Bollettino
Unione Matematica Italiana

G. Mochi

Su un problema di controllo ottimo connesso ad una equazione alle derivate parziali di tipo iperbolico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.1, p. 35–47.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_1_35_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Su un problema di controllo ottimo connesso ad una equazione alle derivate parziali di tipo iperbolico

G. Mochi (Firenze) (*)

Sunto. - *Si studia il problema del controllo di un sistema retto da una equazione a derivate parziali di tipo iperbolico nell'insieme delle funzioni di quadrato integrabile. Si stabilisce la controllabilità completa e l'esistenza di controlli ottimi rispetto a determinati funzionali. Questi risultati sono poi estesi al caso dei sistemi.*

Summary. - *The control problem in the space of square-integrable functions is considered when the process is described by an hyperbolic partial differential equation. The complete controllability and the existence of a control optimum with respect to certain functionals are established. These results are extended to systems.*

1. Introduzione.

È data l'equazione iperbolica:

$$z_{xy} + A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y) = U(x, y) \tag{1.1}$$

dove $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ e le derivate parziali $A_x(x, y)$, $B_y(x, y)$ sono funzioni continue nel rettangolo $R = [0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b]$, mentre $U(x, y)$ è una funzione di quadrato L-integrabile in R.

Se $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sono due funzioni assolutamente continue per $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ rispettivamente e tali che $\varphi(0) = \psi(0)$ si prova (cfr. n. 2) che, assegnate A, B, C, esiste per ogni $U \in L^2(R)$ una ed una sola funzione $z(x, y)$ della forma:

$$z(x, y) = \int_0^x\int_0^y f(u, v)dudv + \int_0^x g(u)du + \int_0^y h(v)dv + \text{cost} \tag{1.2}$$

la quale soddisfa la (1.1) q.o. in R e verifica le condizioni «iniziali»:

$$z(x, 0) = \varphi(x), \qquad z(0, y) = \psi(y). \tag{1.3}$$

(*) Borsista presso il gruppo di ricerca n. 11 del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C. N. R.

Indicando con $z(x, y; U)$ tale funzione ci si domanda:

1) se al variare di U in $L^2(R)$ $z(a, b; U)$ descrive l'intero insieme dei numeri reali

2) facendo variare U in una sfera S di $L^2(R)$ quale condizione deve soddisfare il numero reale ξ perchè esista almeno una $U \in S$ tale che $z(a, b; U) = \xi$

3) se assegnato il numero reale ξ esiste una $U \in L^2(R)$ avente minima norma, tale che $z(a, b; U) = \xi$

4) se esiste una $U \in S$ in modo che sia minimo (o massimo) $z(a, b; U)$

5) se per ogni numero reale ξ esiste una $U \in L^2(R)$ tale che $z(\alpha, \beta; U) = \xi$, con $(\alpha, \beta) \in R$ avente minima distanza dall'origine.

Le questioni considerate rientrano nel quadro della teoria dei controlli ([10], [8]) per sistemi con parametri distribuiti, vale a dire retti da equazioni differenziali alle derivate parziali. Interpretando $U(x, y)$ come una funzione controllo le questioni poste si possono formulare come segue:

1') stabilire se il sistema retto dalla (1.1) è completamente controllabile in $L^2(R)$

2') stabilire una condizione necessaria e sufficiente affinchè lo stesso sistema risulti controllabile quando si assegna una limitazione alla norma di U in $L^2(R)$

3') stabilire l'esistenza di controlli ottimi rispetto alla norma in $L^2(R)$

4') stabilire l'esistenza di un controllo di norma assegnata che rende minimo (o massimo) lo stato finale $z(a, b; U)$

5') stabilire l'esistenza di controlli ottimi rispetto al funzionale $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. (L'analogo problema per i sistemi con parametri concentrati (retti cioè da equazioni differenziali ordinarie) è quello della determinazione di controlli t-ottimi, cioè minimizzanti rispetto al tempo).

Tali questioni sono state trattate rispettivamente nei numeri 3, 4, 5, 6. Nel numero 7 lo studio è stato esteso al caso dei sistemi, vale a dire al caso in cui z, U, φ, ψ anzichè funzioni scalari sono funzioni vettoriali. In tal caso il problema di ottimizzazione rispetto allo stato finale si può porre come problema di ottimizzazione del prodotto scalare dello stato finale stesso per un assegnato vettore costante.

Conclude il lavoro un esempio di determinazione effettiva del controllo ottimo.

2. Facciamo vedere anzitutto che per ogni $U \in L^2(R)$ il problema (1.1), (1.3) ammette una ed una sola soluzione della forma (1.2). L'equazione:

$$W_{uv} - (AW)_u - (BW)_v + CW = 0 \tag{2.1}$$

aggiunta della (1.1) con $(u, v) \in R = [0, a] \times [0, b]$ ha ([3], p. 265-267) una ed una soluzione $W(u, v)$ soddisfacente le condizioni:

$$W(u, y) = e^{\int_x^u B(t, y)dt} \qquad W(x, v) = e^{\int_y^v A(x, t)dt} \tag{2.2}$$

che indichiamo con $W(u, v; x, y)$.

Si verifica facilmente che la $z(x, y; U)$ definita nel modo seguente:

$$z(x, y; U) = W(0, 0; x, y)z_0 + \int_0^x W(u, 0; x, y)[\varphi'(u) + B(u, 0)\varphi(u)]du + \tag{2.3}$$

$$+ \int_0^y W(0, v; x, y)[\psi'(v) + A(0, v)\psi(v)]dv + \int_0^x\int_0^y W(u, v; x, y)U(u, v)dudv$$

con $z_0 = \varphi(0) = \psi(0)$, è soluzione di (1.1), (1.3).

D'altronde questa è unica perchè se ne esistesse un'altra Z, la differenza $z - Z$ dovrebbe essere soluzione del problema omogeneo corrispondente a (1.1), (1.3) (ossia (1.1), (1.3) con $\varphi = 0$, $\psi = 0$) che ammette solo la soluzione nulla.

3. Proviamo ora che al variare di U in $L^2(R)$

$$z(a, b; U) = W(0, 0; a, b) + \int_0^a W(u, 0; a, b)[\varphi'(u) + B(u, 0)\varphi(u)]du +$$

$$+ \int_0^b W(0, v; a, b)[\psi'(v) + A(0, v)\psi(v)]dv + \int_0^x\int_0^y W(u, v; a, b)U(u, v)dudv$$

prende qualunque valore reale.

Introduciamo le seguenti notazioni:

sia $\mathfrak{U}$ lo spazio delle funzioni $U(x, y) \in L^2(R)$

sia $\mathfrak{Z}$ lo spazio delle funzioni $z(x, y)$ totalmente continue secondo CARATHÉODORY [1] in R, con $z_{xy} \in L^2(R)$

sia $\mathbb{R}$ lo spazio dei numeri reali.

$\mathfrak{U}$ è uno spazio lineare normato, con norma:

$$\| U \|_{\mathfrak{U}} = \left\{ \iint_R U^2(x, y) dx dy \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Definiamo la trasformazione $\Lambda : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ mediante:

$$\Lambda U = \iint_R W(u, v; a, b) U(u, v) du dv \tag{3.1}$$

Λ è un funzionale lineare, facciamo vedere che è limitato, cioè che:

$$| \Lambda U | \leq \lambda \| U \|_{\mathfrak{U}} \qquad \text{per ogni } U \in \mathfrak{U}. \tag{3.2}$$

Infatti per la disuguaglianza di SCHWARZ si ha:

$$\left| \iint_R W(u, v; a, b) U(u, v) du dv \right| \leq$$
$$\leq \left\{ \iint_R W^2(u, v; a, b) du dv \iint_R U^2(u, v) du dv \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(1) Le funzioni totalmente continue secondo CARATHÉODORY ([4], p. 655) sono tutte e sole quelle che si possono mettere nella forma:

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(u, v) du dv + \int_0^x g(u) du + \int_0^y h(v) dv + \text{cost}$$

con f, g, h L-integrabili in R.

Tali funzioni sono continue rispetto a x, y e assolutamente continue rispetto alla sola x o alla sola y. Inoltre si dimostra che si ha quasi ovunque:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^y f(x, v) dv + g(x), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^x f(u, y) + h(y)$$

è $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ sono derivabili q.o. rispetto a y e x rispettivamente e si ha

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x, y) \qquad \text{q.o. in } R.$$

la fuzione $W(u, v; a, b)$ è continua in tutto R, quindi limitata, perciò indicando con:

$$M = \max \{ W(u, v; a, b) : (u, v) \in R \}$$

si ha:

$$\left| \iint_R W(u, v; a, b) U(u, v) du dv \right| \leq M (a b)^{\frac{1}{2}} \left\{ \iint_R U^2(u, v) du dv \right\}^{\frac{1}{2}}$$

cioè la (3.2) con $\lambda = M(ab)^{\frac{1}{2}}$.

$z(a, b; U)$ prende ogni valore reale ξ, cioè si ha la controllabilità completa, se esiste una $U \in L^2(R)$ tale che:

$$\Lambda U = p \tag{3.3}$$

dove:

$$p = \xi - \left\{ W(0, 0; a, b) z_0 + \int_0^a W(u, 0; a, b)[\varphi'(u) + B(u, 0)\varphi(u)] du + \right. \tag{3.4}$$

$$\left. + \int_0^b W(0, v; a, b)[\psi'(v) + A(0, v)\psi(v)] dv \right\}.$$

Poichè la trasformazione $\xi \to p$ definita dalla (3.4) è $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la controllabilità completa è equivalente a:

$$\Lambda \mathcal{U} = \mathbb{R} \tag{3.5}$$

e questa uguaglianza è soddisfatta se l'operatore oggiunto Λ^* di Λ ha un inverso sinistro continuo ([12], teor. 4.7.c, 234). La trasformazione Λ è $L^2 \to \mathbb{R}$, gli spazi coniugati di L^2 e $\mathbb{R}$ sono L^2 e $\mathbb{R}$ stessi quindi indicando con q un qualunque elemento di $\mathbb{R}$, l'operatore Λ^* è definito da:

$$< \Lambda U, q >_{\mathbb{R}} = < U, \Lambda^* q >_{L_2}$$

vale a dire:

$$\iint_R q W(u, v; a, b) U(u, v) du dv = \iint_R U(u, v) \Lambda^* q du dv$$

perciò $\Lambda^* q = q W(u, v; a, b)$, $\Lambda^* : \mathbb{R} \to L^2$, è l'operatore aggiunto di Λ. Infine si ha che Λ^* ha un inverso sinistro se e solo se ([12], teor. 3.B, 18):

$$\Lambda^* q = 0 \Longrightarrow q = 0 \tag{3.6}$$

e poichè $W(u, v; a, b)$ non è identicamente $= 0$ sù R, la (3.6) è soddisfatta, vale a dire la trasformazione ΛU è su tutto $\mathbb{R}$, e quindi *si ha controllabilità completa in* $\mathcal{U}$ *per l'equazione* (1.1).

4. Supponiamo ora che l'insieme in cui variano le U sia la sfera di raggio ρ di $L^2(R)$, cioè l'insieme:

$$\mathcal{U}_\rho = \{ U \in L^2(R) : \| U \|_{L^2} \leq \rho \}$$

e ricaviamo una condizione necessaria e sufficiente cui deve soddisfare il numero reale ξ perchè esista una $U \in \mathcal{U}_\rho$ tale che $z(a, b; U) = \xi$. Tale uguaglianza è soddisfatta dalle funzioni $U \in \mathcal{U}_\rho$ per le quali:

$$\Lambda U = p \tag{4.1}$$

con le stesse notazioni del n. precedente; allora, perchè la (4.1) sia soddisfatta occorrerà che:

$$p \in \Lambda \mathcal{U}_\rho$$

vale a dire, per la linearità di Λ, che:

$$p \in \rho \Lambda \mathcal{U}_1 \tag{4.2}$$

dove $\rho \Lambda \mathcal{U}_1$, è il multiplo secondo ρ dell'insieme $\Lambda \mathcal{U}_1$.

Consideriamo ora l'insieme $\Lambda \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}$ e facciamo vedere che esso è un segmento di $\mathbb{R}$ simmetrico. Dalla linearità e limitatezza di Λ e dalla convessità e simmetria di $\mathcal{U}_1$ segue che $\Lambda \mathcal{U}_1$, è un intervallo limitato di $\mathbb{R}$, simmetrico rispetto all'origine. Per provare che esso è anche chiuso, osserviamo che $\rho \mathcal{U}_1$ è debolmente compatto (]13], teor. 18,204) e poichè lo spazio L^2 è riflessivo ([7], II, 3, 18, 22) è anche debolmente* compatto ([13], teor. 19, 204; [7], II 3, 28). D'altra parte Λ è un operatore lineare continuo o, che è lo stesso, debolmente* continuo, pertanto per la debole continuità, l'immagine $\Lambda \mathcal{U}_1$ è un insieme compatto di $\mathbb{R}$. Pertanto, poichè $\Lambda \mathcal{U}_1$ è simmetrico, convesso, limitato e chiuso, condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia $p \in \rho \Lambda \mathcal{U}_1$ è che: ([1], [2])

$$| qp | \leq \rho H_{\Lambda \mathcal{U}_1}(q) \qquad \text{per ogni } q \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

dove $H_{\Lambda \mathcal{U}_1}(q)$ è la funzione supporto dell'insieme $\Lambda \mathcal{U}_1$, definita da:

$$H_{\Lambda \mathcal{U}_1}(q) = \sup \{ | qr | : r \in \Lambda \mathcal{U}_1 \}.$$

D'altra parte si ha:

$$\sup\{q\Lambda U : \Lambda U \in \Lambda\mathfrak{U}_1\} = \sup\{|q\Lambda U| : U \in \mathfrak{U}_1\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\iint_R qW(u, v; a, b)U(u, v)dudv\right| : U \in \mathfrak{U}_1\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\left[\iint_R (qW(u, v; a, b))^2 du\, dv \iint_R U^2(u, v)dudv\right]^{\frac{1}{2}} : U \in \mathfrak{U}_1\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left[\iint_R (qW(u, v; a, b))^2 dudv\right]^{\frac{1}{2}} = |q|\, \|W\|_{L^2}$$

quindi la condizione espressa dalla (4.3) equivale alla seguente:

$$|qp| \leq \rho\, |q|\, \|W\|_{L^2}$$

vale a dire:

$$|p| \leq \rho\, \|W\|_{L^2}.$$

Infine, ricordando la definizione di p:

$$\left|\xi - \left\{W(0, 0; a, b)z_0 + \int_0^a W(u, 0; a, b)[\varphi'(u) + B(u, 0)\varphi(u)]du + \right.\right. \tag{4.4}$$

$$\left.\left. + \int_0^b W(0, v; a, b)[\psi'(v) + A(0, v)\psi(v)]du\right\}\right| \leq$$

$$\leq \rho\left\{\iint_R W^2(u, v; a, b)dudv\right\}^{\frac{1}{2}}$$

che è la richiesta *condizione di controllabilità.*

5. Unicità del controllo.

Dimostriamo che per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si determina un $\rho > 0$ tale che nella sfera U_ρ di $L^2(R)$ esiste una ed una sola funzione U tale che $z(a, b; U) = \xi$, mentre in ogni sfera $\mathfrak{U}_{\rho'}$, con $\rho' < \rho$, non esiste nessuna U che verifica tale relazione. Dato $\xi \in \mathbb{R}$ per la (3.4) corrisponde ad esso un $p \in \mathbb{R}$ e prendiamo ρ tale che $p \in \partial\Lambda\mathfrak{U}_\rho$, frontiera di $\Lambda\mathfrak{U}_\rho$; chiaramente per ogni sfera $\mathfrak{U}_{\rho'}$, $\rho' < \rho$, sarà $p \notin \Lambda\mathfrak{U}_\rho$, cioè non esiste nessun controllo. Resta da dimostrare che *nella sfera $\mathfrak{U}_\rho$ il controllo è unico* ([6]).

Indicando con $\tilde{\Lambda}$ un inverso destro di Λ, cioè un operatore $\tilde{\Lambda}: \mathbb{R} \to \mathcal{U}_\rho$ tale che $\Lambda\tilde{\Lambda} = I_{\mathbb{R}}$, l'insieme dei controlli ammissibili $A_\rho = \{ U \in \mathcal{U}_\rho : \Lambda U = p \}$ non è vuoto per ipotesi, ed è dato da $\tilde{\Lambda} p \cap \mathcal{U}_\rho$, dove

$$\tilde{\Lambda} p = \{ U \in \mathcal{U} : \Lambda U = p \}.$$

D'altra parte poichè Λ è una trasformazione lineare continua di $\mathcal{U}$ su $\mathbb{R}$, essa trasforma insiemi aperti in insiemi aperti ([7], p. 55), cioè $\Lambda \operatorname{int} \mathcal{U}_\rho \subset \operatorname{int} \Lambda \mathcal{U}_\rho$, interno di $\Lambda \mathcal{U}_\rho$, quindi poichè $p \in \partial \Lambda \mathcal{U}_\rho$ sarà $A_\rho = \tilde{\Lambda}_p \cap \partial \mathcal{U}_\rho$; $\tilde{\Lambda}_p$ è una varietà lineare di L^2, la sfera $\mathcal{U}_\rho$ di L^2 è un insieme strettamente convesso, vale a dire $\partial \mathcal{U}_\rho$ non contiene segmenti, quindi l'intersezione $\tilde{\Lambda}_p \cap \partial \mathcal{U}_\rho$ è costituita da un solo elemento $U \in \partial \mathcal{U}_\rho$.

6. Controllo ottimo.

6.1. Consideriamo ora il problema di determinare un controllo U che renda massimo (o minimo) lo stato finale $z(a, b; U)$. Ricordando la definizione di p data dalla (3.4) $z(a, b; U)$ è massimo quando è massimo p, e poichè $p \in \rho \Lambda \mathcal{U}_1$, che è un segmento simmetrico di $\mathbb{R}$, quando p coincide con l'estremo superiore del segmento. Si ha:

$$\sup \rho \Lambda \mathcal{U}_1 = \sup \{ \rho \Lambda U : U \in \mathcal{U}_1 \} =$$

$$= \rho \sup \left\{ \iint_R W(u, v; a, b) U(u, v) du dv : \| U \| = 1 \right\} =$$

$$= \rho \sup \{ < W, U >_{L_2} : \| U \| = 1 \} = \rho \| W \|_{L^2}.$$

Si riconosce immediatamente che il *massimo è realizzato da* $U(x, y) = \rho \dfrac{W(x, y; a, b)}{\| W \|_{L^2}}$ *e il minimo da* $U(x, y) = - \dfrac{W(x, y; a, b)}{\| W \|_{L^2}}$.

6.2. Supposto che il sistema sia controllabile, cioè che fissato $\xi \in \mathbb{R}$ esista almeno un punto $(x, y) \in R$ per il quale è soddisfatta la condizione (4.4) e quindi esista $U \in \mathcal{U}_\rho$ tale che:

$$\iint_0^x{}_0^y W(u, v; x, y) U(u, v) du dv = p(x, y) \tag{6.1}$$

con

$$p(x, y) = \xi - \left\{ W(0, 0; x, y)z_0 + \int_0^x W(u, 0; x, y)[\varphi'(u) + B(u, 0)\varphi(u)]du + \right.$$
$$\left. + \int_0^y W(0, v; x, y)[\psi'(v) + A(0, v)\psi(v)]dv, \right.$$

facciamo vedere che *esiste una funzione U ottima rispetto ad* (x, y), cioè una funzione U per cui è soddisfatta la (4.1) con (x, y) avente minima distanza dall'origine.

Per ipotesi l'insieme K dei punti (x, y) per i quali $p(x, y) \in \Lambda_{x,y}\mathfrak{U}_\rho$, dove $\Lambda_{x,y}U = \int_0^x \int_0^y WUdudv$, non è vuoto, vogliamo far vedere che è chiuso.

Sia $\{(x_n, y_n)\}$ una successione di punti di K convergente a (x, y); poichè i punti (x_n, y_n) appartengono a K si ha $p(x_n, y_n) \in \Lambda_{x_n, y_n}\mathfrak{U}_\rho$, e per la condizione di controllabilità

$$(6.2) \quad \left| \xi - \left\{ W(0, 0; x_n, y_n)z_0 + \int_0^{x_n} W(u, 0; x_n, y_n)[\varphi'(u) + B(u, 0)\varphi(u)]du + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^{y_n} W(0, v; x_n, y_n)[\psi'(v) + A(0, v)\psi(v)]dv \right\} \right| \leq \rho \left\{ \int_0^{x_n}\int_0^{y_n} W^2(u, v; x_n, y_n)dudv \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

D'altra parte, poichè $(x_n, y_n) \to (x, y)$, per la continuità dei due membri della (6.2) si ha:

$$\left| \xi - \left\{ W(0, 0; x, y)z_0 + \int_0^x W(u, 0; x, y)[\varphi'(u) + B(u, 0)\varphi(u)]du + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^y W(0, v; x, y)[\psi'(v) + A(0, v)\psi(v)]dv \right\} \right| \leq$$
$$\leq \rho \left\{ \int_0^x\int_0^y W^2(u, v; x, y)dudv \right\}^{\frac{1}{2}}$$

vale a dire $(x, y) \in K$, quindi K è chiuso.

Indichiamo con $r \geq 0$ la distanza dell'insieme K dall'origine cioè:

$$r = \inf \{ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} : (x, y) \in K \}$$

e con C il cerchio con centro nell'origine e raggio r:

$$C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$$

e dimostriamo che $C \cap K \neq \emptyset$. Se fosse $C \cap K = \emptyset$, poichè C e K sono insiemi chiusi, dovrebbe esistere un $\alpha > 0$ per cui $d(C, K) = \alpha$, mentre per la definizione di r per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto $(x, y) \in K$ tale che $x^2 + y^2 - r^2 < \varepsilon$, vale a dire $d(C, K) < \varepsilon$.

7. Caso di un sistema iperbolico.

Supponendo che z, z_x, z_y, z_{xy}, U siano n-vettori funzioni di (x, y), $\varphi(x)$, $\psi(y)$, n-vettori funzioni di x e y rispettivamente, ξ n-vettore di $\mathbb{R}^n$, e A, B, C matrici $n \times n$ funzioni di (x, y), quanto si è visto al n. 2 sussiste ancora, cioè il sistema (1.1), (1.3) ammette una ed una sola soluzione $z(x, y)$ definita dalla (2.3), dove in questo caso $W(u, v; x, y)$ rappresenta la matrice $n \times n$ le cui righe sono n soluzioni $W_{i1} \dots W_{in}$, $i = 1 \dots n$, del sistema aggiunto (2.1) di (1.1), soddisfacenti alle condizioni (2.2), ([3], [8], [9]).

Allora, come al n. 3 si prova che in $\mathcal{U}$, spazio degli n-vettori U con componenti $U_i \in L^2(R)$, la controllabilità è completà.

Inoltre, definita la norma su $\mathcal{U}$ come:

$$\| U \|_{\mathcal{U}} = \left\{ \iint_R \sum_i U_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

come al n. 4 si ricava la condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità in $\mathcal{U}_\rho$, e precisamente con le stesse notazioni:

$$| < q, p >_{\mathbb{R}^n} | \leq \rho \, \| \Lambda^* q \|_{\mathcal{U}^*} \qquad \text{per ogni } q \in (E^n)^*$$

dove $\Lambda^* q$ è l'n-vettore di componenti $\Lambda^* q_i = q_i \sum_k W_{ik}$.

Il problema del controllo ottimo rispetto allo stato finale si può porre per un sistema nel modo seguente: assegnato un n-vettore c si vuole determinare il controllo che rende minimo, o massimo, il prodotto scalare $S = < c, z(a, b; U) >$.

Condizioni necessarie sotto forma di principio di massimo per problemi di questo tipo sono state date recentemente da A. I. Egorov ([8]) nel caso non lineare (ed erano note per le equazioni differenziali ordinarie ([10], [11]).

Una volta provata, in modo analogo a quanto si è fatto per $n = 1$, la compattezza dell'insieme degli stati finali $z(a, b; U)$ corrispondenti a controlli in $\mathcal{U}_\rho$, cioè di $\Lambda \mathcal{U}_\rho$, *l'esistenza del mi-*

nimo e del massimo di S è immediata. D'altra parte poichè, come per $n=1$, la sfera $\mathcal{U}_\rho$ è un insieme strettamente convesso, allo stesso modo si dimostra che *il controllo ottimo è unico in* $\mathcal{U}_\rho$.

La condizione di EGOROV nel caso attuale, se ci si limita a considerare controlli $U(x, y)$ continui a tratti e con opportune ipotesi sulle linee di discontinuità, è la seguente

$$H(z, z_x, z_y, U, V) = \sup \{ H(z, z_x, z_y, U, V) : U \in \mathcal{U}_\rho \}$$

dove

$$H(z, z_x, z_y, U, V) = \sum_{i=1}^{n} V^i[-\sum_{k=1}^{n} (A_{ik} z_x^k + B_{ik} z_y^k + C_{ik} z^k) + U_i]$$

essendo

$$V_{xy}^i = \frac{\partial H(z, z_x, z_y, U, V)}{\partial z^i} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H(z, z_x, z_y, U, V)}{\partial z_x^i} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H(z, z_x, z_y, U, V)}{\partial z_y^i}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial z_y^i} \text{ per } y = b, \qquad \frac{\partial V_i}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial z_x^i} \text{ per } x = a$$
$$V^i(a, b) = c_i$$

essendo c_i le componenti di c.

Ogni volta che le condizioni di EGOROV forniscono una soluzione unica questa, poichè si è già accertata l'esistenza e l'unicità del controllo ottimo, ci permetterà di determinare esplicitamente il controllo, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO. - Si abbia il sistema

$$z_{xy}^1 + 2z_x^1 + z_y^1 + 2z^1 = U_1 \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1$$
$$z_{xy}^2 - (1 - 2y)z^1 = U_2$$

con le condizioni $z^1(0, y) = z^1(x, 0) = z^2(0, y) = z^2(x, 0) = 0$, e si vuole minimizzare la somma

$$S = z^1(1, 1) + z^2(1, 1).$$

Allora si ha:

$$H = V^1(U_1 - 2z_x^1 - z_y^1 - 2z^1) + V^2(U_2 + (1 - 2y)z^1)$$
$$V_{xy}^1 = -2V^1 + (1 - 2y)V^2 + 2V_x^1 + V_y^1$$
$$V_x^1(x, 1) = V^1(x, 1), \quad V_y^1(1, y) = 2V^1(1, y), \quad V^1(1, 1) = 1$$

$$V^2_{xy} = 0, \qquad V^2_x(x, 1) = V^2_y(1, y) = 0, \qquad V^2(1, 1) = 1.$$

Risolvendo questo sistema si ha

$$V^2 = 1, \qquad V^1 = (1 + e^{x-1})(2y - e^{2(y-1)}) - e^{2(y-1)}$$

e sarà soddisfatta la condizione di massimo per:

$$U_1 = \operatorname{sign} V^1, \qquad U_2 = \operatorname{sign} V^2.$$

Per stabilire come varia sign V^1 nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ si os-

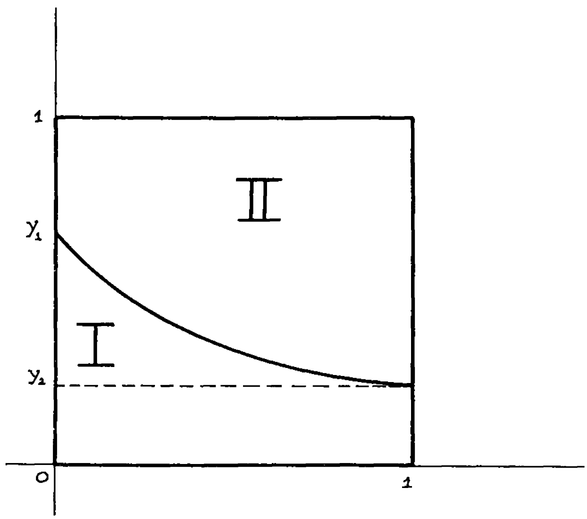

Fig. 1

servi che si ha $V^1 = 0$ per $x = 1 + \log 2 \dfrac{e^{2(y-1)} - y}{2y - e^{2(y-1)}}$; questa è l'equazione di una curva che incontra la retta $x = 0$ nel punto y_1 radice della equazione

$$e^{2(y-1)}(1 + 2e^{-1}) - y(1 + 4e^{-1}) = 0,$$

e la retta $x = 1$ nel punto y_2, radice dell'equazione

$$4y - 3e^{2(y-1)} = 0,$$

e divide il quadrato in due regioni I e II (v. fig.) tali che in I $V^1 < 0$, in II $V^1 > 0$. Allora, nella regione I si dovrà prendere

$U_1 = -1$, $U_2 = 1$, nella regione II $U_1 = 1$, $U_2 = 1$. Tale controllo trovato nell'insieme delle funzioni continue a tratti soddisfa la condizione necessasia di EGOROV; d'altra parte esso è anche in L^2, e poichè in L^2 si è visto che il controllo esiste ed è unico, esso sarà quello che rende minima la somma

$$S_0 = z^1(1, 1) + z^2(1, 1).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] H. A. ANTOSIEWICZ, *Linear control systems*, « Arch. Rat. Mech. Anal », 12, 4 (1963), 313-328.

[2] T. BONNESEN, W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, » Ergebnisse der Mathematik », III, 1 (1934), 23-28.

[3] A. BIELECKI, *Une remarque sur l'application de la méthode de Banach-Caccioppoli-Tikhonov dans la théorie de l'équation* $s = f(x, y, z, p, q)$, « Bull. Ac. Polonaise des Sciences », IV, 5 (1956), 265-268.

[4] C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig und Berlin (1927).

[5] M. CINQUINI-CIBRARIO, S. CINQUINI, *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*. « Monografie Matematiche C.N.R. 1964 ».

[6] R. CONTI, *Contributions to linear control theory*, « J. Diff. Equat. », I, 4 (1965), 427-445.

[7] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, I., Pure and Applied Math., Interscience Publ., 1958.

[8] A. I. EGOROV, *Sul controllo ottimo di processi in sistemi con parametri distribuiti* (in russo), « Avt. i Tel. », XXV, 5, (1964), 613-623.

[9] O. NICOLETTI, *Su un sistema di equazioni a derivate parziali del secondo ordine*, « Rend. R. Acc. Linee », IV, (1895), 197-202.

[10] L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTIANSKY, R. V. GAMKRELIDZE, E. F. MISHCHENKO, *The mathematical theory of optimal processes*, « Interscience Publ. » (1962).

[11] L. L. ROZONOER, *Il principio di massimo di Pontryagin nella teoria dei sistemi ottimali* (in russo), I, II, III, « Avt. i Tel. », XX, 10 (1959), 1320-1334, 1441-1458, 1561-1578; tradotto in inglese in Automatic Remote Control, 20 (1960), 1288-1302, 1405-1421, 1517-1532; cfr. « Math. Reviews », 22, 11193.

[12] A. E. TAYLOR, *Introduction to functional analysis*, J. Wiley & Sons Inc., New York, (1957).

[13] F. VALENTINE, *Convex sets*, McGraw-Hill, Series in Higher Mathematics, 1964.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 19 Febbraio 1966.