Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giorgio Talenti

Una diseguaglianza integrale.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.1, p. 25–34.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_1_25_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Una diseguaglianza integrale

Giorgio Talenti (Genova) [1]

Sunto. - *Si dimostra una diseguaglianza integrale, connessa con la diseguaglianza di Hardy, che si presenta nello studio di equazioni ellittiche a simmetria assiale, e di equazioni ellittiche a coefficienti singolari.*

1. In questa nota si dimostrano i teoremi seguenti:

Teorema 1. - *Sia $k(y)$ non negativa e sommabile, $1/k(y)$ localmente sommabile nell'intervallo* $]0, l]$ $(0 < l < +\infty)$; *poniamo*:

$$\lambda_0 = 4 \sup_{0<y\leq l} \int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)} \int_0^y k(t)dt.$$

Se f è funzione misurabile non negativa:

$$\int_0^l \left(\frac{1}{y}\int_0^y f(t)dt\right)^2 \frac{dy}{k(y)} \leq \lambda_0 \int_0^l f(y)^2 \frac{dy}{k(y)}. \tag{1}$$

Teorema 2. - *Sia k positiva, di classe C^1, sommabile nell'intervallo* $]0, l[$; *supponiamo che*:

$$y\frac{d}{dy}\log k(y) \geq k_1 = \text{costante} > -1.$$

Se f è misurabile non negativa:

$$\int_0^l \left(\frac{1}{y}\int_0^y f(t)dt\right)^2 \frac{dy}{k(y)} \leq \frac{4}{(1+k_1)^2} \int_0^l f(y)^2 \frac{dy}{k(y)} \quad [2]. \tag{2}$$

[1] Questo lavoro fa parte dell'attività del gruppo di ricerca n° 23 del C.N.R., a.a. 1965-1966.

[2] Se $\inf_{c<y\leq l} y\frac{d}{dy}\log k(y) \leq -1$, una diseguaglianza del tipo (2) non sussiste necessariamente; cfr. il n° 4.

OSSERVAZIONE 1. - È nota la diseguaglianza di HARDY [3]:

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{y}\int_0^y f(t)dt\right)^p dy \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f(y)^p dy \tag{3}$$

$$(p > 1, \quad f(y) \geq 0);$$

più generalmente, sussiste la disuguaglianza [3]:

$$\int_0^{+\infty} y^h \left(\frac{1}{y}\int_0^y f(t)dt\right)^p dy \leq \left(\frac{p}{p-h-1}\right)^p \int_0^{+\infty} y^h f(y)^p dy \tag{3'}$$

$$(p > 1, \quad h < p-1, \quad f(y) \geq 0).$$

Osserviamo che, nel caso $p = 2$, (3)-(3') sono casi particolari di (1)-(2). Infatti, se si prende $k(y) = y^{-h}$ $(h < 1)$, risulta

$$\lambda_0 = 4 \sup_{0<y\leq l} \int_y^l t^{h-2}dt \int_0^y t^{-h}dt = \frac{4}{(1-h)^2} \sup_{0<y\leq l} (1-(y/l)^{1-h}) = \frac{4}{(1-h)^2},$$

$k_1 = -h$; dunque (1)-(2) si riducono a:

$$\int_0^l y^h \left(\frac{1}{y}\int_0^y f(t)dt\right)^2 dy \leq \frac{4}{(1-h)^2} \int_0^l y^h f(y)^2 dy. \qquad (h < 1);$$

facendo $l \to +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} y^h \left(\frac{1}{y}\int_0^y f(t)dt\right)^2 dy \leq \frac{4}{(1-h)^2} \int_0^{+\infty} y^h f(y)^2 dy \qquad (h < 1),$$

che coincide con (3') nel caso $p = 2$.

OSSERVAZIONE 2. - Le diseguaglianze (1)-(2) servono per stabilire limitazioni a priori per soluzioni di equazioni ellittiche del tipo:

$$A_{11}v_{xx} + 2A_{12}v_{xy}, + A_{22}v_{yy} + \frac{K}{y}v_y = f$$

[3] cfr. HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA: Inequalities (Cambridge, 1934), §§ 9.8, 9.9; formule (9.8.2) (disuguaglianza di HARDY), (9.9.10) (si ponga $r = p - h$).

in regioni del semipiano $y > 0$, prossime all'asse $y = 0$. Equazioni di questo tipo si presentano nella ricerca di soluzioni a simmetria assiale di equazioni ellittiche in più variabili: vale a dire soluzioni di: $\sum_{i,j}^{1,N} a_{ij}\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j = f$, della forma:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) = v(x_1, \sqrt{x_2^2 + \ldots + x_N^2}).$$

Tale ricerca sarà oggetto di una prossima pubblicazione.

2. Per dimostrare il Teorema 1 occorrono questi lemmi:

LEMMA 1. – *Sia $p(z)$ funzione misurabile non negativa nell'intervallo* $[0, +\infty[$; *supponiamo che*:

$$\sup_{0 \leq z < +\infty} z \int_z^{+\infty} p(t)dt < \frac{1}{4}.$$

Esiste una funzione v di classe C^1 $[0, +\infty[$, *con derivata prima assolutamente continua, che verifica quasi ovunque l'equazione*

$$v'' + p(z)v = 0,$$

ed è inoltre:

$$v(z) > 0, \qquad \lim_{z \to +\infty} v'(z) = 0 \text{ [4]}.$$

[4] HILLE (cfr. E. HILLE, *Non-oscillation theorems*, «Transactions of the Am. Math. Soc.», vol. 64, 1948) dimostra questo teorema: condizione necessaria affinchè l'equazione $v'' + p(z)v = 0$ $(p(z) \geq 0)$ sia non oscillatoria in un intorno di $+\infty$ è che $\limsup_{z \to +\infty} z \int_z^{+\infty} p(t)dt \leq 1$, $\liminf_{z \to +\infty} z \int_z^{+\infty} p(t)dt \leq \frac{1}{4}$; una condizione sufficiente è $\limsup_{z \to +\infty} z \int_z^{+\infty} p(t)dt < \frac{1}{4}$. Per dimostrare la sufficienza della condizione, HILLE prova che, se $\sup_{z \geq c} z \int_z^{+\infty} p(t)dt \leq \frac{1}{4}$ per c abbastanza grande, esiste una soluzione di $v'' + p(z)v = 0$, positiva in un intorno di $+\infty$. Una lieve modifica della ipotesi e del procedimento di HILLE consentono di provare il Lemma 1; la dimostrazione di questo Lemma è desunta da quella dei teoremi 4 e 7 della citata memoria di HILLE, ed è qui riportata per motivi di completezza.

La nota di HILLE mi è stata segnalata da KEITH ODDSON.

DIMOSTRAZIONE. - Il Lemma è ovvio se $p(z) \equiv 0$; supponiamo dunque $p(z) \not\equiv 0$. Sia:

$$0 < \varepsilon < \left(\frac{1}{4} - \sup_{0 \leq z < +\infty} z \int_z^{+\infty} p(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} p(t)dt\right)^{-1};$$

risulta

$$\int_z^{+\infty} p(t)dt \leq \frac{1}{4(z+\varepsilon)}. \tag{4}$$

Definiamo una successione di funzioni $[0, +\infty[\ni z \to w_n(z)$ ponendo:

$$w_0(z) = \frac{1}{2(z+\varepsilon)}, \qquad w_n(z) = \int_z^{+\infty} w_{n-1}(t)^2 dt + \int_z^{+\infty} p(t)dt \quad (n \geq 1). \tag{5}$$

Si ha:

$$w_1(z) = \int_z^{+\infty} \frac{dt}{4(t+\varepsilon)^2} + \int_z^{+\infty} p(t)dt = \frac{1}{4(z+\varepsilon)} + \int_z^{+\infty} p(t)dt,$$

dunque, per (4):

$$w_1(z) \leq \frac{1}{2(z+\varepsilon)} = w_0(z),$$

$$w_1(z) - w_0(z) \leq 0;$$

ma:

$$w_{n+1}(z) - w_n(z) = \int_z^{+\infty} (w_n(t)^2 - w_{n-1}(t)^2)dt,$$

quindi:

$$w_{n+1}(z) - w_n(z) \leq 0,$$

$$w_n(z) \geq w_{n+1}(z) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...) \tag{6}$$

Per (5)

$$w_n(z) \geq \int_z^{+\infty} p(t)dt \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...). \tag{7}$$

Per (6)-(7) la successione $\{w_n\}$ converge ad una funzione $[0, +\infty[\in z \to w(z)$:

$$0 < \int_z^{+\infty} p(t)dt \leq w(z) \leq w_0(z) = \frac{1}{2(z+\varepsilon)}. \tag{8}$$

Passando al limite in (5) per $n \to +\infty$, si trova (per il teorema di BEPPO LEVI sul passaggio al limite sotto $\int$):

$$w(z) = \int_z^{+\infty} w(t)^2 dt + \int_z^{+\infty} p(t)\,dt.$$

La funzione w è dunque assolutamente continua e verifica quasi ovunque l'equazione di RICCATI:

$$w' + w^2 + p(z) = 0. \tag{9}$$

Poniamo:

$$v(z) = \exp\left(\int_0^z w(t)\,dt\right).$$

La funzione v è di classe C^1 $[0, +\infty[$, con derivata prima:

$$v'(z) = w(z)\exp\left(\int_0^z w(t)\,dt\right)$$

assolutamente continua; per (9), verifica quasi ovunque l'equazione $v'' + p(z)v = 0$. Per (8):

$$v(z) \geq 1,$$

$$v'(z) \leq \frac{1}{2(z+\varepsilon)}\exp\left(\int_0^z \frac{dt}{2(t+\varepsilon)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon(z+\varepsilon)}} \to 0 \qquad (z \to +\infty).$$

LEMMA 2. - *Se*

$$\lambda_0 = 4 \sup_{0<y\leq l} \int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)} \int_0^y k(t)\,dt < +\infty,$$

$$\lambda > \lambda_0$$

esiste una soluzione positiva di classe C^1 $]0, l]$ *della equazione:*

$$\lambda y^2 k(y) u' + \int_0^y k(t)u(t)\,dt = 0 \quad (^5); \tag{10}$$

(5) Una giustificazione (puramente formale) della equazione (10) può essere la seguente. Se poniamo:

$$F(y) = \int_0^y f(t)\,dt,$$

DIMOSTRAZIONE. - Il cambiamento di variabile:

$$y \to z = \int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)}$$

applica $]0, l]$ su $[0, +\infty[$. Infatti:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{y^2 k(y)} < 0;$$

$$\left(\log\frac{l}{y}\right)^2 = \left(\int_y^l \frac{\sqrt{k(t)}}{t\sqrt{k(t)}}dt\right)^2 \leq \int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)} \int_y^l k(t)dt \leq z \int_0^l k(t)\,dt,$$

$$z \geq \left(\int_0^l k(t)dt\right)^{-1}\left(\log\frac{l}{y}\right)^2 \to +\infty \qquad (y \to 0+).$$

(1) si scrive:

$$\int_0^l \frac{F(y)^2}{y^2}\frac{dy}{k(y)} \leq \lambda_0 \int_0^l F'(y)^2 \frac{dy}{k(y)} \qquad (F(0)=0).$$

La ricerca del massimo del rapporto

$$\int_0^l \frac{F(y)^2}{y^2}\frac{dy}{k(y)}\left(\int_0^l F'(y)^2\frac{dy}{k(y)}\right)^{-1}$$

può essere ricondotta allo studio dell'integrale

$$\int_0^l \left(\lambda\frac{F'(y)^2}{k(y)} - \frac{F(y)^2}{y^2 k(y)}\right)dy,$$

come funzionale di F; l'equazione di EULERO di questo funzionale è, formalmente:

$$\lambda\frac{d}{dy}\left(\frac{F'}{k(y)}\right) + \frac{F}{y^2 k(y)} = 0.$$

Se poniamo $F' = uk$, è $F(y) = \int_0^y k(t)u(t)dt$, dunque:

$$\lambda\frac{du}{dy} + \frac{1}{y^2 k(y)}\int_0^y k(t)u(t)dt, = 0\,,$$

che è appunto (10).

Definiamo la funzione $p(z)$ ponendo:

$$\frac{1}{\lambda}\, y^2 k(y)^2 = p\left(\int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)}\right).$$

Prendiamo y_0, z_0 nella relazione $z_0 = \int_{y_0}^{l} \frac{dt}{t^2 k(t)}$. Si ha:

$$z_0 \int_{z_0}^{+\infty} p(z)dz = z_0 \int_0^{y_0} p\left(\int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)}\right) \frac{dy}{y^2 k(y)} = \frac{1}{\lambda} \int_{y_0}^{l} \frac{dt}{t^2 k(t)} \int_0^{y_0} k(t)dt,$$

dunque:

$$z_0 \int_{z_0}^{+\infty} p(z)dz \leq \frac{1}{4}\, \frac{\lambda_0}{\lambda} < \frac{1}{4}.$$

Per il Lemma 1, esiste una funzione v di classe C^1 $[0, +\infty[$, con derivata prima assolutamente continua, tale che:

$$v'' + p(z)v = 0 \qquad \text{quasi ovunque,}$$

$$v(z) > 0, \qquad \lim_{z \to +\infty} v'(z) = 0.$$

Si ha:

$$v'(z) - v'(z_1) = -\int_z^{z_1} v''(t)dt = \int_z^{z_1} p(t)v(t)dt,$$

quindi, per $z_1 \to +\infty$:

$$v'(z) = \int_z^{+\infty} p(t)v(t)dt. \tag{11}$$

Poniamo:

$$u(y) = v\left(\int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)}\right);$$

poichè:

$$-\, y^2 k(y) u' = \frac{dv}{dz},$$

$$\int_{z_0}^{+\infty} p(z)v(z)dz = \int_0^{y_0} p\left(\int_y^l \frac{dt}{t^2k(t)}\right) v\left(\int_y^l \frac{dt}{t^2k(t)}\right)\frac{dy}{y^2k(y)} =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^{y_0} k(y)u(y)dy,$$

si ha per (11):

$$-y_0^2k(y_0)u'(y_0) = \frac{1}{\lambda}\int_0^{y_0} k(y)u(y)dy.$$

3. Dimostrazione del Teorema 1. - Supponiamo

$$\lambda_0 < +\infty$$
$$\int_0^l f(y)^2 \frac{dy}{k(y)} < +\infty,$$

e dimostriamo che:

$$\int_0^l \left(\frac{1}{y}\int_0^y f(t)dt\right)^2 \frac{dy}{k(y)} \leq \lambda \int_0^l f(y)^2 \frac{dy}{k(y)} \qquad \text{per ogni } \lambda > \lambda_0 .$$

Fissato $\lambda > \lambda_0$, consideriamo la funzione u di cui al Lemma 2; per la diseguaglianza di Schwarz:

$$\frac{1}{k(y)}\left(\frac{1}{y}\int_0^y f(t)dt\right)^2 = \frac{1}{y^2k(y)}\left(\int_0^y \sqrt{k(t)u(t)}\,\frac{f(t)}{\sqrt{k(t)u(t)}}\,dt\right)^2 \leq$$
$$\leq \frac{\int_0^y k(t)u(t)dt}{y^2k(y)}\int_0^y \frac{f(t)^2dt}{k(t)u(t)} = -\lambda u'(y)\int_0^y \frac{f(t)^2dt}{k(t)u(t)} .$$

Allora, integrando per parti:

$$\int_0^l \left(\frac{1}{y}\int_0^y f(t)dt\right)^2 \frac{dy}{k(y)} \leq -\lambda\int_0^l u'(y)dy \int_0^y \frac{f(t)^2dt}{k(t)u(t)} =$$
$$= -\lambda u(y)\int_0^y \frac{f(t)^2dt}{k(t)u(t)}\Bigg|_0^l + \lambda\int_0^l \frac{f(y)^2}{k(y)}dy \leq$$
$$\leq \lambda \lim_{y\to 0} u(y)\int_0^y \frac{f(t)^2dt}{k(t)u(t)} + \lambda\int_0^l \frac{f(y)^2}{k(y)}dy.$$

Per concludere, basta osservare che:

$$\lim_{y \to 0} u(y) \int_0^y \frac{f(t)^2 dt}{k(t)u(t)} = 0\,;$$

infatti, per la decrescenza di u (l'equazione (10) implica $u' \leq 0$, dato che $u > 0$) risulta:

$$0 \leq \int_0^y \frac{f(t)^2 u(y)}{k(t)u(t)} dt \leq \int_0^y \frac{f(t)^2}{k(t)} dt \to 0 \qquad (y \to 0+).$$

4. Dimostrazione del Teorema 2. - Basta provare, a norma del Teorema 1, che se:

$$k_0(y) \equiv y \frac{d}{dy} \log k(y) \geq k_1 > -1,$$

risulta:

$$\lambda_0 \leq \frac{4}{(1+k_1)^2}. \tag{12}$$

Per il teorema di Cauchy sugli incrementi finiti:

$$\int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)} \int_0^y k(t)dt = \frac{\displaystyle\int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)}}{\dfrac{1}{\displaystyle\int_0^y k(t)\,dt}} \leq \tag{13}$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)}}{\dfrac{1}{\displaystyle\int_0^y k(t)dt} - \dfrac{1}{\displaystyle\int_0^l k(t)dt}} \leq \sup_{0<y\leq l} \frac{\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_y^l \frac{dt}{t^2 k(t)}}{\dfrac{d}{dy}\dfrac{1}{\displaystyle\int_0^y k(t)dt}}$$

$$\leq \left(\sup_{0<y\leq l} \frac{\displaystyle\int_0^y k(t)dt}{y k(y)} \right)^2.$$

Ma per essere $k(y) = k(l)\exp\left(-\int\limits_y^l \frac{k_0(t)}{t}\,dt\right)$, $k_0(y) \geq k_1$, risulta:

$$0 \leq yk(y) \leq lk(l)\left(\frac{y}{l}\right)^{1+k_1} \to 0 \qquad (y \to 0+).$$

Allora, con un'altra applicazione del teorema di CAUCHY:

$$\text{(14)} \qquad \frac{\int\limits_0^y k(t)dt}{yk(y)} \leq \sup_{0<y\leq l} \frac{\frac{d}{dy}\int\limits_0^y k(t)dt}{\frac{d}{dy}\,yk(y)} = \sup_{0<y\leq l} \frac{1}{1+k_0(y)} \leq \frac{1}{1+k_1}.$$

Per (13)-(14) si ha (12).

5. Se:

$$\inf_{0<y\leq l} y\frac{d}{dy}\log k(y) \leq -1,$$

la diseguaglianza:

$$\int\limits_0^l \left(\frac{1}{y}\int\limits_0^y f(t)dt\right)^2 \frac{dy}{k(y)} \leq c\int\limits_0^l f(y)^2\frac{dy}{k(y)} \qquad (c = \text{costante indipendente da } f)$$

non sussiste necessariamente (cfr. nota (2)).

Per provarlo, prendiamo $k(y) = \frac{1}{y}$, così che: $y\frac{d}{dy}\log k(y) = -1$; poniamo:

$$f(y) = \frac{1}{y}\left(\log\frac{2l}{y}\right)^{-\frac{3}{2}} \qquad (0 < y \leq l).$$

Si ha:

$$\int\limits_0^l f(y)^2\frac{dy}{k(y)} = \int\limits_0^l \frac{1}{y}\left(\log\frac{2l}{y}\right)^{-3} dy = \frac{1}{2}(\log 2)^{-2},$$

$$\int\limits_0^y f(t)dt = 2\left(\log\frac{2l}{y}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\int\limits_0^l \left(\frac{1}{y}\int\limits_0^y f(t)dt\right)^2\frac{dy}{k(y)} = 4\int\limits_0^l \frac{1}{y}\left(\log\frac{2l}{y}\right)^{-1} dy = +\infty.$$

Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
li 1 febbraio 1966