Bollettino
Unione Matematica Italiana

Piero Mangani

Alcune osservazioni sulle algebre monadiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.4, p. 439–445.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_4_439_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

Alcune osservazioni sulle algebre monadiche

PIERO MANGANI (Firenze) (*)

Sunto. - *In questa nota si discutono la questione della rappresentazione di un'algebra monadica come «campo monadico» e la questione della ricchezza di un campo monadico completo.*

Premessa.

La teoria delle algebre monadiche (HALMOS [2]) presenta un certo interesse in tutta l'algebra della logica. Nella presente breve nota, presupponendo soltanto la parte algebrica della teoria, si dimostrano dapprima alcuni teoremi relativi alla rappresentazione di un'algebra monadica come «campo monadico». (Alcuni di questi teoremi sono già noti per altra via, ma sono qui esposti e dimostrati con un linguaggio diverso da quello consueto, linguaggio che permette di ottenere alcune semplificazioni). Faremo poi vedere che, senza ricorrere a metodi topologici, è possibile affrontare in modo semplice la questione delle costanti e della ricchezza di un'algebra monadica.

1. Sia $\mathcal{S} = (S, R)$ un sistema in cui:

S è un insieme non vuoto

R è una relazione di equivalenza su S.

È ben noto che l'applicazione R^* di $\mathfrak{B}(S)$ in sè, (1) che ad ogni $X \subseteq S$ associa la sua immagine in R, risulta un quantore su $\mathfrak{B}(S)$, cosicché la coppia $(\mathfrak{B}(S), R^*)$ è un'algebra monadica.

Un isomorfismo fra due strutture $\mathcal{S} = (S, R)$ ed $\bar{\mathcal{S}} = (\bar{S}, \bar{R})$ è una biiezione φ di S su $\bar{S}$ tale che: xRy se e solo se $\varphi x \bar{R} \varphi y$ $(x, y \in S)$. Un isomorfismo φ fra $\mathcal{S}$ ed $\bar{\mathcal{S}}$ induce, in modo ovvio, un isomorfismo, che indicheremo con φ^*, fra $(\mathfrak{B}(S), R^*)$ e $(\mathfrak{B}(\bar{S}), \bar{R}^*)$.

Per «campo monadico (di sottoinsiemi di $\mathcal{S}$)» intendiamo un campo di sottoinsiemi di S chiuso rispetto ad R^*. È noto che ogni

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematici del C.N.R. per l'anno 1965-66 (Gruppo n. 37).

(1) Se S è un insieme, con il simbolo $\mathfrak{B}(S)$ indichiamo il campo di tutti i sottoinsiemi di S.

algebra monadica è isomorfa ad un campo monadico, più precisamente che, assegnata un'algebra monadica $\mathcal{A} = (A, C)$, esistono un sistema $\mathcal{S} = (S, R)$ ed un monomorfismo ψ di $\mathcal{A}$ in $(\mathfrak{B}(S), R^*)$.

Una coppia $(\mathcal{S}, \psi)$ nelle condizioni precedenti sarà detta una «rappresentazione di $\mathcal{A}$ come campo monadico».(²) Nel seguito quando parleremo di «rappresentazione» di una data algebra monadica ci riferiremo sempre ad una rappresentazione come campo monadico.

Due rappresentazioni di un'algebra monadica $\mathcal{A}$, $(\mathcal{S}, \psi)$ ed $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{\psi})$, si diranno «equivalenti» allorchè esiste un isomorfismo φ di $\mathcal{S}$ su $\bar{\mathcal{S}}$ tale che

$$\varphi^*\psi = \bar{\psi}.$$

Ricordiamo ora che, assegnato un sistema $\mathcal{S} = (S, R)$, il codominio di R^* è un sottocampo di $\mathfrak{B}(S)$ isomorfo al campo $\mathfrak{B}(S/R)$. Indichiamo con λ l'isomorfismo canonico di $R^*(\mathfrak{B}(S))$ su $\mathfrak{B}(S/R)$. Se $(\mathcal{S}, \psi)$ è una rappresentazione di un'algebra monadica (A, C) si ha ovviamente che $\psi(C(A))$ è una sottoalgebra di $R^*(\mathfrak{B}(S))$ e di conseguenza $\lambda(\psi(C(A)))$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{B}(S/R)$.

Poniamo ora le seguenti:

DEFINIZIONE 1. – *Una rappresentazione* $(\mathcal{S}, \psi)$ *di una data algebra monadica* (A, C) *si dirà «ridotta» allorchè* $\psi(A)$ *è un campo ridotto di sottoinsiemi di* S (*cioè l'intersezione degli elementi di un qualunque filtro massimale di* $\psi(A)$ *è, al più, un insieme ridotto ad un solo punto*) *e* $\lambda(\psi(C(A)))$ *è un campo ridotto di sottoinsiemi di* S/R (*in altre parole l'intersezione degli elementi di un qualunque filtro massimale di* $\psi(C(A))$ *è, al più, un solo elemento della ripartizione su* S *associata ad* R).

DEFINIZIONE 2. – *Una rappresentazione* $(\mathcal{S}, \psi)$ *di una data algebra monadica* (A, C) *si dirà «perfetta» allorchè* $\psi(A)$ *è un campo perfetto di sottoinsiemi di* S.

Si noterà che, nel caso della definizione 2, $\lambda(\psi(C(A)))$ è un campo perfetto di sottoinsiemi di S/R.(³)

(²) Non è da confondere la rappresentazione di un'algebra monadica come campo monadico con la rappresentazione funzionale (Cfr. HALMOS [2]). Per uno studio dei rapporti fra i vari modi di rappresentare un'algebra monadica Cfr. MAGARI [6].

(³) Si osservi che abbiamo qui trasportato, al caso delle algebre monadiche, concetti usuali per le algebre di Boole (Cfr., ad esempio, DWINGER [1]).
Ricordiamo poi che un campo A di sottoinsiemi di un insieme S si dice «perfetto» allorchè l'intersezione degli elementi di un qualsiasi filtro massimale di A non è vuota.

Abbiamo già detto che ogni algebra monadica ammette una rappresentazione [4] e noi ritroveremo tate risultato nel paragrafo 2: addirittura ogni algebra monadica ammette una rappresentazione perfetta e ridotta.

Abbiamo ora il seguente teorema:

TEOREMA 1. – *Due qualsiasi rappresentazioni perfette e ridotte di una data algebra monadica sono equivalenti.*

La dimostrazione, che qui omettiamo per brevità, si ottiene facilmente tenendo conto di un analogo risultato per le algebre di Boole.

È ora questione di routine vedere che, ad ogni rappresentazione di un'algebra monadica, se ne può associare, in un modo canonico, una ridotta e che quindi, per i nostri scopi, possiamo sempre limitarci a rappresentazioni ridotte. È anche facile controllare che ogni rappresentazione ridotta si può «estendere» ad una rappresentazione perfetta e ridotta.

2. – Sia (A, C) un'algebra monadica e sia S l'insieme di tutti gli ideali booleani massimali di A. Sappiamo, dal teorema di STONE, che l'applicazione ψ di A in $\mathfrak{B}(S)$ definita da: $\psi x = \{ I \colon I \in S,\ x \notin I \}$ è un monomorfismo booleano di A in $\mathfrak{B}(S)$. Sia ora $\tilde{S}$ l'insieme degli ideali massimali di $C(A)$ ed J un elemento di $\tilde{S}$. Poniamo $K_J = \{ I \colon I \in S,\ I \cap C(A) = J \}$. È facile controllare che:

K_J è un insieme non vuoto, per ogni $J \in \tilde{S}$.

$K_J \cap K_{\bar{J}} = \emptyset$, se $J \neq \bar{J}$ (con $J, \bar{J} \in \tilde{S}$).

$$\bigcup_{J \in \tilde{S}} K_J = S.$$

Ciò significa che l'insieme $\{K_J\}_{J \in \tilde{S}}$ è una ripartizione di S. Indicheremo con R la relazione di equivalenza su S associata ad essa.

Vogliamo ora provare che, per ogni $x \in A$, si ha: $\psi Cx = R^* \psi x$, cioè che ψ è un monomorfismo *monadico* di (A, C) in $(\mathfrak{B}(S), R^*)$.

Dimostriamo dapprima che: $R^* \psi x \subseteq \psi Cx$.

Sia $I \in R^* \psi x$. Esisteranno allora un elemento $\bar{I} \in \psi x$ ed un elemento J di $\tilde{S}$ tali che: $I \cap C(A) = \bar{I} \cap C(A) = J$. Ma poichè $x \notin \bar{I}$ segue $Cx \notin J$, da cui $Cx \notin I$ e quindi $I \in \psi Cx$.

Per dimostrare che $\psi Cx \subseteq R^* \psi x$, premettiamo che, fissato $J \in \tilde{S}$, $\bigcap_{I \in K_J} I$ risulta un ideale monadico di (A, C), precisamente l'unico ideale monadico (massimale) a cui J è estendibile.

Sia ora $I \in \psi Cx$. Esisterà un $J \in \tilde{S}$ tale che $I \in K_J$. Basterà allora

([4]) Cfr. JÓNSSON-TARSKI [4] e MAGARI-MANGANI [5].

provare che $K_J \cap \psi x \neq \emptyset$ perchè si abbia: $I \in R^*\psi x$. Sia, per assurdo, $K_J \cap \psi x = \emptyset$: ciò significa che x appartiene ad ogni elemento di K_J e quindi all'intersezione degli elementi di K_J, che sappiamo essere un ideale monadico. Perciò Cx appartiene ad ogni elemento di K_J e quindi anche ad I La contraddizione prova l'asserto.

Se indichiamo con $\mathfrak{S}$ la coppia (S, R) (dove, ricordiamo, S è l'insieme degli ideali massimali di A ed R è la relazione di equivalenza su S associata alla ripartizione $\{K_J\}_{J \in \tilde{S}}$) abbiamo dunque che la coppia $(\mathfrak{S}, \psi)$ è una rappresentazione dell'algebra monadica (A, C): è facile verificare che tale rappresentazione è ridotta e perfetta. Abbiamo quindi il seguente:

TEOREMA 2. – *Ogni algebra monadica ammette una rappresentazione perfetta e ridotta (ed a meno di equivalenze una sola) come campo monadico.*

Sia ora S_0 una famiglia di STONE di ideali massimali di A (dove (A, C) è una data algebra monadica), cioè una famiglia di ideali tali che la loro intersezione sia $\{0\}$. Sappiamo che l'applicazione ψ_0 di A in $\mathfrak{B}(S_0)$ definita da: $\psi_0 x = \{I\colon I \in S_0,\ x \notin I\}$ risulta ancora un monomorfismo. Sia $\tilde{S}_0$ l'insieme degli ideali massimali di $C(A)$ ottenuti per l'intersezione con $C(A)$ dagli ideali di S_0. Possiamo ancora definire, per ogni $J \in \tilde{S}_0$, l'insieme $K_J (K_J = \{I\colon I \in S_0,$ $I \cap C(A) = J\})$ e la relazione di equivalenza R_0 su S_0 associata alla ripartizione (di S_0) $\{K_J\}_{J \in \tilde{S}_0}$. Tuttavia non avremo più, in generale. che ψ_0 è un monomorfismo monadico di (A, C) in $(\mathfrak{B}(S_0), R_0^*)$.

Se ciò accade diremo che la famiglia S_0 è «rappresentativa» per l'algebra monadica (A, C). Si ha ora il seguente:

THEOREMA 3. – *Una famiglia di Stone S_0 di ideali massimali di A è rappresentativa per l'algebra monadica (A, C) se e solo se ogni ideale monadico massimale di (A, C) ottenuto per estensione da un ideale di $\tilde{S}_0$ è intersezione di elementi di S_0 (precisamente, per ogni $J \in \tilde{S}_0$, $\bigcap_{I \in K_J} I$ è l'ideale monadico massimale a cui J si estende).*

Per dimostrare che la condizione è sufficiente basta provare che ψ_0 è un monomorfismo monadico (di (A, C) in $(\mathfrak{B}(S_0), R_0^*)$): si procede come nel caso del teorema 1.

Per dimostrare che la condizione è necessaria procediamo per assurdo: ψ_0 sia un monomorfismo monadico e supponiamo esista un $J \in \tilde{S}_0$ tale che: $\bigcap_{I \in K_J} I$ non sia un ideale monadico di (A, C). Esisterà allora almeno un elemento $x \in A$ tale che: $x \in \bigcap_{I \in K_J} I$ ed $Cx \notin \bigcap_{I \in K_J} I$. Da ciò segue che x appartiene ad ogni I di K_J e quindi $K_J \cap \psi_0 x = \emptyset$, da cui nessun I di K_J appartiene ad $R_0^* \psi_0 x$. D'altra parte esiste almeno un ideale I' di K_J a cui Cx non appartiene e dunque: $I' \in \psi_0 Cx$. Segue allora che $R_0^* \psi_0 x \neq \psi_0 Cx$, contro l'ipotesi.

Il teorema è così dimostrato.

Il teorema 3 può risultare di una qualche utilità nello studio della «regolarità» di un'algebra monadica concreta ([5]): qui non vogliamo ulteriormente insistere sull'argomento. Ci limitiamo ad osservare che se, data un'algebra monadica (A, C), A risulta atomica l'insieme degli ideali principali (massimali) generati dai coatomi di A (che coincide con l'insieme di *tutti* gli ideali massimali se e solo se A è finita) è rappresentativo per (A, C).

3. – In questo paragrafo affronteremo il problema della ricchezza di un'algebra monadica, problema importante sia da un punto di vista algebrico sia da un punto di vista logico, facendo vedere come l'argomento possa essere semplificato dalle considerazioni che faremo; vedremo anche come la rappresentazione di un'algebra monadica come campo monadico sia strettamente legata alla rappresentazione funzionale «ricca» (Cfr. HALMOS [2]).

Ricordiamo brevemente che per «costante» di un'algebra monadica (A, C) si intende un endomorfismo c di A tale che: $cC = C$ e $Cc = c$. Un'algebra monadica si dice «ricca» allorchè, per ogni $x \in A$, esiste una costante c tale che: $cx = Cx$. Le costanti giuocano un ruolo importante nella teoria della rappresentazione funzionale delle algebre monadiche: uno dei più importanti teoremi di tale teoria è quello che afferma che ogni algebra monadica è (isomorfa a) una sottoalgebra di un'algebra monadica ricca.

Sia ora $\mathcal{S} = (S, R)$ un sistema di cui S è un insieme (non vuoto) ed R una relazione di equivalenza su S. Sappiamo già che $(\mathfrak{B}(S), R^*)$ è un'algebra monadica. Vogliamo provare il seguente:

TEOREMA 4. – $(\mathfrak{B}(S), R^*)$ *è un'algebra monadica ricca.*

Premettiamo, allo scopo, alcune osservazioni.

Assegnato un sistema (S, R), sia $\{K_i\}_{i \in \Delta}$ la ripartizione di S associata ad R. Sia poi $Z (\subseteq S)$ un qualunque insieme di scelta su $\{K_i\}_{i \in \Delta}$ (Z ha in comune con ogni elemento di $\{K_i\}_{i \in \Delta}$ uno ed un solo punto di S). Z sarà chiamato «elemento diagonale» della algebra monadica $(\mathfrak{B}(S), R^*)$ ([6]).

([5]) Per uno studio delle algebre monadiche concrete Cfr. MAGARI-MANGANI [5].

([6]) Chiamiamo Z elemento diagonale in analogia a quanto accade nelle algebre [cilindriche] (Cfr. HENKIN-TARSKI [3]). Si noterà infatti che per Z valgono le seguenti proprietà: $R^*Z = S$; $R^*(Y \cap Z) \cap R^*((-Y) \cap Z) = \emptyset$ (per ogni $Y \subseteq S$).

Dimostriamo ora il nostro teorema. Sia $X \subseteq S$ (possiamo supporre che $X \neq \emptyset$): esso avrà intersezione non vuota con alcuni elementi di $\{K_i\}_{i \in \Delta}$. Consideriamo allora un insieme di scelta Z_X su $\{K_i\}_{i \in \Delta}$ tale che: $Z_X \cap (K_i \cap X) \neq \emptyset$ allorchè $K_i \cap X \neq \emptyset$ $(i \in \Delta)$ (è immediato vedere che un tale Z_X esiste). Indichiamo ora con $\mathfrak{B}(S)_{/Z_X}$ l'algebra delle «tracce» di $\mathfrak{B}(S)$ rispetto a Z_X e sia ρ l'omomorfismo naturale di $\mathfrak{B}(S)$ su $\mathfrak{B}(S)_{/Z_X}(\rho Y = Y \cap Z_X$, per ogni $Y \subseteq S)$. È facile vedere che $\mathfrak{B}(S)_{/Z_X}$ è isomorfa a $R^*(\mathfrak{B}(S))$: l'applicazione λ di $\mathfrak{B}(S)_{/Z_X}$ su $R^*(\mathfrak{B}(S))$ definita da: $\lambda W = \bigcup_{\substack{i \in \Delta \\ K_i \cap W \neq \emptyset}} K_i$ risulta infatti un isomorfismo.

Sia ora $\sigma = \lambda\rho$: si verifica facilmente che σ è una costante di $(\mathfrak{B}(S), R^*)$ tale che: $\sigma X = R^* X$. Dunque la nostra algebra monadica è ricca. Combinando il teorema 4 con il teorema 2 abbiamo il seguente corollario:

Corollario 1. – *Ogni algebra monadica è isomorfa ad una sottoalgebra di un'algebra monadica ricca.*

La rappresentabilità di ogni algebra monadica come campo monadico ed il fatto che ogni campo monadico completo è ricco permettono di ottenere il teorema forte di rappresentazione funzionale (dovuto ad Halmos) che qui ricordiamo: se $\mathfrak{A}$ è un'algebra monadica (A, C), esistono un insieme X ed un'algebra di Boole B tali che: (i) $\mathfrak{A}$ è isomorfa ad una B-valutata algebra (monadica) funzionale $\tilde{\mathfrak{A}} = (\tilde{A}, \tilde{C})$ con dominio X e (ii) per ogni $\tilde{p} \in \tilde{\mathfrak{A}}$ esiste un elemento $x \in X$ tale che: $\tilde{p}(x) = \tilde{C}\tilde{p}(x)$.

Sarebbe di qualche interesse confrontare il metodo ed i concetti (puramente algebrici ed insiemistici) qui usati per il teorema 4 con quelli di Halmos (Cfr. Halmos [2]) (7): qui ci limitiamo ad osservare che, per la discussione sulla ricchezza, non abbiamo bisogno di supporre che S sia lo spazio duale di A.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. H. Dwinger, *Introduction to Boolean Algebras*; Würzburg, 1961.

[2] P. R. Halmos. *Algebraic Logic I (Monadic Boolean Algebras)*; Compositio Mathematica, Vol. 12 (1955).

[3] Henkin-Tarski, *Cylindric Algebras*; Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. II (1959).

(7) Si veda, ad esempio, il concetto di «cross section».

[4] Jónsson-Tarski, *Boolean Algebras with operators*; Amer. J. Math. 73 (1951).

[5] Magari-Mangani, *Sulle topologie compatibili con una data algebra monadica*; Atti Acc. Sc. di Torino 98 (1963-64).

[6] R. Magari, *Sulle connessioni fra i vari modi di rappresentare un'algebra monadica*; Le Matematiche, Vol XX (1), 1965.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 3 dicembre 1965