UMI

Recensioni.

* Kôsaku Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1965 (Antonio Pignedoli)
* Mario Villa, Lezioni di Geometria, Vol. II, Cedam, Padova, 1965 (Giuseppina Masotti Biggiogero)
* I. N. Horstein, Topics in Algebra, Blaisdell publishing Company, 1964 (Cesarina Marchionna Tibiletti)
* I. Hacking, Logic of Statistical Inference, Cambridge University Press, 1965 (Pietro Lingua)
* J. Mikusinski, R. Sikorski, Théorie élémentaires des distributions, Gauthier-Villars, Paris, 1964 (Dario Graffi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.2, p. 191–200.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_2_191_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

RECENSIONI

KÔSAKU YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1965, pagine 458, senza indicazione di prezzo.

L'opera, che appare nella consueta altamente dignitosa veste dell'editore Springer, fa parte della collezione celebre « Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften » e trae origine dalle lezioni tenute dall'Autore presso l'Università di Tokio nei dieci anni precedenti l'anno di nascita dell'opera stessa.

Essa è pensata come libro di testo per un corso di Analisi funzionale e riguarda, in sostanza, la teoria generale degli operatori lineari, insieme con alcuni salienti aspetti delle loro applicazioni.

Anche per questo mi è particolarmente gradito che mi sia concesso di recensirla.

Il volume, dotato alla fine di ampi riferimenti bibliografici, si articola in quattordici capitoli, preceduti da una parte introduttiva, che prende le mosse da richiami di teoria degli insiemi per giungere ai concetti basilari concernenti gli spazi lineari.

Il primo capitolo concerne le semi-norme e prende le mosse, appunto, dal concetto di semi-norma e di spazio topologico lineare localmente convesso per giungere, infine, al prodotto diretto di funzioni generalizzate.

Il secondo capitolo è dedicato ad applicazioni del teorema di Baire-Hausdorff (il secondo paragrafo concerne il teorema di Vitali Hahn-Sachs ed il settimo il teorema di Hörmander). Il terzo capitolo dell'opera concerne la proiezione ortogonale ed il « teorema di rappresentazione » di F. Riesz.

In uno spazio prehilbertiano si può introdurre, invero, la nozione di « ortogonalità » di due vettori, e uno spazio di Hilbert può essere identificato col suo duale, cioè lo spazio dei funzionali lineari limitati. Ciò conduce, appunto, al teorema di rappresentazione di F. Riesz, sul quale si può dire fondata tutta la teoria degli spazi hilbertiani. Tale teorema fondamentale è esposto nel sesto paragrafo del capitolo, nel quale si dimostra, appunto, che « se X è uno spazio di Hilbert ed f è un funzionale limitato in X, allora esiste ed è determinato in modo unico un vettore y_f di X tale che si ha $f(x) = (x, y_f)$ per ogni $x \in X$ e $\|f\| = \|y_f\|$. Inversamente ogni vettore $y \in X$ definisce un funzionale lineare limitato f_y su X mediante $f_y(x) = (x, y)$ per ogni $x \in X$ e $\|f_y\| = \|y\|$ ».

Giova anche segnalare che l'ottavo paragrafo del capitolo di cui stiamo parlando è dedicato alla dimostrazione di von Neumann del teorema di Lebesgue Nikodym.

Il quarto capitolo concerne i teoremi « di estensione » di Hahn Banach, negli spazi lineari reali, negli spazi lineari complessi, negli spazi lineari normati.

Il quinto capitolo riguarda la convergenza forte e la convergenza debole, la misurabilità in senso forte ed in senso debole, la analiticità in senso forte e in senso debole e si conclude con la teoria degli integrali di Bochner. Una appendice al capitolo riguarda la teoria generale delle « topologie deboli » e la dualità in spazi topologici lineari localmente convessi.

Il sesto capitolo è intitolato « Trasformata di Fourier ed equazioni differenziali ». Ha inizio con la teoria della trasformata di Fourier

$$\tilde{f}(\xi) = 2\pi^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{-i(\xi, x)} f(x) dx$$

per funzioni rapidamente decrescenti (all' ∞) cioè per la totalità $G(R^n)$ delle funzioni $f \in C^\infty(R^n)$ tali che sia

$$\sup_{x \in R^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty \left(x^\beta = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\beta_j} \right)$$

per ogni $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ con α_j e β_k interi non-negativi. Passa poi a trattare della trasformata di Fourier per « distribuzioni temperate », delle convoluzioni, dei teoremi di Paley-Wiener e della trasformata di Laplace unilatera. Segue poi il teorema di Titchmarsch.

Un paragrafo del capitolo è poi dedicato al calcolo operazionale di Mikusinski, un altro al lemma di Sobolev. Seguono le disuguaglianze di Gärding ed i teoremi di Friedrichs, di Malgrange-Ehrenpreis e di Hörmander (ipoel litticità).

Il settimo capitolo concerne gli operatori duali, quelli aggiunti, gli operatori simmetrici ed autoaggiunti, nonchè gli operatori unilateri e la trasformazione di Cayley.

L'ottavo ed il nono capitolo sono dedicati, rispettivamente, agli operatori duali ed al « risolvente » ed allo « spettro » di un operatore lineare T. (Se T è un operatore lineare il cui dominio $D(T)$ ed il cui codominio $R(T)$ appartengono entrambi allo stesso spazio topologico lineare complesso X, considerato l'operatore lineare $T_\lambda = \lambda I - T$, ove λ è un numero complesso ed I l'operatore identità, la distribuzione dei valori di λ pei quali T_λ ha un inverso e le proprietà dell'inverso, quando esso esiste, sono chiamate la « teoria spettrale » per l'operatore T. Il capitolo è dedicato, in sostanza, alla teoria generale dell'inverso di T_λ).

Il capitolo nono concerne la teoria analitica dei semi-gruppi di operatori lineari limitati in uno spazio di Banach, la quale si occupa, in sostanza, delle funzioni esponenziali in spazi funzionali con infinite dimensioni e concerne la determinazione del più generale operatore lineare limitato $T(t)$ con $t \geq 0$ che soddisfa alle equazioni:

$$T(t+s) = T(t) \cdot T(s), \; T(0) = I,$$

problema studiato indipendentemente, attorno al 1948, da *E. Hille e K. Yosida*. Essi avevano introdotto la nozione di *generatore infinitesimale* A di $T(t)$, definito dalla relazione:

$$A = s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (T(t) - I),$$

ed avevano discusso la generazione di $T(t)$ in termini di A nonchè ottenuto una caratterizzazione del generatore infinitesimale A in termini della proprietà spettrale di A. Il risultato fondamentale della teoria dei semi-gruppi può essere considerato come una naturale generalizzazione di un teorema di M. H. Stone concernente un gruppo ad un parametro di operatori lineari in uno spazio hilbertiano, teorema che viene trattato.

L'autore, poi, nel capitolo decimo, dedica la propria attenzione agli « ope ratori compatti ». Se X ed Y sono spazi di Banach complessi ed S è la sfera unitaria in X, un operatore $T \in L(X, Y)$ si chiama « compatto » o « completamente continuo » se l'immagine $T \cdot S$ è relativamente compatta in Y.

Per un operatore compatto $T \in L(X, X)$ il problema di autovalori può essere trattato completamente nel senso che la teoria classica di Fredholm delle equazioni integrali lineari può essere estesa all'equazione funzionale lineare

$$Tx - \lambda x = y$$

con parametro λ complesso (teoria di Riesz-Schauder). Alla teoria di Riesz-Schauder è, appunto, dedicato il quinto paragrafo del capitolo, mentre il sesto concerne il problema di Dirichlet.

Una appendice al capitolo riguarda lo « spazio nucleare » di A. Grothendieck.

Il capitolo decimoprimo concerne gli « anelli normati e la rappresentazione spettrale ». Esso prende le mosse dalla definizione di « algebra » o di « anello » su un campo scalare (F) (tale è uno spazio lineare A su (F) se per ogni coppia di elementi x, $y \in A$ è definito un prodotto unico con le proprietà di « associatività » $(xy)z = x(yz)$, di « distributività » $x(y+z) = xy + xz$ ed $\alpha\beta(xy) = (\alpha x)(\beta y)$).

Dopo la definizione di « algebra con una unità » e di « algebra commutativa », l'Autore viene alla definizione di « algebra di Banach », la quale è un'algebra che sia uno spazio di Banach e che soddisfi alla relazione

$$\| xy \| \leq \| x \| \, \| y \| .$$

Il primo paragrafo del capitolo è dedicato agli « ideali massimali » di un anello normato. Il secondo a quel particolare ideale che è il « radicale » di un anello normato. L'Autore dà poi il concetto di « semi semplicità » per cui un anello normato del campo dei numeri complessi è detto semi-semplice se il suo radicale si riduce all'ideale $\{0\}$. Vengono poi alcuni paragrafi concernenti la « risoluzione spettrale » e l'esposizione di alcuni teoremi (di Friedrichs, di Krylov-Weinstein, di Peter Weyl-Neumann). Vi si trova esposto poi il teorema di dualità di Tannaka per gruppi compatti non commutativi. Il paragrafo decimoterzo contiene i teoremi di Stone e di Bochner e l'ultimo il teorema « tauberiano » di Wiener.

Il capitolo decimosecondo riguarda altri teoremi di rappresentazione in spazi lineari, come il teorema di Krein Milman ed un teorema di convergenza di Banach.

Gli ultimi due capitoli dell'opera riguardano le applicazioni. Il decimoterzo concerne la teoria ergodica e la teoria della diffusione. La teoria ergodica vi è vista come quella che riguarda la media temporale

$$\lim_{t \uparrow \infty} t^{-1} \int_0^t T_s ds$$

di un semi-gruppo T_t e la teoria della diffusione come quella che riguarda l'investigazione di un processo stocastico in termini di un generatore associato col processo stocastico.

Il primo paragrafo del capitolo riguarda i processi di Markov e prende le mosse dall'equazione di Chapman-Kolmogorov,

$$P(t, x; s, E) = \int_S P(t, x; u, dy) \, P(u, y; s, E), \ (t < u < s),$$

dove P è la « probabilità di transizione » e l'integrazione va intesa su tutto lo spazio S del moto caotico.

Dopo aver definito il « processo di Markov con una misura invariante », l'Autore espone alcuni teoremi dei quali uno proprio. Il secondo paragrafo è dedicato al « teorema ergodico individuale » e alle sue applicazioni. Anche qui, insieme a teoremi di R. V. Chacon e D. S. Ornstein, appaiono teoremi di Yosida.

Il terzo paragrafo concerne l'ipotesi ergodica ed il classico « teorema H ». Il quarto riguarda la « decomposizione ergodica » di un processo di Markov con uno « spazio delle fasi localmente compatto ».

Il quinto paragrafo — particolarmente importante — riguarda il moto browniano su uno spazio riemanniano omogeneo. L'Autore prende le mosse dal richiamare la celebre equazione di A. Kolmogorov cui soddisfa:

$$u(x,\, t) = \int_S P(t,\, x,\, dy)\; f(y). \qquad (P = \text{probabilità di transizione}),$$

cioè l'equazione di tipo diffusivo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b^{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} = Au\,,\; t > 0,$$

dove l'operatore differenziale A è *ellittico* nelle coordinate locali $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ del punto x dello spazio delle fasi S e dove è

$$a^i(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a^i(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{(secondo la convenzione tensoriale).}$$

L'Autore dà poi la definizione di moto browniano come processo di Markov temporalmente e spazialmente omogeneo (in uno spazio S localmente compatto) per cui è soddisfatta la condizione di continuità del tipo di Lindeberg:

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{dis(x,\, y) > \varepsilon} P(t, x,\, dy) = 0, \quad \text{per ogni} \quad \varepsilon > 0.\; x \in S$$

Seguono varie interessanti proposizioni. Il capitolo si conclude con un teorema di Yosida concernente i processi di Markov ed i potenziali.

Il capitolo decimoquarto (ultimo del volume) è dedicato alla « equazione di evoluzione temporalmente omogenea »:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au\,,\; t > 0,$$

dove A è un operatore lineare, non necessariamente continuo, in uno spazio lineare, con riguardo anche alla « equazione di evoluzione temporalmente non omogenea »

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t)u,\; a < t < b,$$

Nel primo paragrafo è preso in considerazione il caso dell'operatore di tipo diffusivo, in uno spazio reale di Hilbert $L^2(R^m)$ e ci si occupa dell'integrazione delle equazioni di diffusione; nel secondo paragrafo si occupa dell'integrazione delle equazioni di diffusione in uno spazio riemanniano compatto.

Nel terzo paragrafo ci si occupa della integrazione delle equazioni delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au, \ -\infty < t < \infty$$

con $$A = a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + c(x), \ (a^{ij}(x) = a^{ji}(x)),$$

in uno spazio euclideo R^m.

Il quarto paragrafo è dedicato alla integrazione delle equazioni di evoluzione temporalmente inomogenee in uno spazio riflessivo di Banach.

Il quinto ed ultimo capitolo concerne un metodo di Tanabe e Sobolevski.

L'opera è dotata di opportuni cenni storici, di commenti e richiami e di utili riferimenti, a parte la già citata bibliografia finale.

Lo scopo di sistemazione di un ricco corso di Analisi funzionale vi appare superato dall'interesse determinato dall'importante ausilio alla ricerca che vi si concreta. E le applicazioni riescono particolarmente gradite al fisico-matematico, che dall'Analisi funzionale trae sempre più mezzo ed alimento per la propria indagine.

ANTONIO PIGNEDOLI

MARIO VILLA, *Lezioni di Geometria*, v. II, Padova, Cedam, 1965, pp. XX+454.

Questo volume è la seconda parte di un ampio trattato di Geometria rivolto agli studenti del primo biennio di matematica, di fisica, di ingegneria. Una prima idea del suo contenuto si può avere dall'indice, che, congiunto a quello del primo volume, presenta l'opera nel suo insieme.

Il volume I (*Lezioni di Geometria*, v. I, Padova, Cedam, 4ª ed., 1965, pp. XX + 388) comprende cinque parti: 1ª, Geometria analitica del piano; 2ª, Geometria analitica dello spazio; 3ª, Elementi di Geometria proiettiva; 4ª, Le coniche e le quadriche; 5ª, Complementi (precisamente: cenni di nomografia e complementi sulla teoria delle coniche e delle quadriche, sulle curve algebriche e sugli enti immaginari, sulla geometria della retta nello spazio).

Il volume II comprende pure cinque parti: 1ª, Proiettività tra forme fondamentali di seconda e di terza specie; 2ª, Teoria delle curve e delle superficie; 3ª, Teoria delle trasformazioni puntuali; 4ª, I metodi di rappresentazione della Geometria descrittiva; 5ª, Spazi lineari a più dimensioni, varietà, trasformazioni puntuali fra due S_r.

In ogni volume ciascuna parte è suddivisa in capitoli, e ogni capitolo presenta, nel testo (in carattere più piccolo del normale) o in nota, precisazioni e dimostrazioni che guidano il lettore ad approfondire gli argomenti. Brevi notizie storiche mostrano le tappe dello sviluppo delle varie teorie, e ricordano i bei nomi a cui si devono i più salienti contributi. Nitide le figure, ottima la stampa.

Si rileva intanto dai precedenti brevi indici che il primo volume contempla il consueto programma di un primo corso universitario di Geometria, mentre il secondo volume, del quale propriamente si occupa questa recensione, svolge la materia di un secondo anno di Geometria, e anche assai di più.

Nella parte 1ª, l'A., dopo aver trattato le proiettività tra forme fondamentali di seconda e di terza specie, tenendo conto della recente evoluzione dei programmi del primo biennio di matematica, si sofferma a porgere chiare notizie ed esempi di gruppi astratti, di anelli, corpi, campi, ideali, nonchè di gruppi di trasformazioni, accennando alle diverse geometrie, secondo il classico programma di Erlangen del Klein.

Nella 2a parte, svolgendo la teoria delle curve e delle superficie e delle loro singolarità, l'A. insiste efficacemente sulla nozione di contatto (fra due curve piane o sghembe, o due superficie, o una curva e una superficie), dimostrandone le proprietà e i caratteri invariantivi. È notevole, nel capitolo VII che riguarda le curve sghembe, la nozione dovuta all'Autore di *elica di curvatura* relativa a un punto semplice ordinario O di una curva sghemba $\mathcal{C}$: è così chiamata quell'elica cilindrica circolare che *oscula* in O la $\mathcal{C}$ e la cui proiezione ortogonale sul piano rettificante in O *iperoscula*, in O, la proiezione ortogonale, sul piano stesso, della $\mathcal{C}$. L'elica di curvatura esiste sempre, ed è unica, e gode della proprietà di avere la torsione uguale a quella della $\mathcal{C}$ in O. La nozione di torsione di una curva sghemba qualunque è così ricondotta a quella dell'elica circolare (1).

Sempre nella parte 2a si trovano notizie sugli inviluppi e sui sistemi lineari di curve piane, sulle curve prime polari e la curva hessiana, con la dimostrazione delle formule di Plücker. Nel capitolo VIII sulle superficie, con l'analisi dei punti singolari, con le notizie riguardanti tangenti e linee asintotiche, le varie curvature, le tangenti principali e le linee di curvatura, gli inviluppi, le rigate, sono presentate le due forme quadratiche fondamentali, ed è precisato il concetto di applicabilità fra due superficie. Sono poi descritte le più notevoli curve sghembe (cubiche e quartiche e linea di stringimento di una rigata sghemba) e superficie (monoidi, hessiana, superficie di rotazione, elicoidali, pseudosferiche, topografiche, ecc.).

Nella 3a parte sono trattati i connessi algebrici, le trasformazioni quadratiche e cremoniane fra piani e fra spazi, le trasformazioni cubiche fra spazi, le trasformazioni puntuali fra piani e fra spazi con le relative direzioni e proiettività caratteristiche e trasformazioni approssimanti. Vi sono pure illustrate le corrispondenze che derivano dalla proiezione stereografica delle quadriche (in particolare della sfera), le antiproiettività e le antiomografie. Va rilevato che le nozioni relative alle trasformazioni puntuali, in parte dovute all'Autore stesso (come, ad esempio, quella di proiettività caratteristiche) (2), entrano per la prima volta nella trattatistica universitaria.

La parte 4a espone i metodi di rappresentazione della Geometria descrittiva: le proiezioni ortogonali, le quotate, le centrali, con cenni sulle proiezioni bicentrali, sulla prospettiva centrale, l'assonometria e la fotogrammetria. Il tutto è esposto in modo da guidare il lettore alla tanto necessaria intuizione geometrica delle figure dello spazio.

Nella parte 5a sono esposti gli elementi della teoria degli spazi lineari a più dimensioni (spazi proiettivi, affini, simili, euclidei), delle varietà dello S_r, in particolare delle ipersuperficie e delle varietà algebriche, degli spazi osculatori a una varietà e delle curve quasi asintotiche di essa. Segue un cenno su omografie, reciprocità e trasformazioni puntuali fra due S_r, e sugli spazi di Riemann.

Chiudono questo volume (come già il volume primo) riproduzioni fotografiche di bei modelli di superficie (elicoidi, pseudosfera, superficie di Steiner, di Kummer, ecc.).

Questa pur sommaria presentazione mostra che la materia svolta nel volume supera assai il programma di un secondo corso propedeutico di Geometria, sicchè l'opera, come giustamente l'Autore ritiene, potrebbe anche servire per un corso di Istituzioni di Geometria superiore.

(1) Si veda: M. VILLA, *Sulla definizione della torsione di una curva sghemba*, questo Bollettino, Ser. III, Vol. 15, p. 47 (1960).

(2) Si veda: M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi.* I. *Le proiettività caratteristiche.* Rend. della Reale Accademia d'Italia, Ser. VII, Vol. III, p. 718 (1942).

Ogni argomento è trattato con chiarezza e con rigore e, talvolta, con impostazione originale: il ricco contenuto e questi pregi rendono l'opera attraente e sommamente utile.

GIUSEPPINA MASOTTI BIGGIOGERO

I. N. HERSTEIN, *Topics in Algebra,* Blaisdell publishing Company 1964, pagg. I-VIII, 1-342, $ 8,50.

Il presente volume tratta con una certa ampiezza argomenti classici relativi all'algebra delle strutture più semplici. Esso nasce da corsi tenuti dall'Autore presso la Cornell University e può risultare utile anche nei corsi di « Algebra » delle nostre Università.

Gli argomenti trattati sono i seguenti.

Il volume inizia con le prime nozioni sui concetti di insieme e di applicazioni fra insiemi. Si ricordano quindi alcune proprietà dei numeri interi, precisamente quelle sulla scomponibilità e quelle delle congruenze modulo n, supponendo però nota l'introduzione (in forma assiomatica, per esempio) degli interi stessi.

Il secondo capitolo è dedicato alla teoria dei gruppi. Dopo le definizioni e le prime proprietà si introduce il concetto di sottogruppo e si dànno alcune relazioni fra gli ordini nel caso dei gruppi finiti. Presentati i sottogruppi normali, segue la solita teoria elementare dell'omomorfismo fra gruppi. Con i gruppi di sostituzioni si dà il teorema di Cayley. È riportato anche il primo teorema di Sylow in due fasi, prima per i gruppi abeliani e poi per gruppi finiti qualsiasi.

Il terzo capitolo si riferisce alla teoria degli anelli. Dopo le prime definizioni e la presentazione di anelli particolari vengono trattati i concetti di ideale, anello quoziente ed omomorfismo fra anelli. Seguono il teorema dell'anello quoziente con ideale massimale e la costruzione del campo dei quozienti di un dominio di integrità. Vi è pure una breve ma già abbastanza completa teoria degli anelli euclidei con l'esempio degli interi gaussiani; si dà quindi — a titolo di applicazione — il teorema di Fermat per certi numeri primi. Il capitolo si chiude con la considerazione dei polinomi su un anello, su un campo ed in particolare sul campo dei numeri razionali.

Il quarto capitolo è dedicato agli spazi vettoriali ed agli A-moduli. Dopo le prime proprietà degli spazi vettoriali generici si introducono gli spazi vettoriali a dimensione finita. Sono poi trattati lo spazio duale di uno spazio vettoriale ed il concetto di prodotto interno. Si definiscono quindi gli A-moduli su un anello A.

Il quinto capitolo tratta alcuni problemi di teoria dei campi in relazione soprattutto all'estensione (algebrica e trascendente). Con l'occasione si accenna brevemente ma in modo abbastanza completo a questioni di matematiche elementari quali la trascendenza di e e le costruzioni con riga e compasso. Infine si dànno gli elementi della teoria di Galois e qui si inserisce il problema della risolubilità per radicali.

Il sesto capitolo è dedicato alle trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale V definito in un campo F, viste dapprima come insieme degli omomorfismi di V in se stesso ed intepretate poi come matrici sul campo F. Segue quindi la teoria delle matrici in forma elementare ma già abbastanza ampia. Si accenna anche alle trasformazioni (e matrici) hermitiane, unitarie e normali. Il capitolo si conclude con un paragrafo dedicato alle forme quadratiche reali.

L'ultimo capitolo (il settimo) contiene argomenti scelti che si attaccano ad alcuni dei capitoli precedenti e precisamente: le prime notevoli proprietà dei campi finiti, il teorema di Wedderburn sui campi finiti, un teorema di Frobenius a proposito degli anelli algebrici definiti sul campo reale, le prime proprietà dei quaternioni interi e la loro applicazione al problema di Waring dei quattro quadrati, in teoria dei numeri.

Dopo la presentazione degli argomenti contenuti nel volume in esame occorre aggiungere che la trattazione è condotta con cura e precisione; le varie proprietà sono enunciate e sottolineate in modo evidente, ben suddivise e sempre dimostrate.

All'inizio di ogni capitolo vi è una breve presentazione dell'argomento considerato. Nella trattazione sono inseriti molti esempi ed alla fine di ogni paragrafo sono elencati parecchi problemi proposti.

Appena si presenta l'occasione vien fatto riferimento a problemi classici delle matematiche elementari che sono ben interpretati dalle teorie algebriche svolte e che d'altronde spiegano anche come e perchè queste si siano talvolta sviluppate in certo modo.

Alla fine di ogni capitolo sono riportate anche alcune indicazioni bibliografiche.

Fra i tanti libri di « Lezioni di Algebra » che in ogni lingua vengono pubblicati in questi tempi, il volume di Herstein ha il pregio di essere di abbastanza facile lettura pur avendo un contenuto matematico piuttosto ampio. Esso appare nel giusto mezzo fra la banale e prolissa divulgazione e la trattazione seria ma troppo stringata.

CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI

I. HACKING, *Logic of Statistical Inference*, Cambridge University Press, 1965, pp. IX-232 (40 s.).

In questo volume, l'A. tende ad esporre rapidamente i principali sistemi di logica induttiva, proposti in questo secolo, come base teorica al Calcolo delle Probabilità.

Nella prefazione, l'A. afferma di ridurre al minimo i tecnicismi, e di voler evitare « un simbolismo incomprensibile a chi non abbia imparato a decifrarlo » (*sic*: « a symbolism inscrutable to anyone not educated in the art of reading it »).

Anche se si vuole prescindere dai metodi della logica simbolica (e, almeno dopo il lavoro del Carnap, si può ragionevolmente ritenere che essi non siano inutili in questioni di tal genere), la quasi completa esclusione di ogni formalismo matematico non pare giustificata, specie in un volume diretto allo statistico attivo, ad una persona, cioè, in cui si può presumere un certo livello di conoscenze matematiche.

L'opera si divide in tredici capitoli, ciascuno dei quali è accompagnato (nell'indice) da un breve ma chiaro sommario.

Essi sono:

I: Long Run Frequencies.
II: The Chance Set-up.
III: Support.
IV: The Long Run.
V: The Law of Likelihood.
VI: Statistical Tests.
VII: Theories of Testing.
VIII: Random Samplig.
IX: The Fiducial Argument.

X: Estimation.
XI: Point Estimation.
XII: Bayes' Theory.
XIII: The Subjective Theory.

Le notizie raccolte in questi tredici capitoli sono abbastanza copiose: non sempre è facile vedere, però, il nesso che le lega. Talvolta si ha l'impressione che l'A. pensi che l'esposizione di una propria opinione sia una « dimostrazione »; si veda, p. es., il cap. IX, a proposito della contraddittorietà di un particolare sistema di postulati, o il cap. III, a proposito dell'asserita compatibilità tra la teoria soggettiva e quella dello « Statistical Support », (teo ria prediletta dall'A., e che appare uno sviluppo delle idee di H. Jeffreys e di R. A. Fisher).

Il volume potrebbe meglio adempiere ad una utile funzione di introduzione, e di prontuario, per uno studio dei fondamenti dell'induzione statistica, se corredato da una bibliografia critica essenziale (non confinata in scarse note a piè di pagina), e se alla esposizione venisse data una forma più sistematica, e meno bizzarra, più adatta cioè ad una trattazione scritta.

PIETRO LINGUA

MIKUSINSKI J. - SIKORSKI R., *Théorie élémentaires des distri butions*. Gauthier-Villars, Paris, 1964, pag. 108.

Kirchhoff, sembra, fu il primo a considerare le funzioni impulsive, dette, più tardi, funzioni di Dirac e definite, in sostanza, come limiti di funzioni ordinarie. In seguito, altri fisici-matematici presero in esame quelle funzioni, cito, ad esempio, il Giorgi che le adoperò nei suoi studi sul calcolo operazio nale pubblicati nel 1903-1905. E, come è ben noto, intorno al 1930 le funzioni impulsive furono introdotte nella meccanica quantistica dal Dirac e da quel tempo il loro uso è diventato piuttosto comune nella fisica e nella tecnica, anche se non del tutto legittimo dal punto di vista matematico.

Una teoria rigorosa si ebbe subito dopo la guerra quando le funzioni di Dirac furono inquadrate nella teoria delle distribuzioni di Schwartz. Ma, quella teoria viene, talvolta, esposta in una forma alquanto astratta sicchè il suo studio non è sempre agevole, almeno per i non iniziati.

Al contrario, nel presente libro di Mikusinski e Sikorski la teoria delle distribuzione è esposta in maniera semplice, chiara, veramente piacevole e adatta, in modo particolare, per il matematico applicato. Il libro è diviso in due capitoli. Nel primo si considerano le distribuzioni di una sola variabile che, in sostanza, vengono introdotte secondo l'idea tradizionale a cui si è già accennato, però precisata in modo opportuno. Cioè, per gli Autori, una distribuzione in un certo intervallo (A, B) è rappresentata da una successione, che chiamano fondamentale, di funzioni $f_n(x)$ tali che ogni $f_n(x)$ vale la derivata k-esima della funzione $F_n(x)$ e la successione delle $F_n(x)$ converge uniformemente in ogni intervallo finito interno ad (A, B). Naturalmente gli Autori precisano l'equivalenza fra successioni fondamentali che rappresentano perciò la medesima distribuzione sicchè le $f_n(x)$ possono anche essere polinomi; dimostrano che ogni funzione continua è il caso particolare di una distribuzione e stabiliscono le principali proprietà delle distribuzioni (loro derivabilità, opportunamente definita, di qualsiasi ordine, derivabilità di ogni funzione continua, la derivabilità termine a termine di ogni serie convergente di distribuzioni, l'identità, nel senso delle distribuzioni, fra serie trigonometriche e serie di Fourier convergenti, ecc.) in particolare mettendo in evidenza quelle delle funzioni di Dirac così importanti nelle applicazioni. Poichè le distribuzioni così definite sono di ordine finito, alla fine del capitolo non manca un cenno sulle distribuzioni di ordine infinito cioè tali che l'ordine di derivazione k può dipendere dall'intervallo in cui le $F_n(x)$ sono convergenti.

Il secondo capitolo, indipendente dal primo, è dedicato alle distribuzioni a più variabili. Per evitare alcuni inconvenienti gli Autori introducono le funzioni che chiamano liscie, cioè funzioni derivabili quante volte si vuole rispetto a qualunque variabile, e assumono come definizione di distribuzione, in un dominio D, una successione di funzioni f_n liscie tali che in ogni intervallo I interno a D ogni f^n è la derivata (in generale mista e di un certo ordine) di una funzione F_n liscia e tale che la successione delle F_n converge uniformemente in I. Da questa definizione segue, in maniera semplice e chiara, la teoria delle distribuzioni in più variabili e in particolare delle funzioni di Dirac a più dimensioni.

È augurabile che gli Autori, nell'ordine d'idee di questo libro, sviluppino in uno successivo le applicazioni pratiche delle distribuzioni, in particolare delle funzioni impulsive.

DARIO GRAFFI