Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Intorno alle rotazioni di un piano Minkowskiano.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.2, p. 124–126.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_2_124_0>

Intorno alle rotazioni di un piano Minkowskiano

LUIGI MURACCHINI (Ferrara)

Sunto - *Si caratterizza la metrica euclidea piana fra le metriche minkowskiane mediante l'esistenza di un opportuno insieme di rotazioni.*

1. – In un piano affine reale A^2 si possono assegnare certe metriche, definite ovunque nel piano, le cui *rette* sono le rette affini. Esse subordinano su ogni retta una topologia equivalente a quella naturale ed infine sono tali che il punto medio M di ogni segmento AB nel senso affine è punto medio anche nel senso della metrica. Tali metriche diconsi *minkowskiane* (1) e comprendono in particolare la metrica euclidea. In generale un piano minkowskiano non ammette altre isometrie *sopra* sè (2) oltre alle *traslazioni* del piano affine e le *simmetrie centrali* (affini) rispetto ad ogni punto del piano. Nell'opera di H. BUSEMANN citata sopra in, si dimostra che: *è proprietà caratteristica della metrica euclidea piana, fra le metriche minkowskiane, di ammettere isometrie tali che, fissati comunque tre punti* A, B, O, *con* $d(A, O) = d(B, O) > 0$ (essendo $d(\ )$ la distanza minkowskiana) *esiste sempre una isometria che tiene fisso* O *e muta* A *in* B. Segue subito che: se un piano minkowskiano ammette come isometrie le simmetrie ortogonali rispetto alle rette di un fascio proprio allora è un piano euclideo (3).

In questa Nota vogliamo dimostrare una proposizione che dà un'altra caratterizzazione delle metriche euclidee (4): *se un piano minkowskiano ammette isometrie che siano rotazioni intorno ad un centro* O *e costituiscano un insieme infinito, allora il piano è euclideo.*

2. – Si chiama *rotazione* di centro il punto O, in un piano minkowskiano M^2 una isometria del piano *sopra* sè stesso che

(1) Si veda: H. BUSEMANN, *The geometry of geodesics* (Academic Press, New York, 1955), pp. 94 e ss.

(2) Nell'opera citata, le isometrie *sopra* vengono chiamate movimenti (motions); tuttavia, preferiamo adoperare qui il termine isometria.

(3) Si veda: H. BUSEMANN-P. J. KELLY, *Projective geometry and projective metrics* (Academic Press, New York, 1953), pp. 133 e ss.

(4) Tale proposizione viene proposta nell'op. cit. in (3).

tenga unito il punto O e quello soltanto. È chiaro che ogni *circonferenza minkowskiana* di centro O e raggio $r > O$, $\mathcal{C}(O, r)$, è mutata in sè da ogni rotazione Ω di centro O; in particolare la circonferenza $\mathcal{C}(O, 1) = \mathcal{C}_0$ ed il *cerchio* $\bar{\mathcal{C}}(O, 1)$ unitario sono mutati in sè da Ω. Noi supponiamo che $\bar{\mathcal{C}}_0$ sia convesso in senso stretto: come si sa $\mathcal{C}_0$ è omeomorfa ad una ellisse.

La proposizione che intendiamo dimostrare segue dalle osservazioni che esponiamo qui di seguito.

1° - La simmetria Σ rispetto al centro O è una rotazione di centro O. Essa è l'unica rotazione involutoria di centro O.

Intanto ogni rotazione Ω, dal momento che non ha punti uniti tranne il suo centro O, necessariamente subordina su $\mathcal{C}_0$ una applicazione biunivoca ω, priva di punti uniti, conservante i due orientamenti di $\mathcal{C}_0$ (uno dei quali si sceglierà come positivo, mentre quello opposto si dirà negativo). Sia dunque Ω una rotazione di centro O involutoria che muta il punto A di $\mathcal{C}_0$ nel punto A' e sia A_1 il simmetrico di A rispetto ad O. La $\mathcal{C}_0$ è divisa in due archi congruenti sia dai punti A, A' sia dai punti A, A_1 e ciò è possibile soltaato se i punti A' ed A_1 coincidono, dato che un arco di $\mathcal{C}_0$ non può essere congruente con una sua parte. Osserviamo che, in base a ciò che procede, si potranno distinguere le rotazioni non involutorie in positive e negative (le negative essendo inverse delle positive).

2° - Il prodotto Φ di due rotazioni di centro O è una rotazione col medesimo centro. Infatti Φ, se avesse un punto unito U diverso da O, terrebbe uniti tutti i punti della retta OU e sarebbe una simmetria ortogonale. Ma ciò è impossibile, perchè in tale caso Φ dovrebbe scambiare fra loro le due orientazioni di $\mathcal{C}_0$ mentre invece essendo Φ il prodotto di due rotazioni, deve come ciascuna di queste conservare le orientazioni di $\mathcal{C}_0$.

3° - Si consideri una successione $\{\Omega_n\}$ di rotazioni intorno ad un medesimo centro O e si supponga che abbia un limite Ω (che dovrà essere una isometria), così definito: se A è un punto qualsiasi di M^2 ed A_n il trasformato di A mediante Ω_n, nell'ipotesi che esista il punto limite A' della successione A_n di punti, allora Ω trasforma A in A'. Orbene, la isometria Ω è una rotazione di centro O: ciò risulta dalla medesima considerazione che è stata fatta per l'osservazione 2° precedente.

3. - Ciò premesso, si supponga che un piano minkowskiano M^2 ammetta un insieme $\mathfrak{R}$ di rotazioni intorno ad un medesimo centro O. In base alle osservazioni che precedono, M^2 ammetterà anche l'insieme $\overline{\mathfrak{R}}$ delle rotazioni che sono prodotto di un numero finito di rotazioni di $\mathfrak{R}$ e loro inverse oppure che sono limiti di successioni di siffatte rotazioni. In altri termini $\overline{\mathfrak{R}}$ è la chiusura del gruppo di rotazioni di centro O, generato dalle rotazioni di $\mathfrak{R}$; si tratta di un gruppo topologico compatto, di dimensione 1 se è infinito. In questo caso la proposizione che vogliamo dimostrare segue tenendo presente che, da un lato, in base ad un noto risultato, $\overline{\mathfrak{R}}$ deve essere isomorfo col gruppo delle rotazioni aventi un medesimo centro in un piano euclideo; e che, d'altra parte, mediante le traslazioni del piano M^2 minkowskiano, il gruppo di rotazioni $\overline{\mathfrak{R}}$ di centro O si trasporta in un gruppo di rotazioni isomorfo intorno a qualsivoglia punto del piano. Basta allora applicare il risultato che abbiamo ricordato nel n. 1, contenuto nell'op. cit. in (1).

Se $\overline{\mathfrak{R}}$ è finito, esso è certamente d'ordine pari $2n > 2$, dato che contiene la simmetria Σ rispetto ad O, che è d'ordine 2. Esistono effettivamente piani minkowskiani che ammettono rotazioni di centro un punto O qualsiasi e costituenti un gruppo finito d'ordine pari $2n > 2$ qualsiasi. Se ne ottiene un esempio considerando i piani minkowskiani (che risultano perfettamente determinati (5)) nei quali la circonferenza $\mathcal{C}_0$ di centro $O(0, 0)$ ha l'equazione, in coordinate affini x, y,

$$z^{2n} + \bar{z}^{2n} - (4n - 2)(z\bar{z})^n = -4n,$$

dove $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $n > 1$.

(5) Cfr. l'op. cit. in (1), oppure quella citata in (3).

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U.M.I.
il 19 aprile 1966.