BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI AQUARO

Osservazioni metodologiche riguardanti l'integrale di Daniell.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.4, p. 446–457.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_4_446_0>

Osservazioni metodologiche riguardanti l'integrale di Daniell

Nota di GIOVANNI AQUARO, (a Bari)

Summary. - *The aim of this Note, methodological in character, is that of showing how some known results of Daniell's Integration Theory, may be derived from a unified procedure.*

Introduzione. - La presente Nota, a carattere prevalentemente metodologico, è destinata a dare forma unitaria ad alcuni semplici risultati di teoria dell'Integrale di DANIELL, di solito considerati non riducibili l'uno all'altro.

A tal fine, viene adoperata una classe di spazii di RIESZ-STONE (spazii di RIESZ, verificanti l'ipotesi di STONE) di funzioni reali. Gli spazi di tale classe, qui denominati spazii di ARENS-BAUER, vengono distinti tra gli altri spazii di RIESZ-STONE mediante una proprietà introdotta da R. ARENS in [1] e largamente adoperata da H. BAUER in [2] e [3]. La classe suddetta include l'algebra $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ delle *funzioni semplici* rispetto ad un anello $\mathfrak{A}$ di parti di un insieme e l'algebra $\mathcal{K}(E)$ delle funzioni *reali continue a supporto compatto* sopra uno spazio (separato) localmente compatto E.

Alcune proprietà qui usate degli spazii di ARENS-BAUER sono state descritte da H. BAUER in [3] attraverso teoremi di approssimazione uniforme stabiliti da Lui e da G. NÖBELING in [5]. Le stesse proprietà vengono ritrovate qui con semplici procedimenti diretti e sono esposte nei nn. da 2 a 7.

Nel n. 8 si indicano alcuni risultati elementari concernenti le forme lineari relativamente limitate sopra uno spazio di ARENS-BAUER che costituiscono naturali estensioni di proprietà ben note per le misure di RADON (cfr. [4] cap. III, § 2, n. 4).

Nel n. 9, con la prop. 6, si stabilisce una condizione sufficiente, oltre che ovviamente necessaria, affinchè una forma lineare positiva sopra uno spazio di ARENS-BAUER sia un integrale di DANIELL (misura astratta secondo [4]). Tale condizione viene impiegata nei nn. 10 e 11 per riottenere risultati relativi alle forme lineari positive su $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ e su $\mathcal{K}(E)$.

1. - Si richiama per comodità del Lettore, una definizione che trae origine da [4] (cap. II, § 1, n. 1, def. 1).

DEF. 1. *Chiamasi spazio di Riesz di funzioni reali sopra un* *insieme E ogni insieme $\mathfrak{R}$ di funzioni reali su E verificante le seguenti proprietà*:

a) $f \in \mathfrak{R},\ g \in \mathfrak{R} \Rightarrow f + g \in \mathfrak{R}$,

b) $c \in \boldsymbol{R},\ f \in \mathfrak{R} \Rightarrow c \cdot f \in \mathfrak{R}$,

c) $f \in \mathfrak{R} \Rightarrow |f| \in \mathfrak{R}$.

OSSERVAZIONE. Notoriamente, se f e g sono elementi del suddetto $\mathfrak{R}$, da a), b), c) consegue che $f \in \mathfrak{R},\ g \in \mathfrak{R} \Rightarrow \inf(f, g) \in \mathfrak{R}$ e $\sup(f, g) \in \mathfrak{R}$.

Con riferimento ancora allo spazio di RIESZ $\mathfrak{R}$, si porrà

$$\mathfrak{R}_+ = \{ f \in \mathfrak{R} \mid 0_E \leq f \} \ (^1).$$

DEF. 2. - *Chiamasi spazio di Riesz-Stone sull'insieme E ogni spazio di Riesz $\mathfrak{R}$ di funzioni reali su E* (def. 1) *che verifichi la seguente proprietà:*

$$(S) \qquad f \in \mathfrak{R} \Rightarrow \inf(f, 1_E) \in \mathfrak{R} (^1).$$

OSSERVAZIONE 1. - La proprietà (S), detta da alcuni autori *proprietà di Stone*, è stata introdotta da M. H. STONE in [6] (pag. 337, (3)). Essa è di certo verificata se ad $\mathfrak{R}$ appartengono le funzioni costanti, o, equivalentemente, risulta $1_E \in \mathfrak{R}$, ma la (S) può essere vera senza che sia $1_E \in \mathfrak{R}$ (cfr. gli esempii che seguono).

OSSERVAZIONE 2. - Del tutto ovvio è che la (S) sia equivalente alla proprietà;

$$(S') \qquad \forall\, a \in \boldsymbol{R}_+^* \ \forall\, f \in \mathfrak{R} : \inf(f, a 1_E) \in \mathfrak{R}.$$

Quasi altrettanto ovvio è riconoscere l'equivalenza di (S) alla

$$(S'') \qquad \forall\, f \in \mathfrak{R}_+ : \inf(f, 1_E) \in \mathfrak{R}_+ .$$

Infatti la (S'') è conseguenza diretta di (S). D'altra parte, vera la (S''), se è $f \in \mathfrak{R}$, risultando notoriamente

$$(1) \qquad \inf(f, 1_E) = -f^- + \inf(f^+, 1_E)$$

(dove si richiami che è $f = f^+ - f^-$ e $\inf(f^+, f^-) = 0$), si conclude che è vera la (S).

Naturalmente esistono esempii di spazii di RIESZ-STONE di uso

(1) Per motivi di convenienza formale, con 0_E ed 1_E denoteremo le funzioni costanti su E che hanno come valore i numeri reali 0 e, rispettivamente, 1.

corrente nella teoria dell'integrazione:

ESEMPIO 1. – Sia $\mathfrak{A}$ un anello di parti di un insieme E e sia $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{F}(E, \boldsymbol{R})$ (l'algebra delle funzioni reali su E) generato dalla famiglia $(\varphi_X)_{X\in\mathfrak{A}}$ delle funzioni caratteristiche degli elementi di $\mathfrak{A}$. Allora $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ risulta uno spazio di RIESZ–STONE e risulta $1_E \in \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ se e solo se è $E\in\mathfrak{A}$.

ESEMPIO 2. – Se E è uno spazio topologico, l'insieme delle funzioni reali continue su E che si annullano in un punto di E é uno spazio di RIESZ–STONE non banale se esistono funzioni reali continue non costanti su E, tale che 1_E non gli appartenga.

ESEMPIO 3. – Supponiamo che E sia uno spazio topologico separato localmente compatto. Allora l'insieme $\mathcal{K}(E)$ delle funzioni reali continue a supporto compatto su E è uno spazio di RIESZ–STONE su E. Inoltre $1_E\in\mathcal{K}(E)$ se e solo se E è compatto.

2. – Si analizzerà un importante sottospazio di uno spazio di RIESZ-STONE dopo aver isolato, per comodità del Lettore, la seguente osservazione.

LEMMA 1. – *Supponiamo che f ed h siano funzioni reali sull'insieme E e sia $0_E \leq h$. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $\forall\, \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+^*$: $\inf(|f|, \varepsilon 1_E) \leq \varepsilon h$,

b) detta φ_A la funzione caratteristica dell'insieme A definito ponendo $A = \{x\in E \mid f(x) \neq 0\}$. risulta:

$$\varphi_A \leq h,$$

c) $x\in E$, $h(x) < 1 \Rightarrow f(x) = 0$.

DIM. *a)* $\Rightarrow$ *b)*. – Se è vera la *a)*, per ogni $n\in \boldsymbol{N}$, risulta

$$\inf(n\,|f|,\ 1_E) \leq h$$

e quindi

$$\varphi_A = \sup_{n\in N} \inf(n\,|f|,\ 1_E) \leq h.$$

b) $\Rightarrow$ *c)*. – Sia vera la *b)* e sia $x\in E$ e $h(x) < 1$. Da *b)* consegue $\varphi_A(x) \leq h(x) < 1$ e quindi $\varphi_A(x) = 0$ donde $f(x) = 0$.

c) $\Rightarrow$ *a)*. – Sia vera la *c)* e sia $x \in E$. Allora o è $f(x) = 0$ ed allora banalmente, quale che sia $\varepsilon\in\boldsymbol{R}_+^*$,

$$\inf(|f|,\ \varepsilon 1_E)(x) \leq \varepsilon h(x), \tag{1}$$

oppure è $f(x) \neq 0$ ma allora si ha $1 \leq h(x)$ e quindi $\inf(|f|, \varepsilon 1_E)(x) \leq \varepsilon \leq \varepsilon h(x)$ e da ciò, ancora la (1).

3. - Se $\mathfrak{R}$ è uno spazio di RIESZ (def. 1) di funzioni reali sull'insieme E, denoteremo con $\mathfrak{R}^\infty$ l'insieme degli elementi limitati di $\mathfrak{R}$. In altri termini, porremo:

$$\mathfrak{R}^\infty = \{ f \in \mathfrak{R} \mid \exists M \in \boldsymbol{R}_+^* \ni' \forall\, x \in E: \ |f(x)| \leq M \}.$$

È del tutto ovvio che $\mathfrak{R}^\infty$, al pari di $\mathfrak{R}$, è uno spazio di RIESZ e, se $\mathfrak{R}$ verifica la proprietà di STONE (cfr. Osservazione 1 alla def. 1), anche $\mathfrak{R}^\infty$ la verifica.

Ciò premesso, sia $f \in \mathfrak{R}$, con $\mathfrak{R}$ spazio di RIESZ-STONE su E, e sia $\alpha \in \boldsymbol{R}_+^*$. Posto

$$f_\alpha = f - \inf(f,\ \alpha 1_E),$$

in forza di (1) del n. 1, risultando $\inf(f,\ \alpha 1_E) = \alpha \inf\left(\frac{1}{\alpha} f,\ 1_E\right)$, si ha

$$f_\alpha = f^+ - f^- - (-f^- + \inf(f^+,\ \alpha 1_E) = f^+ - \inf(f^+,\ \alpha 1_E).$$

Posto $h = \alpha^{-1} f^+$, evidentemente, si ha

$$f_\alpha \in \mathfrak{R}_+,\ h \in \mathfrak{R}_+;\ x \in E,\ h(x) < 1 \Rightarrow f_\alpha(x) = 0.$$

Inoltre

$$f \in \mathfrak{R}^\infty \Rightarrow f_\alpha \in \mathfrak{R}_+^\infty,\ h \in \mathfrak{R}_+^\infty.$$

Si deve subito osservare che f_α ed h verificano la terza e quindi ciascuna delle proposizioni equivalenti a), b), c) del lemma 1.

4. - Dopo ciò con H. BAUER [3] (§ 1, 1·2, pag 54), poniamo:

(1) $$\mathfrak{R}^0 = \{ f \in \mathfrak{R}^\infty \mid \exists h \in \mathfrak{R}_+ \ni' x \in E,\ h(x) < 1 \Rightarrow f(x) = 0 \}.$$

In forza del lemma 1. risulta anche

(2) $$\mathfrak{R}^0 = \{ f \in \mathfrak{R}^\infty \mid \exists h \in \mathfrak{R}_+ \ni' \forall\, \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+^*:\ \inf(f,\ \varepsilon 1_E) \leq \varepsilon h \},$$

nonchè

(3) $$\mathfrak{R}^0 = \{ f \in \mathfrak{R}^\infty \mid \exists h \in \mathfrak{R}_+ \ni' \operatorname{Spt}(f) \leq h \}$$

dove per una qualunque funzione reale g su E si ponga

$$\operatorname{Spt}(g) = \sup_{n \in \boldsymbol{N}} \inf(n|g|,\ 1_E)$$

ossia con $\operatorname{Spt}(g)$ si indichi la funzione caratteristica φ_A dell'insieme

$$A = \{ x \in E \mid g(x) \neq 0 \}.$$

Si verifica subito e ciò, per completezza, viene eseguito appresso, che $\mathfrak{R}^0$ è uno spazio di RIESZ-STONE su E.

Invero, in primo luogo, si riconosce che è verificata a) della def. 1. Sia $f \in \mathfrak{R}^0$ e $g \in \mathfrak{R}^0$; esistono dunque $h \in \mathfrak{R}_+$ e $k \in \mathfrak{R}_+$ tali che $\forall\ \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+^*$: $\inf(|f|,\ \varepsilon 1_E) \leq \varepsilon h$, $\inf(|g|,\ \varepsilon 1_E) \leq \varepsilon k$ e quindi si ha $\inf(|f+g|,\ \varepsilon 1_E) \leq \inf(|f|+|g|,\ \varepsilon 1_E) \leq \inf(|f|,\ \varepsilon 1_E) + \inf(|g|,\ \varepsilon 1_E) \leq$ $\leq \varepsilon(h+k)$. Ciò, poichè risulta $h+k \in \mathfrak{R}_+$, dimostra che è $f+g \in \mathfrak{R}^0$.

Se, poi, si tiene presente che, $\forall\ c \in \boldsymbol{R}\ c \neq 0$, risulta $\inf(|c \cdot f|,\ \varepsilon 1_E) =$ $= |c| \inf\left(|f|,\ \frac{\varepsilon}{|c|} 1_E\right) \leq |c| \frac{\varepsilon}{|c|} h = \varepsilon h$, anche la $b)$ della def. 1 è verificata.

La $c)$ è ovvia e la (S) si riconosce subito tenendo presente che è $\inf(\inf(f,\ 1_E),\ \varepsilon 1_E) = \inf(f,\ \inf(\varepsilon,\ 1) 1_E) \leq \inf(\varepsilon,\ 1) h \leq \varepsilon h$.

Dunque, richiamata la def. 1, $\mathfrak{R}^0$ risulta uno spazio di RIESZ-STONE.

In aggiunta a quanto sopra si riconosce che

$$\forall\ f \in \mathfrak{R}^0 \exists h \in \mathfrak{R}_+^0 \ni' (\inf |f|,\ \varepsilon 1_E) \leq \varepsilon h. \tag{4}$$

Sappiamo già che, per definizione, se è $f \in \mathfrak{R}^0$ esiste $k \in \mathfrak{R}_+$ tale che $x \in E$ e $k(x) < 1 \Rightarrow f(x) = 0$ (cfr. la (1) qui sopra). Si assuma $k^0 = k - \inf\left(k,\ \frac{1}{3} 1_E\right)$. Allora, per il contenuto del n. 3, risulta

$$k^0 \in \mathfrak{R}_+^0.$$

Inoltre si ha

$$0 \leq k - k^0 = \inf\left(k,\ \frac{1}{3} 1_E\right) \leq \frac{1}{3} 1_E,$$

e quindi

$$k^0 \leq k \leq k^0 + \frac{1}{3} 1_E.$$

Se è $k^0(x) < \frac{1}{2}$, si ha $k(x) \leq k^0(x) + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$ e quindi $f(x) = 0$. Posto $h = 2k^0$, allora, da $h(x) < 1$ consegue $f(x) = 0$ e ciò, essendo $h \in \mathfrak{R}_+^0$, dimostra che la (4) è vera.

5. - Si deve osservare ora che:

PROP. 1. - *Sia $f \in \mathfrak{R}_+^\infty$. Allora, posto*

$$f_n = f - \inf\left(f,\ \frac{1}{n+1} 1_E\right) \qquad \forall\ n \in \boldsymbol{N},$$

la $(f_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ è una successione monotona crescente di elementi di $\mathfrak{R}_+^0$ e $\forall\ n \in \boldsymbol{N}$ risulta:

$$0 \leq f - f_n \leq \frac{1}{n+1} 1_E$$

e quindi tale successione converge uniformemente verso f in E.

DIM. – Occorre solo riconoscere che ogni f_n è in $\mathfrak{R}_+^0$ e questo consegue banalmente dal contenuto del n. 3.

COROLLARIO. – *Lo spazio di Riesz-Stone $\mathfrak{R}^0$ su E è contenuto in $\mathfrak{R}^\infty$ ed è ovunque denso in $\mathfrak{R}^\infty$ stesso quando questo sia munito della norma uniforme.*

DIM. – Ogni $f \in \mathfrak{R}^\infty$ è differenza, di due elementi, quali p.es. f^+ e f^-, di $\mathfrak{R}_+^\infty$.

PROP. 2. – *Se risulta $f \in \mathfrak{R}_+$ esiste una successione monotona crescente $(f_n)_{n\in N}$ di elementi di $\mathfrak{R}_+^0$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.*

DIM. – Per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ pongasi

$$g_n = \inf(f,\ n1_E).$$

Allora, evidentemente, risulta

$$f = \sup_{n\in N} \inf(f,\ n1_E) = \lim_{n\to\infty} g_n. \tag{1}$$

Dall'altra parte, per la prop. 1, posto $f_n = g_n - \inf\left(g_n, \dfrac{1}{n+1} 1_E\right)$, si ha

$$f_n \leq g_n \leq f_n + \frac{1}{n+1} 1_E. \tag{2}$$

Evidentemente, essendo $g_n \in \mathfrak{R}_+^\infty$, risulta $f_n \in \mathfrak{R}_+^0$ come consegue dal n. 3. D'altra parte, poichè la successione $(g_n)_{n\in N}$ è monotona crescente, altrettanto accade della $(f_n)_{n\in N}$. A causa di (1) e (2), la $(f_n)_{n\in N}$ converge e si ha:

$$f = \lim_{n\to\infty} g_n = \operatorname{lin}_{n\to\infty} f_n.$$

OSSERVAZIONE. – Questa volta, la convergenza della successione $(f_n)_{n\in N}$ non è necessariamente uniforme.

6. – I risultati precedenti consentono di porre una definizione:

DEF. 3. – *Chiamasi spazio di Arens-Bauer sull'insieme E ogni spazio di Riesz-Stone* (def. 2) *$\mathfrak{R}$ su E formato da funzioni limitate che verifichi la seguente proprietà*

$$\forall f \in \mathfrak{R}\ \exists h \in \mathfrak{R}_+ \ni' \forall \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+^*:\ \inf(|f|,\ \varepsilon 1_E) \leq \varepsilon h. \tag{AB}$$

OSSERVAZIONE 1. – Si lascia al Lettore il compito di riformulare la proprietà (AB) sulla base della equivalenza di *a*), *b*), *c*) nel lemma 1.

OSSERVAZIONE 2. – La proprietà (AB) è stata usata di R. ARENS in [1] e successivamente utilizzata da H. BAUER come strumento essenziale per la dimostrazione dei fondamentali teoremi di rappresentazione in [2] e [3].

Da questa definizione e dalla prop. 1 consegue che

PROP. 3. – *Supponiamo che* $\mathfrak{R}$ *sia uno spazio di Riesz-Stone sull'insieme* E (def. 2) *e supponiamo* $\mathfrak{R}^{\infty} = \{ f \in \mathfrak{R} \mid \exists M \in \boldsymbol{R}_{+}^{*} \ni' \forall x \in E : |f(x)| \leq M \}$ *cioè supponiamo che* $\mathfrak{R}^{\infty}$ *sia il sottospazio di Riesz-Stone degli elementi limitati di* $\mathfrak{R}$. *Allora, posto*

$$\mathfrak{R}^{0} = \{ f \in \mathfrak{R}^{\infty} \mid \exists\, h \in \mathfrak{R}_{+} \ni' \forall \varepsilon \in \boldsymbol{R}_{+}^{*} : \ \inf(|f|, \varepsilon 1_{E}) \leq \varepsilon h \},$$

$\mathfrak{R}^{0}$ *è uno spazio di Arens-Bauer* (def. 3) *contenuto in* $\mathfrak{R}^{\infty}$ *ed ovunque denso in* $\mathfrak{R}^{\infty}$ *munito della norma uniforme.*

OSSERVAZIONE. – Se, in particolare, risulta $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{\infty}$, allora $\mathfrak{R}^{0}$ è ovunque denso in $\mathfrak{R}$ per la norma uniforme.

7. In quanto segue $\mathfrak{R}$ è uno spazio di ARENS-BAUER sull'insieme E e per ogni $h \in \mathfrak{R}_{+}$ poniamo

$$\mathfrak{R}(h) = \{ f \in \mathfrak{R} \mid \operatorname{Spt}(f) \leq h \}$$

dove $\operatorname{Spt}(f)$ è definita come nel n. 4.

Si riconosce facilmente che $\mathfrak{R}(h)$ è un sottospazio di RIESZ-STONE in $\mathfrak{R}$. A tal fine, siano f e g in $\mathfrak{R}(h)$. Poichè risulta

$$\operatorname{Spt}(|f+g|) \leq \operatorname{Spt}(|f|+|g|) \leq \sup(\operatorname{Spt}(|f|),\ \operatorname{Spt}(|g|)) \leq h$$

si trae $f + g \in \mathfrak{R}(h)$.

Così la $a)$ della def. 1 risulta dimostrata; le $b)$ e $c)$ sono di dimostrazione immediata: dunque $\mathfrak{R}(h)$ è uno spazio di RIESZ. Che esso verifichi la (S) della def. 2 è, del pari, immediato.

8. Ciò premesso si passa a caratterizzare le forme lineari relativamente limitate sopra uno spazio di ARENS-BAUER.

Premettiamo a tal fine la

PROP. 4. – *Supponiamo che* $\mathfrak{R}$ *sia uno spazio di Arens-Bauer sullo insieme* E (def. 3) *e, per ogni* $h \in \mathfrak{R}_{+}$, $\mathfrak{R}(h)$ *sia definito come nel* n. 7. *Allora, ogni forma lineare positiva* μ *su* $\mathfrak{R}$ *è continua in* $\mathfrak{R}(h)$ *come spazio normato con la norma uniforme.*

DIM. – Sia $f \in \mathfrak{R}(h)$ per un fissato $h \in \mathfrak{R}_{+}$. Risultando $\operatorname{Spt}(|f|) \leq h$, si ha $|f| \leq \|f\| \operatorname{Spt}(|f|) \leq \|f\| h$ e quindi, la μ essendo positiva, cioè crescente, si ha $|\mu(f)| \leq \mu(|f|) \leq \mu(h) \|f\|$. Da ciò la tesi.

PROP. 5. – *Supponiamo che $\mathfrak{R}$ sia uno spazio di Arens-Bauer sullo insieme E* (def. 3) *e, per ogni $h \in \mathfrak{R}_+$, $\mathfrak{R}(h)$ sia definito come nel* n. 7. *Allora per una forma lineare μ su $\mathfrak{R}$ (elemento del duale algebrico di $\mathfrak{R}$) le seguenti due proposizioni sono equivalenti:*

a) $\forall h \in \mathfrak{R}_+ \exists M_h \in \boldsymbol{R}^*_+ \ni' \forall f \in \mathfrak{R}(h) : |\mu(f)| \leq M_h \| f \|$ *(cioè la restizione di μ allo spazio $\mathfrak{R}(h)$, normato con la norma uniforme e continua),*

b) μ *è relativamente limitata* ([4] cap. II, § 2, n. 2, def. 2).

DIM. – $a) \Rightarrow b)$. Sia vera la $a)$, sia $g \in \mathfrak{R}_+$ e sia $f \in \mathfrak{R}$ tale che $|f| \leq g$. Risulta $\mathrm{Spt}(|f|) \leq \mathrm{Spt}(g)$. Sia $h \in \mathfrak{R}_+$ tale che $\mathrm{Spt}(g) \leq h$.
Consegue $\mathrm{Spt}(|f|) \leq$ e quindi $f \in \mathfrak{R}(h)$ per cui si ha, in forza di $a)$, $|\mu(f)| \leq M_h \|f\| \leq M_h \|g\|$ e quindi μ è relativamente limitata.

$b) \Rightarrow a)$. Ammessa vera la $b)$, risulta $\mu = \mu^+ - \mu^-$, dove μ^+ è μ^-, parte positiva e parte negativa di μ, sono notoriamente forme lineari positive su $\mathfrak{R}$. Allora la $a)$ consegue dalla prop. 4.

Può avere interesse osservare il

COROLLARIO. – *Nelle ipotesi della prop.* 5, *sia μ relativamente limitata su $\mathfrak{R}$. Supponiamo che per un $h \in \mathfrak{R}_+$, $(f_l)_{l \in I}$ sia una famiglia di elementi di $\mathfrak{R}(h)$ ed $\mathfrak{F}$ sia un filtro su I tale che $(f_l)_{l \in I}$ converga uniformemente attraverso $\mathfrak{F}$ ad una $f \in \mathfrak{R}(h)$. Allora si ha:*

$$\lim_{\mathfrak{F}} \mu(f_l) = \mu(f).$$

9. Nel n. 8 si sono caratterizzate le forme lineari relativamente limitate sopra uno spazio di ARENS-BAUER.

Si procede ora ad indicare un criterio, che sia sufficentemente maneggevole da contenere i casi più importanti della teoria della integrazione, per riconoscere ,tra le forme lineari positive, quelle che sono integrali di DANIELL.

A tal fine, si introduce una definizione.

DEF. 4. – *Supponiamo che $\mathfrak{R}$ sia uno spazio di Ares-Bauer sull'insieme E. Una successione $(f_n)_{n \in N}$ di elementi di $\mathfrak{R}$ si dice convergente a 0_E dominatamente in $\mathfrak{R}$ se esiste una successione monotona decrescente $(h_n)_{n \in N}$ di elementi di $\mathfrak{R}_+$ convergente a 0_E e tale che $\forall n \in \boldsymbol{N}$ sia* $\mathrm{Spt}(f_n) \leq h_n$ *(dove* $\mathrm{Spt}(f_n)$ *è definita come nel* n. 4).

OSSERVAZIONE. – Se $(f_n)_{n \in N}$ converge a 0_E dominatamente in $\mathfrak{R}$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} f_n = 0.$$

Infatti, se $(h_n)_{n\in N}$ è la successione di cui sopra, supposto $x \in E$ ed $\varepsilon \in R^*_+$, da $\lim_{n\to\infty} h_n = 0_E$, consegue che $\exists\, \nu \in N \ni' n \in N$ e $\nu \leq n$ implica $h_n(x) < \inf(\varepsilon, 1)$. Essendo $\mathrm{Spt}(|f_n|)(x) \leq h_n(x) < 1$, consegue $|f_n(x)| = 0 < \varepsilon$ e da ciò $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Ciò premesso sussiste la

Prop. 6. – *Sia* $\mathfrak{R}$ *uno spazio di Arens–Bauer sull'insieme* E (def. 1) *e sia* I *una forma lineare positiva su* $\mathfrak{R}$ *tale che se* $(f_n)_{n\in N}$ *è una successione monotona decrescente di elementi di* $\mathfrak{R}_+$ *convergente a* 0_E *dominatamente in* $\mathfrak{R}$ (def. 4), *allora risulta*

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = 0.$$

Allora I *è un integrale di Daniell su* $\mathfrak{R}$.

Dim. – Supponiamo che $(f_n)_{n\in N}$ sia una qualunque successione monotona decrescente, convergente a 0_E di elementi di $\mathfrak{R}_+$ e sia $\varepsilon \in R^*_+$.

Per ogni $n \in N$, pongasi

$$\varphi_n = \inf(f_n, \varepsilon 1_E), \qquad \psi_n = f_n - \varphi_n. \tag{1}$$

Ovviamente risulta:

$$f_n = \varphi_n + \psi_n, \qquad \varphi_n \in \mathfrak{R}_+, \qquad \psi_n \in \mathfrak{R}_+ \tag{2}$$

ed, inoltre, le successioni $(\varphi_n)_{n\in N}$ e $(\psi_n)_{n\in N}$ sono monotone decrescenti e convergenti a 0_E. Poichè la forma lineare I è positiva, consegue che le successioni numeriche

$$(I(f_n))_{n\in N}, \qquad (I(\varphi_n))_{n\in N}, \qquad (I(\psi_n))_{n\in N}$$

sono monotone decrescenti e convergenti verso limiti positivi e, a causa di (2), si ha

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) + \lim_{n\to\infty} I(\psi_n). \tag{3}$$

Si riconosce subito che è

$$\lim_{n\to\infty} I(\psi_n) = 0. \tag{4}$$

Infatti nel n. 3, si sostituisca f con f_n, α con ε e si richiami il lemma 1. Allora si ha $\mathrm{Spt}(\psi_n) \leq \varepsilon^{-1} f_n$ e quindi, la successione monotona decrescente $(\psi_n)_{n\in N}$ di elementi di $\mathfrak{R}_+$ converge a 0^E

dominatamente in $\mathfrak{R}$ (def. 4) e da ciò la (4).

D'altra parte, $\mathfrak{R}$ è uno spazio di ARENS-BAUER (def. 2) e quindi esiste un $h \in \mathfrak{R}_+$ tale che

$$\forall\, \alpha \in \boldsymbol{R}^*_+ : \inf (f_0, \alpha 1_E) \leq \alpha h$$

e quindi, in particolare, per $\alpha = \varepsilon$

$$\varphi_n \leq \varphi_0 \leq \varepsilon h \qquad \forall\, n \in \boldsymbol{N}.$$

La I essendo una forma lineare positiva, consegue:

$$I(\varphi_n) \leq I(h)$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} I(\varphi_n) \leq \varepsilon I(h).$$

Da ciò, richiamate (3) e (4), si trae

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} I(f_n) \leq \varepsilon I(h)$$

e da ciò, per l'arbitrarietà di ε,

$$\lim_{n \to \infty} I(f_n) = 0.$$

Dunqne, a norma di definizione, I è un integrale di DANIELL.

10. In questo n. 10 e nel seguente n. 11 utilizzeremo la prop. 6 per i due casi di maggiore interesse nella teoria dell'integrazione cioè quelli in cui lo spazio di RIESZ-STONE $\mathfrak{R}$ sia lo spazio $\mathcal{K}(E)$ dell'esempio 3 e, rispettivamente, lo spazio $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ dell'esempio 1 del n. 1.

Dimostriamo in primo luogo che $\mathcal{K}(E)$ è uno spazio di ARENS-BAUER. Infatti se è $f \in \mathcal{K}(E)$, detto A il supporto (compatto) di f, sia U un intorno aperto relativamente compatto di A e sia h, notoriamente esistente per la locale compattezza dello spazio separato E, un elemento di $\mathcal{K}(E)$ tale che $h(E) \subset [0, 1]$, $A \subset h^{-1}(1)$ e $\complement\, U \subset h^{-1}(0)$. Col significato attribuito a Spt(f) nel n. 4, risulta

$$\mathrm{Spt}\,(f) \leq h.$$

Dunque $\mathcal{K}(E)$ è uno spazio di ARENS-BAUER (def. 3).

Prop. 7. – *Se (f_n) è una successione monotona decrescente di ele-*

menti di $\mathcal{K}_+(E)$ convergente a 0_E dominatamente in $\mathcal{K}(E)$ (def. 4), *esiste $\nu \in \boldsymbol{N}$ tale che da $\nu \leq n \in \boldsymbol{N}$ consegna $f_n = 0_E$.*

Dim. - Sia $(h_n)_{n \in N}$ una successione monotona decrescente di elementi di $\mathcal{K}_+(E)$ convergente a 0_E tale che

$$\mathrm{Spt}\,(f_n) \leq h_n, \qquad \forall\, n \in \boldsymbol{N}.$$

Sia

$$A_n = \{ x \in E \mid f_n(x) \neq 0 \}.$$

Siccome $\mathrm{Spt}\,(f_n)$ è la funzione caratteristica di A_n, e poiché h_n è una funzione continua, risulta

$$\varphi_{\bar{A}_n} \leq h_n$$

dove $\varphi_{\bar{A}_n}$ è, ovviamente, la funzione caratteristica di $\bar{A}_n$. Consegue

$$0 \leq \lim \varphi_{\bar{A}_n} \leq \lim h_n = 0$$

donde, $(A_n)_{n \in N}$ essendo una successione monotona decrescente di parti di E, risulta

$$\bigcap_{n \in N} \bar{A}_n = \emptyset.$$

Da ciò, poichè ogni $\bar{A}_n$ è compatto, consegue che esiste $\nu \in \boldsymbol{N}$ tale che $\bar{A}_\nu = \emptyset$ e quindi per $\nu \leq n \in \boldsymbol{N}$: $\bar{A}_n = \emptyset$ e quindi $f_n = 0$.

Corollario. - *Ogni forma lineare positiva su $\mathcal{K}(E)$ è un integrale di Daniell.*

Dim. - Consegue dalle propp. 6 e 7.

11. Le notazioni sono quelle dell'esempio 1 del n. 1. In questo caso per ogni $f \in \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ risulta $\mathrm{Spt}\,(f) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ e quindi $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ è uno spazio di Arens-Bauer.

Sia μ una misura su $\mathfrak{A}$ ossia una funzione reale positiva e additiva definita su $\mathfrak{A}$ verificante l'assioma

(M) *Se $(X_n)_{n \in N}$ è una successione monotona decrescente di elementi di $\mathfrak{A}$ avente intersezione vuota allora si ha*

$$\lim_{n \to \infty} \mu(X_n) = 0.$$

Come è noto (cfr. [4] cap. IV, § 4, n. 9, prop. 15) esiste una ed una sola forma lineare I_μ su $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ tale che

$$\forall\, X \in \mathfrak{A} : I_\mu(\varphi_X) = \mu(X).$$

Sia $(f_n)_{n \in N}$ una successione monotona decrescente di elementi di $\mathcal{L}_+(\mathfrak{M})$ convergente a 0_E con la condizione che

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Spt}(f_n) = 0.$$

Allora, posto

$$A_n \{ x \in E \mid f_n(x) \neq 0 \}$$

si ha $\varphi_{A_n} = \operatorname{Spt}(f_n)$ e quindi è

$$\bigcap_{n \in N} A_n = \emptyset.$$

Essendo

$$f_n \leq \| f_n \| \varphi_n \leq \| f_0 \| \varphi_n ,$$

si ha, I_μ essendo una forma lineare positiva,

$$I_\mu(f_n) \leq \| f_0 \| I_\mu(\varphi_n) \leq \| f_0 \| \mu(A_n).$$

Dall'ipotesi (M), consegue

$$\lim_{n \to \infty} I_\mu(f_n) = 0.$$

Dunque, per la prop. 6, I_μ è un integrale di DANIELL.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. ARENS, *Rapresentation of functionals by integrals*; Duke Math. J.; vol. 17 (1950) pp. 499-506.

[2] H. BAUER, *Über die Beziehung einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals*: Math. Zeitschrift; vol. 65 (1956) pp. 448-482.

[3] — —, *Sur l'equivalence des théories de l'Integration selon* N. BOURBAKI *et selon* M. H. STONE; Boull. Soc. Math. France; vol. 85 (1957) pp. 51-75.

[4] N. BOURBAKI, *Integration*; Actual. Scient. et Ind. n. 1175. Hermann Paris (1952).

[5] G. NÖBELING e H. BAUER, *Algemeine Approximationskriterien mit Anwendungen*; J.-Ber. Deutsch. Math. Verein.; vol 58 (1955) pp. 54-72.

[6] M. H. STONE, *Notes on integration*; I-IV; Proc. Nat. Acad. Science U.S.A.; vol. 34 (1948) e vol. 35 (1949).

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 10 dicembre 1965.