il calore specifico «medio» tra la temperatura T e la temperatura di riferimento T_0, che sarà quella del calorimetro usato per fare le misure dei coefficienti calorimetrici, e che possiamo assumere nulla (cfr.* E. Perucca, *Fisica Generale e Sperimentale*, VII° ed., v.le I, § 327, n° 1, pag. 762). *In questa posizione (cfr. loc. cit.) la quantità di calore necessaria per portare l'unità di massa dalla temperatura $T_0 = 0$ del calorimetro alla temperatura T è:*

$$Q = c^*(T)T.$$

Perciò, con riferimento al calore specifico «medio» a partire da T_0, la quantità di calore necessaria per portare l'unità di massa dalla temperatura T alla temperatura $T + \Delta T$ sarà:

$$\Delta Q = c^*(T + \Delta T)(T + \Delta T) - c^*(T)T.$$

Quindi, poichè si ha, con riferimento al calore specifico vero $c = c(T)$ alla temperatura T (cfr. loc. cit.), $\Delta Q = c(T)\Delta T$, otteniamo il legame:

$$T\frac{dc^*}{dT} + c^* = c \tag{*}$$

tra il calore specifico « vero » alla temperatura T e il calore specifico medio tra la temperatura T e la temperatura di riferimento $T_0 = 0$. Inoltre usando $c^*(T)$ e riferendoci alla unità di volume, anzichè alla unità di massa, la variazione della quantità di calore passando dalla temperatura T alla temperatura $T + \Delta T$ sarà

$$\rho(T + \Delta T)c^*(T + \Delta T)(T + \Delta T) - \rho(T)c^*(T)T$$

e quindi la variazione della quantità di calore, contenuta nell'unità di volume. nella unità di tempo sarà espressa da:

$$\frac{\partial \rho c^* T}{\partial t}.$$

Infine, assumendo nulla la quantità di calore quando la temperatura è T_0, si ha che la quantità di calore contenuta nell'unità di volume alla temperatura T è:

$$c^* \rho T.$$

Perciò l'equazione indefinita che regge la propagazione del calore in M è:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{ k\frac{\partial T}{\partial x} - c^* \rho v T \right\} = \frac{\partial c^* \rho T}{\partial t}.$$

Da qui, ricordando la (*) *ed osservando che*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0,$$

segue la (1).

Però, a quanto mi risulta (cfr. [1] cap. I, § 1.6 pp. 8-13), si suole generalmente sostituire alla (1) l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{ k\,\frac{\partial T}{\partial x} \right\} = c\rho\,\frac{\partial T}{\partial t},\quad o < t,\ o < x < s_0, \tag{2}$$

in considerazione che gli effetti dovuti alle variazioni di volume sono piccoli essendo, in generale, v molto piccola e sopratutto perchè la sostituzione della (2) alla (1) semplifica notevolmente il problema dal punto di vista analitico. Infatti nei problemi ai limiti connessi alla (1) il contorno stesso è incognito, e ciò perchè $s(t)$ dipende dallo stato termico in ogni punto di M tramite ρ, mentre tale difficoltà non si presenta nei problemi connessi alla (2).

Come è noto la (2) costituisce lo schema nel quale si inquadrono i problemi di conduzione del calore in un muro quando non vi è dilatazione, perciò il sostituire alla (1) la (2) significa, dal punto di vista fisico-matematico, sostituire ad un problema nel muro M l'analogo problema in un muro M' per il quale la densità dipende al più dal posto. Però, mentre i due problemi, e cioè quello di determinare la temperatura nei punti di M e lo analogo per i punti di M', sono molto diversi dal punto di vista matematico, come abbiamo osservato, si presentano come identici quando tale determinazione di temperatura si realizzi fisicamente trattandosi in ambedue i casi di collegare opportunamente ad un termometro la particella in esame sia essa di M, e quindi mobile in Ω, sia essa di M' e perciò fissa.

Ciò ha fatto pensare, e tale osservazione non mi risulta sia stata fatta da altri, che anche dal punto di vista fisico-matematico i due problemi possano essere visti unitariamente, a condizione di abbandonare il riferimento Ω introducendo, al posto della variabile locale x, una opportuna coordinata lagrangiana atta ad individuare completamente le particelle del muro in esame.

Scopo di questo lavoro è appunto quello di mostrare come, con riferimento ad una opportuna coordinata sostanziale, il problema della conduzione unidimensionale del calore in un muro M in cui ρ dipende da T, e nel quale si hanno perciò variazioni di volume, è formalmente identico all'analogo problema in un muro M' in cui la densità dipende al più dal posto e dove non si hanno perciò variazioni di volume.

In particolare vedremo che, usando tale coordinata, l'equazione indefinità che regge il fenomeno, sia dell'uno che dell'altro caso, è della forma (2), mostrando così, da un lato, la non necessità della approssimazione che solitamente si suole fare sostituendo la (2) alla (1), quando si studia il caso in cui si hanno variazioni di volume, e rivalutando, dall'altro, gli studi condotti sulla (2) in quanto, a causa della identità formale sopra detta, si prestano, salvo un diverso significato dei simboli, a descrivere compiutamente anche il caso in cui si hanno variazioni di volume.

Terminando si riduce alle quadrature il problema della determinazione dell'incognito spessore $s(t)$ nel caso (1) e, usando ancora della coordinata sostanziale sopra detta, si scrivono in forma semplice le equazioni indefinite che reggono un problema del tipo di STEFAN in M senza dover rinunciare a considerare le variazioni di volume.

2. **Riduzione del problema (1) alla forma (2).** - Qui e nel seguito supporremo che k e c siano funzioni continue di T, naturalmente positive, di più supporremo che ove ρ dipenda da T, come nel caso (1), essa sia derivabile rispetto a T, se poi ρ dipende soltanto da x, come nel caso (2), ci basterà supporre che sia funzione continua di x; in ambedue i casi è poi naturalmente $\rho > 0$ [2].

Ciò premesso sia P una generica particella di M. Indichiamo con μ la quantità di materia contenuta in un cilindro di base unitaria sul piano $x = 0$, a generatrici parallele all'asse x e di altezza uguale all'ascissa x che la particella P ha all'istante t. Per ogni fissato t si ha poi:

$$\Delta\mu = \rho(T(x,\ t))\Delta x \tag{3}$$

e da qui per la particella P che all'istante t ha ascissa x otteniamo:

$$\mu = \int_0^x \rho(T(\xi,\ t))d\xi. \tag{4}$$

Manifestamente, pur potendo variare nel tempo la x della particella P, a causa delle variazioni di volume specificate nel n° 1, la coordinata μ relativa alla particella P resta costante nel tempo. Perciò derivando la (4) rispetto a t, ricordando le ipotesi fatte su ρ, si ha per la velocità v di P in Ω:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{\displaystyle\int_0^x \frac{d\rho(T(\xi,\ t))}{dT(\xi,\ t)} \frac{\partial T(\xi,\ t)}{\partial t} d\xi}{\rho(T(x,\ t))}. \tag{5}$$

Ciò premesso osserviamo che, supposta nota $T(x,\ t)$, $0 < t$, $0 < x < s(t)$, e quindi supposta nota ρ in funzione di x e di t tramite T, è possibile dalla (4), scritta nella forma $f(\mu,\ x,\ t) = 0$, esprimere x mediante μ e t avendosi:

$$\frac{\partial f(x,\ \mu,\ t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \int_0^x \rho(T(\xi,\ t))d\xi - \mu \right\} = \rho(T(x,\ t)) > 0.$$

[2] I risultati ai quali perverremo sia qui che nel n° 3 si ottengono pure con ipotesi meno restrittive sulle funzioni k, c e ρ.

Quindi ricavato dalla (4) $x = x(\mu, t)$ avremo, sostituendo in $T(x, t)$:

$$(6) \qquad T(x, t) = T(x(\mu, t), t) = U(\mu, t)$$

Da quest'ultima, per l'invarianza del differenziale totale, segue:

$$(7) \qquad \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial t} dt = \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

D'altra parte, per ogni incremento arbitrario dx e dt delle variabili x e t si ha dalla (4), tenuto conto anche della (5):

$$d\mu = \rho(T(x, t))dx - v\rho(T(x, t))dt$$

e perciò da qui e dalla (7) otteniamo:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} &= \rho(T(x, t)) \frac{\partial U(\mu, t)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial U(\mu, t)}{\partial t} - v\rho(T(x, t)) \frac{\partial U(\mu, t)}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

Da queste ultime. sostituendo nella (1) dopo aver osservato che k, c e ρ possono pensarsi, in forza della (6), come funzioni di $U = U(\mu, t)$ e notando altresì che

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ k\rho \frac{\partial U(\mu, t)}{\partial \mu} \right\} = \rho \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ k\rho \frac{\partial U(\mu, t)}{\partial \mu} \right\}$$

otteniamo

$$(1)_1 \qquad \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ k\rho \frac{\partial U}{\partial \mu} \right\} = c \frac{\partial U}{\partial t}, \quad 0 < t, \ 0 < \mu_0,$$

avendo posto, ricordando la (4):

$$\mu_0 = \int_0^{s(t)} \rho(T(\xi, t))d\xi.$$

Dalla $(1)_1$, osservando che μ_0 è costante nel tempo, segue poi l'asserita riduzione del problema (1) alla forma (2) non appena avremo dimostrato che conoscendo $U(\mu, t)$, $0 < t$, $0 < \mu < \mu_0$, è possibile risalire alla determinazione di $T(x, t)$, $0 < t$, $0 < x < s(t)$.

Supposto nota $U(\mu, t)$ pensiamo nella (3) ρ come funzione di μ e di t tramite U. Avremo:

$$x = \int_0^\mu \frac{d\eta}{\rho(U(\eta, t))} \tag{9}$$

Perciò essendo:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\int_0^\mu \frac{d\eta}{\rho(U(\eta, t))} - x\right\} = \frac{1}{\rho(U(\mu, t))} > 0$$

è possibile esprimere dalla (9) μ in funzione di x e di t. Quindi, sostituendo l'espressione trovata per μ in $U(\mu, t)$ otteniamo, in forza della (6), $T(x, t)$. Dalla (9) infine, tenuto conto che per $x = s(t)$ è $\mu = \mu_0$ si ha:

$$s(t) = \int_0^{\mu_0} \frac{d\mu}{\rho(U(\mu, t))}. \tag{10}$$

Si riduce così alle quadrature, una volta nota $U(\mu, t)$. la determinazione dell'incognito spessore del muro M.

In maniera del tutto simile si riduce poi alla forma $(1)_1$ il caso della conduzione del calore in un muro M' in cui, dipendendo la densità soltanto dal posto, non si hanno variazioni di volume. Basta infatti partire dalla forma (2) e tenere conto che, in questo caso, al posto delle (8) si ha:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \rho\frac{\partial U(\mu, t)}{\partial\mu}; \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial U(\mu, t)}{\partial t},$$

essendo $v = 0$.

3. Le equazioni indefinite nei problemi del tipo di Stefan. – Siano k, c e ρ funzioni della temperatura soddisfacenti alle condizioni di cui al n°. 2. Essendo k funzione della temperatura è noto come alla equazione (2) possa darsi, con una opportuna trasformazione dovuta a G. KIRCHHOFF (cfr. loc. cit. in [1]), la forma tipica

$$\frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Procedendo qui in modo analogo. essendo il prodotto $k\rho$ soltanto funzione di U, trasformeremo la $(1)_1$.

Poniamo:

$$R(\mu, t) = \int_0^{U(\mu, t)} k(u)\rho(u)du$$

Nelle nostre ipotesi su k e ρ avremo:

$$(12) \qquad \frac{\partial R}{\partial \mu} = k\rho \frac{\partial U}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = k\rho \frac{\partial U}{\partial t}$$

In conseguenza la $(1)_1$ diviene:

$$(1)_2 \qquad \frac{k\rho}{c} \frac{\partial^2 R}{\partial \mu^2} = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad 0 < t, \ 0 < \mu < \mu_0,$$

Ciò premesso supponiamo che nel muro M abbia luogo un fenomeno di cambiamento di stato a partire, ad esempio, dal piano $x = 0$. Tanto per fissare le ipotesi supponiamo che la fase α si trovi dalla parte del piano $x = 0$ e la fase β dalla parte del piano $x = s(t)$ (per l'argomento di questo n° cfr. [1], cap. XI, §§ 11.2 pp. 282-284; vedasi anche [2] e [3]). Caratteriziamo poi con l'indice α le grandezze relative alla fase α e con l'indice β le grandezze relative alla fase β. Indicata con $x = h(t)$ l'ascissa del piano mobile, fronte di separazione tra le due fasi, e con C la quantità di calore latente emesso, od assorbito, dall'unità di massa nel cambiamento di fase, le equazioni indefinite che reggono, nel riferimento Ω, la conduzione del calore in M sono (cfr. la (1)), per la fase α:

$$(13)_\alpha \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{ k_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} \right\} = c_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + v_\alpha c_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial x}, \quad 0 < t, \ 0 < x < h(t),$$

e per la fase β:

$$(13)_\beta \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{ k_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial x} \right\} = c_\beta \rho_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial t} + v_\beta c_\beta \rho_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial x}, \quad 0 < t, \ h(t) < x < s(t)$$

mentre sul fronte di separazione avremo:

$$(14) \qquad \lim_{x \to h(t)-} k_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} - \lim_{x \to h(t)+} k_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial x} = Cm(t), \ t > 0,$$

avendo indicato con $m(t)$ la quantità di materia che si trasforma, per unità di area normale all'asse x e per unità di tempo, sul fronte di separazione tra le due fasi ed all'istante t considerato. A quanto mi risulta nella $(13)_\alpha$ e nella $(13)_\beta$ si sogliono trascurare i termini di spostamento

$$v_\alpha \, c_\alpha \, \rho_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial x}, \quad v_\beta \, c_\beta \, \rho_\beta \frac{\partial T_\beta}{\partial x},$$

dovuti alle variazioni di volume in seguito alla dipendenza della densità dalla temperatura, sostituendo ad esse delle equazioni del tipo (2) più semplici. Anche qui, ragionando come nel n° 2, mostreremo che tale approssimazione non è necessaria potendosi ottenere ancora la forma semplice senza dover rinunciare a considerare i termini di spostamento.

Indichiamo infatti con $e(t)$ la quantità di materia contenuta nel cilindro di base unitaria sul piano $x=0$, a generatrici parallele all'asse x, che si è trasformata dalla parte della fase α al tempo t. In questa posizione, usando ancora della coordinata μ definita nel n° 2, ragionando come nel n° 2 e successivamente come nella prima parte di questo paragrafo, dalle (13) otteniamo:

$$(15)_\alpha \qquad \frac{k_\alpha \rho_\alpha}{c_\alpha} \frac{\partial^2 R_\alpha(\mu, t)}{\partial \mu^2} = \frac{\partial R_\alpha(\mu, t)}{\partial t}, \quad 0 < t, \quad 0 < \mu < e(t),$$

$$(15)_\beta \qquad \frac{k_\beta \rho_\beta}{c_\beta} \frac{\partial^2 R_\beta(\mu, t)}{\partial \mu^2} = \frac{\partial R_\beta(\mu, t)}{\partial t}, \quad 0 < t, \; e(t) < \mu < \mu_0,$$

mentre, ricordando la prima delle (8) e la prima delle (12), osservando che è $Cm(t) = C\dot{e}(t)$ in forza delle definizioni di $m(t)$ e di $e(t)$, dalla (14) otteniamo:

$$(16) \qquad \lim_{\mu \to e(t)-} \frac{\partial R_\alpha(\mu, t)}{\partial \mu} - \lim_{\mu \to e(t)+} \frac{\partial R_\beta(\mu, t)}{\partial \mu} = C\dot{e}(t), \; 0 < t.$$

Infine poichè dalla (11) è possibile determinare U, noto R, sarà possibile, per quanto già detto al n° 2, risalire alla determinazione di $T(x, t)$.

Terminando notiamo che è possibile determinare lo spessore $s(t)$ del muro M con semplici quadrature una volta noti $e(t)$, $R_\alpha(\mu, t)$ per $0 < t$, $0 < \mu < e(t)$ e $R_\beta(\mu, t)$ per $0 < t$, $e(t) < \mu < \mu_0$. Basta per questo ragionare come per stabilire la (10) e otterremo così:

$$s(t) = \int_0^{e(t)} \frac{d\mu}{\rho_\alpha(R_\alpha(\mu, t))} + \int_{e(t)}^{\mu_0} \frac{d\mu}{\rho_\beta(R_\beta(\mu, t))} . \tag{17}$$

Mediante la $(15)_\alpha$, la $(15)_\beta$ e la (16) un problema unidimensionale del tipo di STEFAN in un sistema materiale solido, nel quale avvengono anche variazioni di volume, viene ricondotto ad un problema del tipo ordinario in cui tali variazioni di volume non si considerano rivalutando così gli studi analitici fatti in quest'ultima posizione, in quanto, salvo un diverso significato per i simboli, si prestano a descrivere anche il problema completo. Inoltre mediante la (17) viene dato il modo di valutare come si dilata, o si contrae, uno strato materiale piano indefinito nel quale avviene un cambiamento di stato, una volta risolto il problema di STEFAN del tipo ordinario.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER: *Conduction of heat in solids*, II° Ed. Oxford University Press 1959.

[2] G. SESTINI, *Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan*, «Conf. del Sem. di Mat. dell'Univ. di Bari», 55-56. Bologna 1960.

[3] D. QUILGHINI: *Una analisi fisico-matematica del processo del cambiamento di fase*, «Annali di Mat. Pura Appl.», IV, LVII, (1965), pp. 33-74.

Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 1 dicembre 1964