Bollettino Unione Matematica Italiana

Pier Vittorio Ceccherini

Simposio internazionale di geometria algebrica. A celebrazione del centenario della nascita di Guido Castelnuovo. (Roma, 30 settembre - 5 ottobre 1965)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.1, p. 65–85.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_1_65_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

SIMPOSIO INTERNAZIONALE DI GEOMETRIA ALGEBRICA

a celebrazione del centenario della nascita di Guido Castelnuovo

(Roma, 30 settembre - 5 ottobre 1965)

Relazione di PIER VITTORIO CECCHERINI (Roma)

Dal 30 settembre al 5 ottobre 1965 si è tenuto a Roma il "*Simposio internazionale di geometria algebrica*" (1), indetto dall'Istituto Matematico "G. Castelnuovo" dell'Università di Roma e svoltosi — col contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche e della International Mathematical Union — sotto gli auspici dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

I lavori del Simposio hanno avuto inizio alla Villa della Farnesina, una delle sedi di tale Accademia, con la solenne seduta inaugurale dedicata alla celebrazione della nascita del grande matematico italiano. Poi hanno proseguito — con altre otto sedute — presso il suddetto Istituto Matematico, nel quale G. CASTELNUOVO impartì per oltre un quarantennio il proprio insegnamento, e che — da un decennio — è a lui intitolato.

Erano Presidenti Onorari del Simposio i professori E. BOMPIANI, F.P. CANTELLI, O. CHISINI; gli ultimi due non poterono però prendere parte ai lavori, perché indisposti. Il Comitato Organizzatore era così composto: B. SEGRE (Presidente), B. DE FINETTI, E. MARTINELLI, L. LOMBARDO-RADICE (Segretario).

(1) In questi ultimi anni vi furono vari convegni dedicati alla geometria algebrica: il *Convegno di geometria algebrica, Taormina, 27 ottobre - 2 novembre 1958* (cfr. la relazione fattane da L. LOMBARDO-RADICE in *Boll. UMI*, 13, 1958, p. 574-582); il *Convegno internazionale di geometria algebrica, Torino, 24-27 maggio 1961* (cfr. il resoconto fattone in *Boll. UMI*, 16, 1961, p. 195-196, e la recensione dei relativi atti fatta da D. GALLARATI in *Boll. UMI*, 17, 1962, p. 400-402); il «*Summer Institute on Algebraic Geometry*», svoltosi dal 6 al 31 luglio 1964 presso il Whitney Estate nel Massachusetts; ed infine il *Colloquio internazionale di geometria algebrica, Madrid, 9-16 settembre 1965.*

Al Simposio hanno partecipato oltre centotrenta studiosi appartenenti a più di quindici paesi:
Austria: W. Gröbner - *Belgio*: P. Burniat, L. Godeaux, Hubaut, P. Libois, Vandezande - *Brasile*: A. Bassi - *Francia*: B. D'Orgeval, D. Dugué, L. Gauthier, A. Lichnerowicz - *Germania*: H. Hasse, M. Herrmann, F. Hirzebruch, H. Popp, H. Reich, P. Roquette - *Giappone*: Kambayashi (Università di Pisa) - *Gran Bretagna*: M. F. Atiyah, P. Du Val, J. E. Reeve, D. B. Scott, J. A. Todd, A. J. Wiseman - *Israele*: A. Evyatar (Gutwirth) - *Italia*: S. Abeasis, A. Andreatta, A. Andreotti, A. Barlotti, I. Barsotti, M. Bernardi, E. Bombieri, E. Bompiani, M. Bruni, R. Calapso, L. Campedelli, I. Candela, C. Carletti, E. Castelnuovo, C. Cattaneo e I. Cattaneo Gasparini, P. V. Ceccherini, G. Cerichelli, M. Ciccarone, M. Cicchese, M. Conte, G. Dall'Aglio, V. Dalla Volta, B. de Finetti, A. Del Chiaro, D. C. Demaria, C. Di Comite, M. Fiorentini, A. Franchetta, Furinghetti, C. Galafassi Serini, E. Gallo, S. Genevois, A. Giovagnoli, S. Greco, S. Guazzone, M. Lippi, L. Lombardo-Radice, A. Machì, G. Majone, S. Marchiafava, C. ed E. Marchionna, E. Martinelli, C. Massaza, R. Ottaviani, U. Pampallona, G. Panella, C. Pedrini, C. Procesi (Univ. di Chicago), G. Ricci, G. B. e L. Rizza, M. Rosati, F. S. Rossi, P. Salmon, T. Salvemini, A. Sanini, G. Scorza Dragoni, B. Segre, F. Speranza, F. Succi, G. Tallini e M. Tallini Scafati, G. Tanturri, G. Tazzi Cantalupi, B. Tedeschi, G. E. Togliatti, G. Vaccaro, M. Vaccaro e H. Vaccaro Frehner, G. Vecchio, E. Vesentini, G. Zappa - *Olanda*: J. H. De Boer - *Romania*: G. Galbura, O. Onicescu, G. Vranceanu - *Spagna*: P. Abellanas, G. Ancochea, R. Mallol - *Stati Uniti*: S. Abhyankar, M. Artin, D. Buchsbaum, I. N. Herstein, H. Kuhn, F. G. Kundert, M. Rosenlicht - *Svizzera*: G. Vincent, B. L. Van Der Waerden - *Ungheria*: F. Kárteszi, J. Molnár, J. Reimann.

Avevano anche comunicato l'intenzione di partecipare al Simposio i seguenti matematici, che invece — all'ultimo momento — sono stati impossibilitati ad intervenire per sopraggiunte difficoltà:
Germania: W. Burau, E. Kähler, O. H. Keller, E. Sperner - *Gran Bretagna*: L. Roth - *Italia*: F. Amato, F. P. Cantelli, V. Carfí, O. Chisini, A. Terracini - *Romania*: M. Haimovici, A. Lascu - *Stati Uniti*: H. Guggenheimer, H. Hironaka, O. Zariski - *Unione Sovietica*: Yu L. Manin, I. R. Šafarevič.

Hanno inoltre fatto pervenire la loro adesione numerosissime personalità del mondo accademico e culturale.

L'opera di G. Castelnuovo e della scuola italiana.

La solenne seduta inaugurale — come si è detto — si è tenuta la mattina di giovedì 30 settembre nel "Salone delle Prospettive" de La Farnesina. Erano presenti anche i cinque figli di Guido Castelnuovo, con i loro familiari.

Il Vice-Presidente dell'Accademia Nazionale dei Lincei, prof. BENIAMINO SEGRE, anche nella sua qualità di Presidente del Comitato Organizzatore del Simposio, ha dato il saluto ai convenuti e si è soffermato ad illustrare il significato scientifico della manifestazione. Egli ha poi rievocato la grande figura di Guido Castelnuovo come scienziato e come uomo.

Del Castelnuovo scienziato ha ricordato che — dopo aver subito, agli inizi della sua brillante carriera, l'influenza tonificante di Giuseppe Veronese e di Corrado Segre — egli seppe imprimere un nuovo mirabile corso alla scuola geometrica italiana, così da raggiungere e conservare a lungo una posizione di primissimo piano nelle discipline geometriche, anche in campo internazionale, apportando risultati che non possono ancora dirsi superati, nonostante il multiforme progresso poi conseguito, soprattutto con l'apporto di nuove potenti tecniche. Ma un aspetto altrettanto importante, sebbene un po' meno noto, riguarda i contributi portati dal Castelnuovo al calcolo delle probabilità. Questo penetrante mezzo d'indagine, che oggi ha fecondato tanti campi della scienza dalla fisica teorica alla statistica e alle scienze economiche, costituisce una gloria italiana, giacché — come disse Corrado Gini — di esso può essere considerato uno dei massimi precursori (sebbene non il vero fondatore) Gerolamo Cardano con alcuni suoi scritti *(Opus novum de proportionibus e De ludo aleae).*

Tutta l'opera scientifica del Castelnuovo appare improntata ad un rigore, che precorre i tempi, e ad una particolare freschezza ed eleganza, sia di forma, sia di contenuto. Ma la multiforme e decisiva influenza, da lui esercitata in Italia e all'estero durante la sua lunga vita, rappresenta altresì un riflesso della sua nobile personalità e della sua rara dirittura morale. Sempre calmo e pacato, schivo di onori quanto altri mai, egli — ormai ottantenne — dopo le penose traversie dell'ultima guerra mondiale seppe rivelare impensate doti di energia e stupefacenti facoltà organizzative (forse ereditate dall'insigne statista Luigi Luzzatti, di cui era nipote), assumendo la presidenza del Consiglio Nazionale delle Ricerche (1944) e dell'Accademia Nazionale dei Lincei (1946-1952), al cui rinnovamento ha dato — fino al giorno della sua dipartita — un contributo preziosissimo, che passerà alla storia.

Successivamente il prof. ENRICO BOMPIANI, Presidente Onorario dell'Unione Matematica Italiana e Direttore del Centro Internazionale Matematico Estivo "CIME", ha espresso — con contenuta commozione — il memore affetto per il maestro (di cui fu assistente prediletto) e l'ammirazione per lo scienziato e per l'uomo.

Nel suo messaggio il prof. Mauro Picone, professore emerito dell'Università di Roma, ha sottolineato l'importanza dell'opera scientifica di Guido Castelnuovo, ricordando come questi abbia sempre saputo conservare un atteggiamento d'interesse verso indirizzi della matematica anche diversi da quelli del suo campo specifico di studi, compresi gli aspetti applicativi (Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo "INAC"), e ricordando in particolare il grande merito di aver contribuito efficacemente al risorgere dell'Accademia Nazionale dei Lincei (che il fascismo aveva soppresso).

Quindi il prof. Lucien Godeaux, dell'Università di Liegi, ha pronunciato il suo discorso su *La geometria algebrica italiana,* col quale si è proposto di mettere in risalto i contributi apportati in particolare da Guido Castelnuovo, Federigo Enriques, Francesco Severi, e dai rispettivi allievi e continuatori. All'uopo, dopo aver fatto un quadro della geometria in Italia intorno al 1890, egli ha parlato della geometria sopra una curva algebrica, della teoria dei sistemi lineari di curve piane, della geometria sopra una superficie algebrica e della teoria dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie algebrica. Quindi, dopo un cenno allo studio comparato delle superficie irregolari e di quelle dotate di integrali di Picard, ha parlato dei sistemi continui di curve tracciate sopra una superficie algebrica, delle superficie iperellittiche, dell'esistenza di piani multipli ed ha concluso ricordando ancora la teoria dei gruppi di punti sopra una superficie, la geometria sopra una varietà a tre dimensioni e la rappresentazione di integrali abeliani e di funzioni abeliane, tutti argomenti ai quali Castelnuovo ha dato contributi d'importanza fondamentale.

Il prof. Octav Onicescu, dell'Università di Bucarest, ha poi parlato su *L'importanza del trattato di calcolo delle probabilità di Guido Castelnuovo nello sviluppo storico di tale disciplina.* Premessa un'analisi dei principi informatori dei trattati francesi da Jakob Bernoulli (1713) a Henri Poincaré (1896) e a Émile Borel (nei quali la 'probabilità' è definita come caratteristica di struttura), dei trattati nordici (ove la 'probabilità' costituisce il fondamento delle scienze induttive), del trattato dello Czuber (eclettico, ma a forte tendenza statistica e attuariale) e di quello del Markov del 1912 (caratteristico per la sua impronta di fenomenologia fisica), l'oratore procedette ad un succinto esame delle diverse tendenze della teoria nell'epoca che precede il libro del Castelnuovo (1919^{1}, 1926^{2}, 1947^{3}, 1957$^{3'}$), tra le quali spicca la determinazione delle relazioni tra probabilità, misura e integrale, mentre — d'altra parte — è da sottolineare l'importanza che assume in quell'epoca la teoria delle funzioni di variabile reale. Viene messo così in debita luce che il trattato del Castelnuovo non si limita a far confluire in un'unica teoria astratta le principali tendenze sopra ricordate (il che, d'altronde, costituisce — di per sé — un successo considerevole); difatti quest'opera del Castelnuovo precisa i fondamenti delle applicazioni della probabilità allo studio di differenti classi di fenomeni geometrici, meccanici, fisici, demografici, etc., e formula gli schemi principali della statistica della sua epoca su basi probabilistiche precise. Ne consegue che il trattato, nonostante il suo carattere propedeutico, viene ad acquistare un'importanza filosofica e scientifica, che giustifica pienamente il suo successo didattico e, soprattutto, l'enorme influenza che esso ha avuto in tutti i successivi sviluppi di tale disciplina.

A questo punto vari professori stranieri hanno chiesto la parola, per associarsi calorosamente alla celebrazione e per rievocare — sia pur brevemente, data la carenza del tempo — la personalità di Guido Castelnuovo in tutto il suo valore scientifico ed umano. Così Sir William Hodge, dell'Università di Cambridge, ha portato l'adesione dei matematici britannici, il prof. Wolfgang Gröbner, ha anche portato il saluto della Società Matematica Austriaca; ed i professori Gheorghe Galbura e Gheorghe Vranceanu, dell'Accademia Rumena, hanno anche espresso i sentimenti dei matematici rumeni. In particolare l'intervento del prof. Gh. Galbura ha destato vivo interesse nei matematici presenti, col mettere in luce i riflessi dell'opera del Castelnuovo nella moderna geometria algebrica.

La cerimonia d'inaugurazione del Simposio si è conclusa con un ricevimento presso la stessa Farnesina.

I lavori scientifici specializzati.

I lavori del Simposio sono proseguiti in otto sedute, che hanno avuto luogo — dal pomeriggio del 30 settembre al pomeriggio del 5 ottobre — presso l'Istituto Matematico "Guido Castelnuovo" dell'Università di Roma.

Nel darne una succinta informazione, sembra opportuno lasciar da parte il criterio cronologico e cercare di presentare i vari argomenti in maniera, per quanto possibile, sistematica, ravvicinando gli argomenti, in certo modo, affini.

Innanzi tutto è da notare che al Simposio erano rappresentati tanto l'«indirizzo classico» della geometria algebrica sul campo complesso, quanto l'«indirizzo moderno» che affronta i problemi della geometria algebrica sopra un campo qualunque, utilizzando largamente i risultati della moderna algebra astratta e della topologia algebrica. Come è noto, il primo indirizzo è sorto sotto l'impulso degli studi della "scuola italiana", che ebbe appunto uno dei massimi rappresentanti nel Castelnuovo, assieme all'Enriques e al Severi. Il secondo indirizzo, invece, è stato maggiormente sviluppato all'estero (Stati Uniti, Gran Bretagna, Germania, Francia, Giappone) e costituisce ovviamente la naturale estensione del primo, resa possibile dai successivi sviluppi delle conoscenze matematiche.

Dopo la seduta inaugurale presieduta da B. SEGRE, le sedute del Simposio si sono svolte sotto la presidenza (nell'ordine) di G. E. TOGLIATTI, Gh. VRANCEANU, I. N. HERSTEIN, W. GRÖBNER, P. LIBOIS, P. ROQUETTE, D. B'ORGEVAL, F. KÁRTESZI.

LA GEOMETRIA DELLE STRUTTURE FINITE.

Un settore di ricerche finora abbastanza trascurato, ma a cui si volge in modo sempre crescente l'attenzione dei matematici, sia per la sua intrinseca importanza teorica, sia per la sua importanza applicativa, è quello delle *strutture finite*. In particolare è oggi largamente in via di sviluppo lo studio della *geometria algebrica sopra un campo di Galois*, dove si presenta innanzitutto la questione di stabilire in qual modo debbano essere modificati (o abbandonati) risultati classici della geometria sul campo complesso. Così, ad es., B. SEGRE (nella sua conferenza qui appresso brevemente riassunta) ha mostrato su esempi come nel caso della caratteristica positiva non siano più validi il teorema di Bertini, il teorema di Noether, il teorema secondo cui ogni corrispondenza biunivoca e algebrica è birazionale.

Gli argomenti toccati nella conferenza di B. SEGRE sono stati, pur nell'inquadratura unitaria datane dall'autore, molteplici. Alcuni di tali temi hanno costituito oggetto specifico di altre relazioni, come ad esempio quelle di D. DUGUE, J. A. TODD, E. BOMBIERI, ed H. HASSE, nonché quella di L. GAUTHIER, che viene pertanto riassunta in appresso, pur non essendo essa propriamente limitata al campo delle strutture finite.

Strutture finite e geometria algebrica.

La conferenza di B. SEGRE (Roma) su questo tema s'inquadra sostanzialmente nell'indirizzo moderno.

Infatti, il punto di partenza è del tutto generale ed astratto, consistendo semplicemente in una teoria geometrica delle relazioni $K = (P, R, I)$ tra elementi di un insieme finito $P = \{P_i\}_{i=1,2,\dots,\pi}$, ed elementi di un insieme finito $R = \{R_j\}_{j=1,2,\dots,\rho}$ (I denota un qualunque sottoinsieme di $P \times R$). Per una tale relazione K vengono introdotte una *matrice d'incidenza* $C = \|c_{ij}\|$, con $c_{ij} = 1$ o 0 a seconda che (P_i, R_j) appartenga o no ad I, e le *forme* lineari

$\varphi_j(x) = \Sigma_i c_{ij} x_i$, $\psi_i(x) = \Sigma_j c_{ij} x_j$ e le somme di loro potenze

$$\Phi_t(x) = \Sigma_j [\varphi_j(x)]^t = \sum_{(i)} m_{i_1 i_2 \dots i_t} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t} \ ,$$

$$\Psi_s(x) = \Sigma_i [\psi_i(x)]^s = \sum_{(j)} n_{j_1 j_2 \dots j_s} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_s} \ ,$$

dove

$$m_{i_1 i_2 \dots i_t} = \Sigma_j c_{i_1 j} c_{i_2 j} \dots c_{i_t j} \ , \quad n_{j_1 j_2 \dots j_s} = \Sigma_i c_{i j_1} c_{i j_2} \dots c_{i j_s} \ .$$

Un caso particolarmente significativo è quello in cui K possa essere identificato con un *complesso* di blocchi (= sottoinsiemi) $R_j = \Sigma_i c_{ij} P_i$ dell'insieme (o "piano") P di "punti" P_i. Per i caratteri duali m ed n si pone il concetto di g r a d o e si stabiliscono varie relazioni aritmetiche, fra cui:

$$\sum_{(i)} m_{i_1 i_2 \dots i_t} = \Sigma_j n_j^t, \ \sum_{(j)} n_{j_1 j_2 \dots j_s} = \Sigma_i m_i^s, \ \Sigma_j n_j = \Sigma_i m_i \ ;$$

quest'ultima è l'applicazione a questo caso particolare di un criterio per valutare il numero delle coppie di un prodotto cartesiano, criterio semplicissimo, ma rivelatosi di grande efficacia in tutte le questioni numerative finite.

Si definiscono varie *operazioni* per uno o più complessi: dualizzazione, complementarizzazione, imposizione di dati punti o di dati blocchi, somma diretta, somma canonica, unione, intersezione, prodotto.

Molto importanti sono i *complessi a due indici*, $(t, s) - (\pi, \rho, n, m)$, cioè i complessi per i quali tutte le $m_{i_1 i_2 \dots i_t}$ di grado $t (\geq 1)$ hanno un medesimo valore m e tutte le $n_{j_1 j_2 \dots j_s}$ di grado $s (\geq 1)$ hanno un medesimo valore n. Per un tale complesso le condizioni $t \leq n$ e $s \leq m$ sono equivalenti (e si noti che esistono complessi per cui $t > n$ e $s > m$). Se $t \leq n$, il complesso ottenuto imponendo r punti distinti $(0 \leq r < t)$ è ancora un complesso a due indici, coi caratteri $(t - r, s) - (\pi - r, \rho^{(r)}, n - r, m)$, dove $\rho^{(r)}$ è un intero positivo soddisfacente alla seguente equazione algebrica che lo definisce:

$$(\pi - r) \dots (\pi - t + 1) m \dots (m - s + 1) = \rho^{(r)} \dots (\rho^{(r)} - s + 1)(n - r) \dots (n - t + 1) .$$

Naturalmente, per dualità, si possono scambiare tra loro π e ρ, s e t, m e n.

I *t-disegni* sono $(t, 1)$ — complessi; per $m = 1$ essi coincidono coi *sistemi di Steiner* $S(t, n, \pi)$. Questi sono generalizzati dagli *pseudo-sistemi* di indice i: $\mathcal{S}(t; n_1, n_2, \ldots, n_i; \pi)$, dove $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_i$, costituiti dai sottoinsiemi di P tali che t punti qualsiansi purché distinti di P stiano in al più uno dei dati sottoinsiemi, il numero dei punti di ciascuno dei quali può assumere i valori differenti, e precisamente $n_1, n_2, \ldots, n_i$. Queste nozioni portano naturalmente a formulare una generalizzazione del classico *problema di Kirkman* nel modo seguente: Determinare sotto quali condizioni è possibile ottenere un complesso di dato tipo componendo tra loro un certo numero di complessi di tipo analogo. Come risulterà dal seguito, questo problema viene risolto in molti casi, dipendenti da un parametro, attraverso la considerazione delle "geometrie hermitiane" [2].

Un altro filone, che apre un ampio campo di studio, è offerto dalla considerazione dei complessi $K = (P, R, I)$ in cui il "piano" P sia dotato di una conveniente struttura. Già il caso che P abbia semplicemente la struttura di prodotto cartesiano $X \times Y$ di due insiemi equipotenti e finiti ($|X| = |Y| = n$) offre un interesse notevolissimo; si possono allora porre in modo ovvio le nozioni di generatori e di punti indipendenti, particolarizzando inoltre la nozione di blocco in quella di sottoinsieme di P di n punti indipendenti. Con ciò un blocco f di $P = X \times Y$ viene ad essere un'applicazione biunivoca $f: X \rightarrow Y$, talché si ottiene così la teoria delle corrispondenze biunivoche tra insiemi finiti; in particolare, per $Y = X$, si ottiene la teoria degli insiemi di sostituzioni su un insieme finito (comprensiva, com'è ben noto, della teoria dei gruppi finiti). Allora ogni blocco definisce una simmetria di P e viceversa, e si può porre la nozione di ortogonalità tra blocchi. Una *rete* è per definizione un insieme di blocchi di $P = X \times Y$ ed è sempre derivabile da un insieme di sostituzioni su n elementi, ed in casi speciali da un gruppo.

Insiemi t-transitivi danno luogo alle *t-reti*; quelle di indice 1 sono particolari $\mathcal{S}(t; 0, n; n^2)$, denotati con $K_{t,n}$ e per semplicità ci si limita ora ad esse. Si dimostra facilmente che imponendo $r < t$ punti indipendenti ad una t-rete si ottiene una $(t-r)$-rete.

Le 1-*reti* sono collegate ai *quadrati latini*; inoltre i blocchi di una 1-rete, presi insieme ai due sistemi di generatori, costituiscono un 3-*tessuto* (nel senso di Blaschke), per il quale si può

[2] Cfr. l'ampia memoria dedicata a G. Castelnuovo e C. Segre: B. SEGRE: *Forme e geometrie hermitiane, con particolare riguardo al caso finito*, Ann. di Mat., (4) 70 (1965), p. 1-201.

facilmente esprimere la corrispondente condizione di esagonalità. I 4-*tessuti* sono strettamente collegati con i quadrati *greco-latini* etc.

Una 2-*rete* individua un piano affine e si chiama *desarguesiana* quando quello è tale.

La più semplice 3-*rete* ha come blocchi le sezioni piane non degeneri di una quadrica rigata Q di un $S_{3,q}$ di Galois; essa è derivabile dal gruppo delle omografie di una retta di Galois $S_{1,q}$, ed il suo studio conduce tra l'altro alla esistenza di quadrati greco-latini di ordine 2^{h+1}. Si dice che una 3-rete è *immergibile*, se è isomorfa alla 3-rete anzidetta.

Esistono 3-reti non immergibili e derivabili da un gruppo, ed inoltre, come ha dimostrato un giovane allievo del SEGRE (3), esistono 3-reti non derivabili da un gruppo. Se n è pari, condizione necessaria e sufficiente affinché una $K_{3,n}$ sia immergibile è che la 2-rete ottenuta imponendo ad essa un punto sia desarguesiana; se n è dispari, è invece che un blocco arbitrario della rete sia ortogonale ad ogni blocco della rete che contenga due punti distinti simmetrici rispetto al primo.

Una $K_{t,n}$ con $t = n$, $n - 1$ o $t = n - 2$ è di tipo banale, essendo derivabile dal gruppo simmetrico (su n oggetti) o dal gruppo alterno rispettivamente Una semplice argomentazione, di carattere geometrico-combinatorio, mostra che per ogni $K_{t,n}$ con $4 \leq t \leq n - 3$ risulta $n \geq 2t + 1$; ulteriori considerazioni geometriche conducono ad una condizione più forte, implicante ad esempio la non-esistenza di alcuna $K_{4,9}$, $K_{4,10}$, $K_{6,13}$ (4).

Il difficile problema di *costruire* strutture finite di dato tipo può essere risolto in molti casi utilizzando le geometrie di Galois, specialmente con un adeguato intervento di k-archi e di k-calotte. Per esempio J. TITS ha fornito una classe di piani inversivi non immergibili molto interessanti, collegati con i gruppi semplici di

(3) C. PEDRINI: *Sulla teoria delle reti.* Tesi di laurea. - Roma, Università degli Studi, 1965.

(4) Un teorema di non esistenza è stato anche trovato da C. PEDRINI, il quale è riuscito ad associare ad ogni $K_{4,n}$ con $n \geq 7$ un sistema di Steiner $S(2,3,n-2)$: da qui segue che ogni t-rete con $4 \leq t \leq n-3$ verifica la condizione $n - t \equiv \pm 1 \pmod 6$. (Cfr. *loc. cit.* nella nota preced.). Più generalmente, è stato associato ad ogni $K_{t,n}$ con $t \leq n - 3$ un sistema di Steiner $S(t-2, t-1, n-1)$, deducendone un teorema di non esistenza, più forte del precedente. (Cfr. P. V. CECCHERINI: *Alcune osservazioni sulla teoria delle reti*; Rend. Accad. Naz. Lincei, (8) 40 (1966), p. 218-221).

Suzuki, introdotti per mezzo di ovaloidi in spazi di Galois tridimensionali.

Assai di recente è stata largamente sviluppata la *geometria hermitiana* in uno spazio di Galois $S_{r,q}$, con molteplici applicazioni alle strutture finite. Il campo base $GF(q)$ di $S_{r,q}$ possiede un automorfismo involutorio, $\tau: a \to \bar{a} = a^{\sqrt{q}}$, se, e solo se, q è un quadrato; allora si può considerare in $S_{r,q}$ una correlazione involutoria inerente a τ, e definire una *forma hermitiana* $H = H_{r,q}$ (di ordine $n = \sqrt{q} + 1$) come luogo dei punti autoreciproci. Il gruppo delle omografie di $S_{r,q}$ trasformanti in sé una tale forma H conduce — al modo di Klein — ad una geometria hermitiana, dotata di eleganti sviluppi, per i quali si rimanda alla già citata *Memoria*.

Particolarmente significativo è lo studio degli spazi lineari giacenti su H, e quello dei loro sistemi parziali che formino un *ricoprimento regolare di H*.

Un altro soggetto interessante di studio è quello delle coppie costituite da una forma H e da una quadrica Q di $S_{r,q}$ che siano *permutabili*, cioè che siano entrambe non singolari e tali che l'antipolarità e la polarità che esse rispettivamente definiscono in $S_{r,q}$ siano permutabili. Se r è pari, tutte queste coppie sono omograficamente identiche; invece se r è dispari, esse si distribuiscono in due tipi differenti, per ciascuno dei quali la quadrica Q deve contenere qualche spazio lineare di dimensione $(r-1)/2$. In ogni caso H e Q si toccano in parecchi punti, formanti configurazioni notevoli. Inversamente, se una H non singolare e una Q non singolare di $S_{r,q}$ sono tangenti nei vertici di un $(r+1)$-simplesso, nessuna faccia del quale tocchi H o Q, allora H e Q sono permutabili e quindi si toccano anche secondo altri punti.

Varie configurazioni interessanti possono essere ottenute riferendo una o più forme hermitiane $H_{r,q}$ ad opportuni insiemi di sottospazi di $S_{r,q}$. Un esempio semplicissimo è dato dai blocchi di $n = \sqrt{q} + 1$ punti segati su una curva hermitiana non singolare $H_{2,q}$ dalle sue rette secanti; si vede facilmente che tali blocchi costituiscono un *sistema di Steiner* $\mathcal{S}(2, \sqrt{q}+1, q\sqrt{q}+1)$. Inoltre il ricordato problema di Kirkman può sempre venire risolto per un tale sistema. Più precisamente, il suddetto sistema è formato da $q(q - \sqrt{q} + 1)$ blocchi; essi si possono distribuire in q insiemi disgiunti, ciascuno dei quali consiste di $q - \sqrt{q} + 1$ blocchi a due a due disgiunti, ed è quindi un sistema di Steiner $\mathcal{S}(1, \sqrt{q}+1; q\sqrt{q}+1)$ che riempie $H_{2,q}$.

Un gran numero di strutture finite (includenti ad es. quelle date dai gruppi di Mathieu) possono convenientemente venire immerse in uno spazio di Galois, con l'eventuale aggiunta di opportune *condizioni di immergibilità;* e ciò conduce a molte questioni geometriche e algebriche in gran parte ancora aperte.

Semirazionalità delle varietà sesquipolari.

Nella sua relazione L. Gauthier (Parigi) ha ripreso l'argomento delle geometrie hermitiane soffermandosi sul caso che le varietà hermitiane — qui denominate varietà sesquipolari — siano non degeneri e che il campo base sia perfetto.

L'autore, dopo aver stabilito alcune prime proprietà delle varietà sesquipolari, ne dimostra appunto la semirazionalità, mostrando anche che il teorema di Castelnuovo, che assicura la razionalità delle involuzioni piane, non può essere esteso al caso della caratteristica $p \neq 0$.

Geometria algebrica e statistica.

Questo argomento, sul quale esiste ormai un'abbondante letteratura, è stato trattato da D. Dugué (Parigi), che lo ha passato in rassegna nelle sue linee fondamentali.

È ben noto che lo studio dei "piani d'esperienza" costituisce oggi una parte importante della statistica ed è basato sulla decomposizione di forme quadratiche in somme di forme quadratiche di rango inferiore; tale decomposizione può essere fatta utilizzando vari modelli, come i quadrati latini ortogonali (la costruzione dei quali può venire effettuata mediante i campi di Galois), i blocchi incompleti equilibrati, i blocchi incompleti parzialmente equilibrati, le tabelle ortogonali. È agevole mostrare come la costruzione anche di questi ultimi modelli si consegua attraverso la considerazione di varietà lineari e quadratiche in geometrie proiettive o euclidee sui campi di Galois.

Una rappresentazione del gruppo di Mathieu M_{24} mediante un gruppo di collineazioni.

Prendendo spunto dalla proprietà nota che il gruppo di Mathieu M_{24} è il gruppo degli automorfismi di un sistema di Steiner $\mathcal{S}(5, 8, 24)$, J. A. Todd (Cambridge, G. B.) ha dimostrato che si può costruire in uno spazio di Galois $S_{11,2}$ un insieme di 24 punti tale che le ottuple del sistema di Steiner consistano di punti linearmente dipendenti e tale che il gruppo di Mathieu si rappresenti precisamente come un gruppo di collineazioni di $S_{11,2}$ lascianti fisso l'insieme dei 24 punti.

Ne conseguono alcuni aspetti della geometria della configurazione ottenuta, e talune proprietà di alcuni sottogruppi notevoli di M_{24}, che sarebbe interessante di approfondire ulteriormente per tale via.

Nuovi risultati sulle ipersuperficie cubiche di dimensione 3.

E. Bombieri (Milano) ha presentato alcuni risultati di natura aritmetica e geometrica sulle ipersuperficie cubiche non singolari, di dimensione 3, ottenuti in collaborazione dall'autore e da H.P.F. Swinnerton-Dyer e svolti in un lavoro di prossima pubblicazione.

Sia V un'ipersuperficie cubica non singolare, di dimensione 3, definita su un campo perfetto k di caratteristica $\neq 2,3$, e sia X la varietà che parametrizza le rette di V, immersa nell'appropriata grassmanniana. Sia u un punto di X, e sia L_u la retta corrispondente su V; le rette di V che incontrano L_u saranno parametrizzate da una curva C_u su X, e questa curva sarà in generale irriducibile e non singolare. Sia $J(C_u)$ la varietà jacobiana della curva C_u, e sia $A(X)$ la varietà di Albanese della varietà X. Sia ancora Γ_u la curva che parametrizza i piani passanti per L_u che tagliano la V in 3 rette, immersa anch'essa nell'appropriata grassmanniana, e sia $J(\Gamma_u)$ la varietà jacobiana di Γ_u. Sussiste, allora il seguente:

Teorema 1. – *La successione di varietà abeliane*

$$0 \to J(\Gamma_u) \xrightarrow{\alpha} J(C_u) \xrightarrow{\beta} A(X) \to 0$$

è esatta, a meno di isogenie. (Le applicazioni razionali α, β sono ottenute a partire dal ricoprimento $C_u \to \Gamma_u$, e dall'inclusione $C_u \to X$).

Questo risultato permette di "calcolare" esplicitamente il terzo gruppo di omologia della V, a coefficienti nei razionali m-adici, e di trarne applicazioni aritmetiche. Si ha, anche, il seguente:

Teorema 2. – *Sia $C(X, Y, Z, T, U)$ una forma cubica non singolare mod p; allora il numero N di soluzioni della congruenza $C(X, Y, Z, T, U) \equiv 0$ (mod p), contate proiettivamente, soddisfa alla* $|N-(p^4-1)/(p-1)| \leq 10p^{3/2}$ (ipotesi di Riemann-Weil), *quando* $p \geq 5$.

Funzioni modulari e curve ellittiche sopra campi finiti.

H. Hasse (Amburgo) ha cominciato col rammentare che la funzione modulare $j(w) = 2^6 3^3 \frac{g_2^3(w)}{\Delta(w)}$ è di ordine 1, cioè assume ogni dato numero complesso come proprio valore $j(w)$ per un conveniente argomento reticolare, complesso e bidimensionale w, il quale è univocamente determinato a meno di un fattore scalare complesso.

In aritmetica, i valori $j(\alpha)$ per argomenti reticolari α derivanti da campi quadratici immaginari Ω hanno un ruolo importante. Ognuno di tali valori è un intero algebrico, che genera un campo di classi d'anelli K sopra il campo quadratico Ω contenente l'argomento reticolare α.

Sia ora P un divisore primo in K, di grado f, divisore del primo razionale p. Allora esiste un isomorfismo τ del campo astratto F di p^f elementi sul campo delle classi dei residui di K modulo P. Così la classe residua $j(\alpha)$ mod P in K può essere considerata come l'immagine di un elemento a di F nell'isomorfismo: $a \xrightarrow{\tau} j(\alpha)$ mod P. Sorge la questione di vedere se anche la funzione modulare $j(w)$ assume ogni dato elemento a di un campo finito F come un valore $j(\alpha)$ mod P in questo senso, e se l'argomento α è univocamente determinato a meno di un fattore scalare di Ω.

Si può mostrare che la risposta a questa domanda è affermativa quando il grado f è dispari, tranne in alcuni casi speciali con $f = 1$, in cui possono esistere due soluzioni α essenzialmente distinte.

Tale asserto forma il lemma fondamentale nella dimostrazione originale (fatta dall'autore) dell'analoga dell'ipotesi di Riemann per la funzione zeta delle curve ellittiche sopra campi finiti. Tale dimostrazione, che procede uniformizzando la curva con funzioni ellittiche ordinarie, non è mai stata pubblicata in dettaglio, essendo stata presto superata da una seconda dimostrazione basata sulla teoria puramente algebrica dei campi di funzioni ellittiche sopra campi finiti. La prima dimostrazione sembra tuttavia di sufficiente interesse in sé per giustificarne una pubblicazione tardiva.

L'ALGEBRIZZAZIONE DELLA GEOMETRIA ALGEBRICA.

La moderna tendenza ad algebrizzare al massimo la geometria algebrica è apparsa chiaramente nelle relazioni di C. Procesi, M. Artin, G. Ancochea, P. Abellanas. In particolare, C. Procesi (borsista presso l'Università di Chicago) ha dato un contributo (cfr. appresso) alla costruzione della geometria algebrica non commutativa.

L'importanza di questo indirizzo venne sottolineata anche da B. SEGRE in precedenti occasioni.

Un teorema degli zeri di Hilbert nel caso non commutativo.

C. PROCESI ha esordito considerando un campo F, un insieme finito X con n elementi e l'algebra (non commutativa) $F[X]$ in X, e proponendosi di studiare sistemi di equazioni $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $,\dots, f_k = 0$ con gli f_i elementi di $F[X]$. Affinché la teoria sia una effettiva estensione della teoria commutativa, gli zeri degli f_i devono essere presi in anelli non commutativi. Sia Ω un dominio universale per F (nel senso della geometria algebrica) e Ω_k l'anello delle matrici $k \times k$ su Ω. I suddetti zeri verranno presi nello spazio affine Ω_k^n delle n-ple di elementi di Ω_k. Se I_k è l'insieme dei polinomi di $F[X]$ che svaniscono identicamente su Ω_k^n, allora $F[X]/I_k = F[X;k]$ è un dominio di Ore e il suo corpo dei quozienti ha dimensione k^2 sul centro. Questo dominio è da considerarsi l'oggetto fondamentale della geometria algebrica delle matrici $k \times k$. Per questo anello si dimostrano valide tutte le affermazioni dell'«Hilbert Nullstellensatz».

Si prende poi il punto di vista assiomatico degli anelli di Jacobson e delle algebre di Hilbert e si dimostra che: *Se A è un anello di Jacobson commutativo ed $R = A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ è un'algebra finitamente generata, non necessariamente commutativa, ma soddisfacente un'identità polinomiale, allora R è un anello di Jacobson. Se inoltre A è un'algebra di Hilbert, allora R è un'algebra di Hilbert.*

Estensioni algebriche degli anelli locali.

M. ARTIN (Cambridge, USA) ha determinato delle condizioni affinché un'estensione $\widehat{A}'$ del completamento $\widehat{A}$ di un anello locale A sia "algebrica", cioè derivi da un'estensione di A.

Punti prossimi in geometria algebrica.

G. ANCOCHEA (Madrid) ha considerato anzi tutto l'anello $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ dei polinomi in n indeterminate sopra un campo k e lo spazio affine E a n dimensioni sopra una fissata estensione K di k che sia algebricamente chiusa e che abbia rispetto a k grado di trascendenza $> n$.

Allora se P è un punto di E avente p come ideale corrispondente, un punto Q prossimo a P è per definizione ogni ideale q che sia p-primario; si dice poi che un k-insieme algebrico M di E passa per Q, se il suo ideale m è contenuto in q. Sussiste allora il seguente:

Teorema. – *Siano Q e Q_1 due punti prossimi a P tali che per i loro ideali corrispondenti si abbia $q \not\subset q_1$. Se d è la dimensione di P, per ogni intero $h (d < h < n)$ esiste in E una varietà irriducibile di dimensione h che passa per Q e non passa per Q_1.* (La proposizione analoga nel caso della geometria analitica non è mai vera in generale).

Fascio sullo spettro totale di un anello.

È ben noto come nell'insieme X di tutti gli ideali d'un anello commutativo si possa definire una topologia debole dovuta a Zariski; per mezzo di essa e del concetto d'anello parziale di frazioni, si ottiene il concetto di *fascio parziale.* P. Abellanas (Madrid) nella sua relazione ha appunto esaminato alcune proprietà dei fasci parziali.

TOPOLOGIA ALGEBRICA
SINGOLARITÀ - VARIETÀ COMPLESSE.

Altri autori hanno dato vari contributi nell'indirizzo della *topologia* e della *topologia algebrica,* che già affiora in qualche modo nelle conferenze di E. Bombieri e di P. Abellanas: W. Hodge, M. Rosenlicht, D. B. Scott, A. Bassi.

Inoltre, A. Lichnerowicz, F. Hirzebruch e P. Du Val si sono occupati dello studio delle *varietà complesse* e della questione classica (ma tuttora all'ordine del giorno) delle *singolarità.*

La topologia delle varietà algebriche negli spazi proiettivi complessi.

Nella sua relazione Sir William Hodge (Cambridge, GB) ha trattato la questione dell'immergibilità di un p-ciclo integrale in una varietà di dimensione $p - r$.

È ben noto che la condizione necessaria affinché un p-ciclo integrale su una varietà algebrica M di dimensione complessa m sia rappresentabile mediante un ciclo immerso in una sub-varietà di dimensione $p - r$ è che il suo $(2m - p)$-cociclo duale non abbia componenti dei tipi $(2m-p,0)$, $(2m-p-1,1),\ldots,(2m-p-r+1,r-1)$. Alla questione se tale condizione sia anche sufficiente per l'immergibilità di un p-ciclo integrale in una varietà di dimensione $p-r$ è stato risposto in modo completo nel caso $p=2(m-1)$ [Lefschetz, Kodaira], ma negli altri casi si conoscono soltanto pochi risultati parziali.

HODGE sostituisce la condizione anzidetta con condizioni concernenti altri gruppi coomologici associati alla varietà, ed esamina la relazione tra queste nuove condizioni e quelle classiche di Lefschetz.

L'operazione di un toro sopra una varietà proiettiva.

M. ROSENLICHT (Berkeley) ha dato anzitutto alcuni risultati generali sui punti fissi e sui gruppi di stabilità dell'operazione di un toro sopra una varietà proiettiva. Questi risultati, che vengono stabiliti in un modo semplice ed elegante, forniscono delle dimostrazioni molto trasparenti di alcune proposizioni che risultano fondamentali per lo studio della struttura di un gruppo algebrico lineare connesso.

Alcuni spazi fibrati algebrico-geometrici.

D. B. SCOTT (Brighton) ha mostrato come una trattazione algebrica-geometrica di alcuni spazi fibrati (specialmente quello definito dalle direzioni tangenti), i quali precedentemente erano stati trattati con metodi coomologici e con la teoria dei fasci vettoriali, getta qualche luce sui risultati topologici e suggerisce come questi possano a loro volta venire applicati a classici problemi di natura algebrica e geometrica.

Polinomi e dualità in un'algebra di Boole con topologia.

Nella sua relazione — al confine tra algebra, topologia e logica — A. BASSI (San Paolo) ha esteso anzitutto la teoria dei polinomi classici di Boole, rilevando poi che ogni dualità tra proposizioni di un sistema matematico si può far dipendere dall'inversione dell'ordine in un sistema parzialmente ordinato. Sono state quindi considerate delle trasformazioni che "in qualche modo, hanno, nelle algebre di Boole con topologia, un ruolo analogo a quello delle trasformazioni birazionali dell'algebra classica".

Varietà complesse e tensore di Bergmann.

Nella sua relazione A. Lichnerowicz (Parigi) ha osservato che, mediante la considerazione dello spazio F delle n-forme olomorfe di quadrato integrale su una varietà complessa W_n, si definisce una $2n$ — forma K invariante rispetto ad ogni trasformazione olomorfa (Kobayaski). Ci si limita alle varietà complesse "normali", cioè tali che K non si annulli in alcun punto.

Su tali varietà esiste un tensore t di Bergmann la cui 2-forma associata appartiene alla prima classe di Chern $C_1(W_n)$. Se X è una trasformazione infinitesimale olomorfa completa tale che IX sia anche completa, X annulla t e mantiene invariante ogni elemento di F.

Esiste un'applicazione canonica j di W_n nello spazio proiettivo complesso $P(F^*)$ costruito a partire dal duale di F. Si studiano varie proprietà di j. Il caso che W_n ammetta un gruppo discontinuo uniforme D di trasformazioni olomorfe dà origine a dei teoremi particolarmente interessanti; in particolare, se W_n/D è kähleriano (risp. algebrico), il massimo gruppo connesso di trasformazioni olomorfe di W_n/D è risolubile (risp. abeliano).

Singolarità delle superficie complesse.

F. Hirzebruch (Bonn) ha studiato le singolarità che sono sciolte da alberi di curve razionali di auto-intersezione minore di 2, ed ha esaminato le loro relazioni con i diagrammi di Coxeter dei gruppi semplici di Lie A_k, D_k, E_6, E_7, E_8. Ha, quindi, trattato delle scioglimento delle singolarità per famiglie di superficie aventi solo singolarità di questo tipo.

Curve razionali rappresentanti relazioni modulari.

P. Du Val (Londra) nella sua relazione ha osservato che i valori J, J' dell'invariante assoluto di due reticoli Ω, Ω' di numeri complessi, ciascuno simile ad un sottoreticolo dell'altro, sono legati da un'equazione algebrica, che risulta sempre equazione d'una curva razionale. Ha, quindi, cercato i punti singolari di queste curve, per valori bassi dell'indice del sottoreticolo.

SVILUPPO DELL'INDIRIZZO CLASSICO.

Le relazioni di P. Burniat, L. Reich, B. L. van der Waerden, S. Abhyankar, M. F. Atiyah, E. Marchionna, e Gh. Galbura hanno chiaramente confermato quanto già sottolineato da Galbura nel suo intervento pronunciato alla seduta inaugurale e cioè che nell'àmbito dei moderni studi geometrici risultano ancora attuali i motivi della geometria classica («italiana»), sia come punto di partenza per ulteriori approfondimenti e generalizzazioni, sia come punto obbligato di riferimento e di arrivo per ogni teoria che pretenda di dominare (e, se si vuole, di superare riassorbendoli) i risultati conseguiti dalla precedente attività creativa del pensiero matematico.

La classificazione delle superficie algebriche.

P. Burniat (Bruxelles) ha rilevato che la classificazione delle superficie algebriche proposta da F. Enriques non permette di farsi un'idea della vastità della popolazione delle superficie di 12-genere $P_{12} > 1$. L'autore ha mostrato che, per $p_g = p_a > 2$, $p^{(1)}$ assume almeno i valori

$$p^{(1)} = 2p_g - 3,\ 2p_g - 2, \dots, 8p_g + 7,$$

mentre, per $p_g = 0{,}1$, $p^{(1)}$ assume almeno i valori

$$p^{(1)} = 3{,}4, \dots, 8p_g + 7,$$

il valore $8p_g + 2$ non essendo assicurato per certi valori di p_g.

Per $P_{12} > 1$, $p^{(1)} = 1$ le superficie posseggono un fascio di genere $p \geq 0$ di curve ellittiche; per tali superficie si dimostra che sono effettivamente realizzati i seguenti valori del genere e del bigenere:

$$\begin{cases} p_g = p + p_a\ ,\ P_2 = 2p_g + p - 1 + m, \\ p_a \geq 0,\ p \geq 0,\ m \geq 0 \ \text{arbitrari purché}\ P_2 > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_a = -1,\ p_g = p,\ P_2 = 3p - 3 + 2m, \\ p \geq 0,\ m \geq 0 \ \text{arbitrari purché}\ P_2 > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_a = -1,\ p_g = p - 1,\ P_2 = 3p + 2m, \\ p \geq 1,\ m \geq 0 \ \text{arbitrari purché}\ P_2 > 1. \end{cases}$$

Queste ultime superficie, appunto, non trovano posto nella classificazione di Enriques.

Sistemi unirazionali sulle varietà algebriche.

L. Reich (Bonn) ha ripreso nella sua relazione lo studio (iniziato da Severi nell'opera «Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche», Roma 1942) dei sistemi unirazionali di cicli V_k sopra varietà irriducibili M_r dello spazio proiettivo S_n, studio che ha come risultato centrale il seguente "teorema fondamentale" dimostrato da Severi al n. 62): *Ogni sistema unirazionale (in particolare razionale) di varietà (pure) V_k sopra una varietà irriducibile M_r è un sistema di equivalenza.*

Nel lavoro di Reich un sistema unirazionale di cicli effettivi k-dimensionali V_k sulla varietà irriducibile M_r di dimensione r viene chiamato un s i s t e m a a l g e b r i c o, quando un suo elemento generico C_Λ ha un punto di Chow, sopra il corpo base k, le cui coordinate siano funzioni razionali in indeterminate Λ sopra k. L'elemento generico di un sistema unirazionale di cicli virtuali risulta generato da somme formali di cicli C_Λ contati semplicemente ed irriducibili sopra $k(\Lambda)$. Inoltre come definizione di sistemi di equivalenza viene utilizzata quella data da Van der Waerden nel suo lavoro *Sulla definizione dell'equivalenza razionale di cicli su una varietà.* (Proc. Internat. Congress. Math., Amsterdam, 1954, vol. III, p. 545-549).

Dalla dimostrazione di Severi del "teorema fondamentale" non risulta che, nel caso della codimensione 1, V_k o addirittura un multiplo C_Λ di V_k (qui si suppone che il campo base sia di caratteristica zero o che M_r sia assolutamente irriducibile) venga segata dall'ipersuperficie ivi indicata. Per dimostrare questo fatto, Reich si basa sul seguente teorema, di fondamentale importanza per il seguito:

Il campo k abbia caratteristica zero, ovvero la varietà M_r sia assolutamente irriducibile. Sia $H(\Lambda, X) = 0$ (in breve $H(\Lambda)$) l'ipersuperficie generica di un sistema unirazionale, (essendo inoltre $H(\Lambda, X) = 0$ del tutto razionale ed omogenea rispetto alle Λ. Sia C_Λ la componente variabile dei cicli sezione di $H(\Lambda)$ con M_r e sia ξ un punto generico di M_r sopra k, talché le Λ siano delle indeterminate sopra $k(\xi)$. Sia poi $H(\Lambda, \xi)$ il fattore di grado più alto di $H(\Lambda, X)$ sopra $k(\xi)$ che non abbia alcun divisore in $k[\Lambda]$. Allora si ha che, se $H(\Lambda, \xi)$ è irriducibile sopra $k(\xi)$, C_Λ è una varietà contata effettivamente una sola volta e irriducibile sopra $k(\Lambda)$.

Da ciò e da un argomento di Van der Waerden segue il "teorema fondamentale" per il caso della codimensione 1, ed inoltre, da una serie di lemmi relativi al teorema stesso, segue un teorema previsto da Severi: *Ogni sistema effettivamente unirazionale è ottenuto come sezione di un sistema effettivamente unirazionale di* S_n *(in caratteristica zero).*

Una conseguenza immediata del penultimo enunciato è il seguente teorema di Van der Waerden: *L'elemento generico* C_Λ *di un sistema lineare privo di componenti fisse è una varietà irriducibile sopra* $k(\Lambda)$ *e contata semplicemente (in caratteristica zero o con* M_r *assolutamente irriducibile).*

Nella terminologia della topologia di Zariski ciò si può esprimere dicendo che "in molti casi" l'elemento generico $H(\Lambda, X) = 0$ sega sopra M_r come componente variabile una varietà C_Λ irriducibile sopra $k(\Lambda)$ e contata semplicemente o no a seconda che questa C_Λ sia priva o no di componenti multiple.

Si ottiene inoltre anche una generalizzazione del teorema di Bertini nella forma di Van der Waerden per sistemi unirazionali e unidimensionali di cicli di codimensione 1. L'eventuale varietà luogo di punti singolari si lascia facilmente descrivere, almeno teoricamente, con l'ausilio di opportune eliminazioni.

La teoria degli invarianti dei sistemi lineari sulle varietà.

B. L. Van der Waerden (Zurigo) ha ricordato anzitutto come Castelnuovo avesse introdotto le nozioni di *molteplicità effettiva* e *virtuale* dei punti base allo scopo di ottenere una teoria degli invarianti birazionali dei sistemi lineari completi di curve su una varietà algebrica. Orbene, la teoria delle valutazioni consente di estendere quelle nozioni ai sistemi lineari di divisori su una varietà e di ottenere così una teoria semplice e del tutto generale.

Invarianza birazionale del genere aritmetico.

S. Abhyankar (Lafayette) ha ripreso in esame la classica congettura secondo cui due varietà algebriche proiettive non singolari di dimensione n sopra un campo algebricamente chiuso, che siano birazionalmente equivalenti, hanno il medesimo genere aritmetico. È noto che la congettura è vera se la caratteristica p del campo è $p = 0$, o se $p \neq 0$ e $n = 2$. Abhyankar ha dimostrato la verità di tale congettura anche per $p \neq 0$ e $n = 3$.

Il teorema di Lefschetz sui punti fissi ed il teorema di Riemann-Roch.

M. F. Atiyah (Oxford) ha dato una generalizzazione del teorema di Lefschetz sui punti fissi, che consiste in una relazione tra un "numero di Lefschetz" globale ed il numero e la natura dei punti fissi. Tale generalizzazione viene applicata a quelle corrispondenze di una varietà differenziabile compatta in sé che sono permutabili con un operatore lineare ellittico, e si applica in particolare alle funzioni olomorfe di una varietà complessa. Essa ha uno stretto legame col teorema di Riemann-Roch, e fa intervenire la nozione di "residuo" in un punto fisso di una trasformazione analitica, dovuta a B. Segre.

Dimensione virtuale di un sistema lineare di ipersuperficie sopra una varietà algebrica singolare.

Ermanno Marchionna (Milano) ha considerato, in un S_r proiettivo complesso, una V_d algebrica priva di V_{d-1} singolari ed un suo divisore D. Ha quindi introdotto la "dimensione virtuale" ed il "genere aritmetico virtuale" di D, stabilendo poi alcuni interessanti teoremi di regolarità.

Covarianti d'immersione nella geometria sopra una varietà algebrica.

Com'è noto, i covarianti d'immersione di una varietà U in un'altra varietà V sono stati introdotti da J. A. Todd e da B. Segre. Gh. Galbura (Bucarest) ha qui considerato i suddetti invarianti nel caso della geometria sopra un campo di caratteristica arbitraria. Definita l'equivalenza funzionale di una sottovarietà nell'intersezione di h ipersuperficie passanti per essa (ove h sia un intero maggiore della codimensione della data sottovarietà rispetto all'ambiente) ha poi stabilito la relazione tra i covarianti d'immersione di una sottovarietà U in una varietà V e le classi caratteristiche del fibrato normale della U nella V.

Prima di esporre l'argomento della propria relazione, Galbura ha anche riassunto brevemente il tema di quella che avrebbe dovuto svolgere A. Lascu (Bucarest), impossibilitato a venire personalmente. *(Un'estensione del criterio di contrattibilità di Castelnuovo-Enriques).*

ALTRE NOTIZIE.

Gli atti del Simposio verranno prossimamente pubblicati a cura del Comitato Organizzatore.

A Guido Castelnuovo sarà interamente dedicato il vol. 70 degli *Annali di Matematica*, di prossima pubblicazione.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 5 gennaio 1966.