BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROBERTO MAGARI

Su una proprietà caratteristica delle teorie incomplete.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.3, p. 292–301.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_3_292_0>

Su una proprietà caratteristica delle teorie incomplete

ROBERTO MAGARI (Firenze) (*)

Sunto. - *Sulla base di alcune semplici osservazioni di carattere algebrico si dimostra che una teoria è non massimale se e solo se l'insieme delle sue tesi è «determinato» dall'insieme delle proposizioni ciascuna delle quali è in essa o dimostrabile o refutabile.*

1. Premessa. Sia T l'insieme delle tesi di una teoria costruita in un calcolo logico dato, $\overline{T}$ l'insieme delle proposizioni refutabili nella data teoria e consideriamo l'insieme $T^* = T \cup \overline{T}$. Potrebbe sembrare a prima vista che l'insieme T non risultasse, salvo casi molto particolari, determinato una volta dato T^*. Semplici considerazioni mostrano invece che T resta determinato da T^* ogni volta che la teoria non è massimale (altrimenti detto: ogni volta che T^* non è l'insieme di *tutte* le proposizioni del dato calcolo). In questa nota, dopo aver dimostrato con elementari considerazioni sulle algebre di BOOLE la proprietà ora illustrata ne dò una generalizzazione ai «calcoli generali» introdotti in [4].

2. Sottoalgebre normali di un'algebra di Boole.

In alcune specie di strutture in cui è possibile introdurre convenientemente il concetto di *nucleo* di un omomorfismo si presenta la seguente circostanza:

(1). *Il nucleo di un omomorfismo di dominio S (dove S è una struttura della specie data) è una sottostruttura di S.*

È ben noto che la situazione, per le algebre di BOOLE, presenta due importanti differenze dai casi più consueti. Anzitutto la presenza in esse di due elementi privilegiati «0», «1» porta a definire «0-nuclei» e «1-nuclei», vale a dire «ideali» e «filtri», in secondo luogo la (1) non vale. È tuttavia possibile ricondurre la situazione a schemi consueti mediante le seguenti definizioni:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R. per l'anno 1965-'66.

DEF. 1. – *Sia A un'algebra di Boole* (1) *e B una sua sottoalgebra. B si dirà una* sottoalgebra normale *di A se e solo se esiste un ideale I di A per cui si abbia*:

$$B = I \cup I' \quad (2). \tag{2}$$

È ovvio che si otterrebbe una definizione equivalente leggendo ovunque «filtro» in luogo di «ideale» e viceversa.

DEF. 2. – *Siano A, C due algebre di Boole e f un omomorfismo da A a C. Si dirà* nucleo *di f l'insieme $N_f = f^{-1}(W)$, W essendo la sottoalgebra minima di C (costituita dagli elementi privilegiati* 0, 1). (Il termine «nucleo» sarà d'ora in poi usato in questo senso, gli insiemi $N_f^0 = f^{-1}(0)$ e $N_f^1 = f^{-1}(1)$ saranno detti, come sopra, «0-nucleo» e «1-nucleo»).

Si vede facilmente che:

PROP. 1. – *(Notazioni della def.* 2) *N_f è una sottoalgebra normale di A.*

PROP. 2. – *Se B è una sottoalgebra normale di A esiste almeno un omomorfismo f di dominio A con $N_f = B$ (basta considerare l'omomorfismo canonico di A in A/I, dove I è un qualunque ideale per cui valga la* (2)).

È ovvio che i concetti proposti avrebbero scarso interesse se non sussistessero i consueti rapporti fra nuclei e omomorfismi. In particolare occorre verificare se, data un'algebra di BOOLE A e un epimorfismo f di dominio A, esso resti determinato, a meno di isomorfismi dell'algebra immagine, dal suo nucleo, N_f.

Ebbene, il problema ha risposta positiva ogni volta che f non sia massimale, ogni volta cioè che N_f sia diverso da A.

Vale infatti il seguente:

TEOR. 1. – *Sia A un'algebra di Boole e B una sua sottoalgebra normale propria, allora esiste (uno e) un sol ideale I di A per cui $B = I \cup I'$.*

DIM. – Siano per assurdo I, $\bar{I}$ due ideali distinti di A per cui si abbia:

$$B = I \cup I' = \bar{I} \cup \bar{I}'.$$

(1) Userò, salvo diverse avvertenze, i simboli «$+$», «$\cdot$» (eventualmente omesso) per le operazioni reticolari in un'algebra di BOOLE, il simbolo «$'$» per la complementazione e i simboli «0» «1» per gli elementi minimo e massimo.

(2) I' sta ovviamente per $\{x' : x \in I\}$.

Poichè $I \neq \bar{I}$ esisterà un elemento x appartenente a un ideale ma non all'altro, diciamo a I ma non a $\bar{I}$ (da cui, del resto, risulta $x \in \bar{I}'$ e quindi $x' \in \bar{I}$, e analogamente $x' \notin I$). Poichè B è una sottoalgebra propria di A esisterà almeno un y di A con $y \notin B$ e, essendo I, $\bar{I}$ ideali, $x \in I$, $x' \in \bar{I}$, si ha:

$$xy \in I, \tag{3,1}$$

$$x'y \in \bar{I}. \tag{3,2}$$

Dalla (3,2) si ricava $x'y \in B$, per cui vale una delle:

$$x'y \in I, \tag{4,1}$$

$$x'y \in I'. \tag{4,2}$$

Se vale la (4,1) si trova, tenuto conto della (3,1): $y = xy + x'y \in I$, contro l'ipotesi che sia $y \notin B$. Se vale la (4,2) essendo $y \geq x'y$ e $x'y \in I'$ si trova $y \in I'$ (I' è un filtro) ancora contro l'ipotesi che sia $y \notin B$.

In ogni caso si giunge quindi a un assurdo, e il teorema è dimostrato.

È ben noto d'altronde che se A non è l'algebra semplice essa ammette più di un ideale massimale, onde se $B = A$ si ha più di una scomposizione del tipo (2); si ha cioè:

Se A non è l'algebra semplice, condizione necessaria e sufficiente perchè una sua sottoalgebra normale B ammetta un'unica scomposizione del tipo (2) *è che essa sia propria.*

Dal teorema 1, tenuto conto dell'analogo risultato per gli 0-nuclei e per gli 1-nuclei segue subito il seguente corollario:

COR. 1. – *Se A è un'algebra di Boole e B una sua sottoalgebra normale propria esiste* (*uno e*), *a meno di isomorfismi dell'algebra immagine, un solo epimorfismo di dominio A e nucleo B.*

In altri termini si ha la consueta situazione per cui se f_1, f_2, rispettivamente da A a C_1 e da A a C_2, sono due epimorfismi con lo stesso nucleo (ma occorre ora chiedere che questo nucleo sia proprio) è sempre possibile costruire un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f_2"] & C_2 \end{tikzcd}$$

in cui f sia un isomorfismo.

Se il nucleo coincide con A questa possibilità sussiste invece solo se A è semplice (3).

È interessante notare che, quando il nucleo coincide con A, può accadere che non si possa neanche costruire un diagramma commutativo del tipo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & C_1 \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow{f_2} & C_2 \end{array}$$

in cui f, g siano isomorfismi.

Tale è per esempio il caso, se A è un'algebra infinita dotata di almeno un atomo, a, f_1 è un omomorfismo avente per 1-nucleo il filtro generato da a e f_2 ha per 1-nucleo un filtro massimale non principale (ovviamente in un'algebra infinita esistono sempre filtri massimali non principali). Un simile diagramma si può sempre costruire se e solo se il gruppo degli omeomorfismi dello spazio duale di A è transitivo sui punti dello spazio stesso il che accade, per esempio, se A è finita o libera.

Ovviamente i concetti introdotti non permettono di ottenere risultati che non siano già ottenibili senza maggiori difficoltà con riferimento ai consueti concetti di ideale e di filtro, tuttavia potrebbero forse permettere semplificazioni linguistiche utili. Per esempio si può ora definire in modo ovvio il concetto di successione esatta di algebre di BOOLE (4).

3. Applicazione ai calcoli logici.

È facile vedere come dal teorema 1 si deduca il risultato enunciato nella premessa.

Sia $\mathfrak{L}$ un calcolo logico (5) ed E l'insieme delle sue espressioni.

(3) Naturalmente le immagini di A in due omomorfismi di nucleo A sono in ogni caso isomorfe (e semplici).

(4) Ed è facile vedere che valgono ancora certe proprietà elementari, per esempio:

$W \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ è esatta se e solo se f è iniettiva,

$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow W$ è esatta se e solo se f è suriettiva,

W essendo l'algebra semplice.

(5) Intendo qui uno dei calcoli classici a due valori, diciamo, per precisare, uno dei calcoli presentati da E. CASARI in [2].

Suppongo che $\mathfrak{L}$ sia costruito in modo che valga per esso il teorema di deduzione [6]:

$$X \vdash x \rightarrow y \text{ se e solo se } (X \cup \{x\}) \vdash y \qquad (x,\, y \in E,\ X \subseteq E).$$

È ben noto che se A è l'algebra di LINDENBAUM–TARSKI di $\mathfrak{L}$ (ved. ad esempio L. HENKIN [3]) e φ l'applicazione canonica di E su A, si ha:

$$\varphi(x \vee y) = \varphi x + \varphi y$$

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi x \cdot \varphi y$$

$$\varphi(\neg x) = (\varphi x)'$$

$$\varphi x = 1 \text{ se e solo se } x \text{ è una tesi}$$

$X \vdash x$ se e solo se φx appartiene al filtro generato da $\varphi(X)$ [7].

Da quanto si è appena ricordato e dal teorema 1, tenuto conto del fatto che A non è semplice, segue subito il:

TEOR. 2. – *Sia $\mathcal{T}$ l'insieme dei sottoinsiemi propri deduttivamente chiusi* [8] *di E e σ l'applicazione di $\mathcal{T}$ in $\mathcal{S}(E)$ definita da:*

$$\sigma T = \{x : x \in T \text{ oppure } \neg x \in T\}, \qquad (T \in \mathcal{T}).$$

(6) Questa ipotesi non è sostanzialmente restrittiva, per esempio il calcolo dei predicati del primo ordine viene presentato nella letteratura sia in modo che valga il teorema di deduzione (Cfr. E. CASARI [2]) sia in modo che questo teorema non valga (Cfr. ad esempio E. W. BETH [1]) ed è facile vedere che i due calcoli ottenuti sono, in un senso non difficile da precisare, sostanzialmente equivalenti. In ogni caso poi il teorema vale se ci si limita alle formule chiuse.

(7) Ciò dipende, oltre che dal teorema di deduzione, dal teorema di finitezza, il quale vale per i consueti *calcoli* classici. Il successivo teorema 2 vale tuttavia più in generale per tutti quei sistemi deduttivi (sintattici o semantici) per i quali l'algebra di LINDENBAUM-TARSKI sia un'algebra di BOOLE, A, e l'operatore di deduzione del sistema sia trasportato nell'operatore K sui sottoinsiemi di A definito da:

$$KX = \bigcap_{Y \in \tilde{S}} Y \qquad (Y \subseteq A),$$

$\tilde{S}$ essendo un opportuno sottoinsieme denso dello spazio duale, S, di A (nel caso della finitezza si ha $\tilde{S} = S$). Gli insiemi deduttivamente chiusi risultano infatti filtri di A anche se $\tilde{S} \neq S$. Cfr. anche teorema 5 (n. 4).

(8) Ovviamente un insieme è deduttivamente chiuso se e solo se è l'insieme delle tesi di un'opportuna teoria.

Allora un elemento T di $\mathcal{T}$ è non massimale (9) *se e solo se* $\sigma^{-1}(\sigma T) = \{ T \}$.

4. Estensione ai calcoli generali.

I risultati dati possono essere estesi sotto certe ipotesi a strutture più generali dei calcoli logici classici. Mi riferisco qui ai *calcoli generali* (C.G.) in cui è introducibile la negazione ([6] parte II) (10).

Per *C.G. con negazione* (C.G.N.) si intenderà qui (11) un sistema $< E, K, \neg >$ in cui $< E, K >$ sia un C.G. ridotto non contraddittorio dotato di minimo, 0, e di massimo, 1, in cui sia introducibile la negazione e « $\neg$ » sia appunto la (unica) negazione in esso introducibile.

Ometto la facile dimostrazione del seguente:

Lemma 1. - *Se $\mathcal{C} = < E, K, \neg >$ è un C.G.N. il sistema $< E, \tilde{K}, \neg >$, in cui $\tilde{K}$ è l'applicazione di $\mathcal{S}(E)$ in $\mathcal{S}(E)$ definita da:*

$$\tilde{K}X = \neg (K \neg (X)) \ (^{12}) \qquad (X \subseteq E) \tag{5}$$

è un C.G.N. (lo si dirà il *duale* di $\mathcal{C}$ e lo si indicherà con $\tilde{\mathcal{C}}$: ovviamente $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}$).

È evidente che i chiusi di $\tilde{\mathcal{C}}$ sono precisamente gli insiemi del tipo $\neg(X)$ con X chiuso di $\mathcal{C}$: si diranno i *chiusi duali* di $\mathcal{C}$.

I concetti di chiuso e di chiuso duale di un C.G.N. costituiscono un'ovvia generalizzazione dei concetti di filtro e di ideale di un'algebra di Boole. In effetti se $A = < \mathcal{A}, +, \cdot, ', 0, 1 >$ è un'algebra di Boole, il sistema $< \mathcal{A}, K, ' >$, in cui K è l'operatore che ad ogni sottoinsieme X di $\mathcal{A}$ associa il filtro da esso generato, è un C.G N. in cui i chiusi e i chiusi duali sono precisamente i filtri e gli ideali di A.

La def. 1 si generalizza ora mediante la seguente:

Def. 3. - *Dato un C.G.N. $\mathcal{C} = < E, K, \neg >$, un sottoinsieme X di E si dirà* normale (*per* $\mathcal{C}$) *se esiste un chiuso Y di $\mathcal{C}$ per cui:*

$$X = Y \cup \neg (Y). \tag{6}$$

(9) in $\mathcal{T} - \{E\}$, rispetto all'inclusione.

(10) In questo numero presuppongo la lettura di [4], [5], [6] e ne riprendo le notazioni.

(11) La stessa locuzione è usata in un senso leggermente diverso da P. Mangani in [7].

(12) Al solito $\neg (X)$ sta per $\{ \neg x : x \in X \}$.

Prima di dare una generalizzazione del teor. 1 è opportuno notare che valgono le seguenti proposizioni, di immediata dimostrazione.

Sia al solito $\mathcal{C} = < E, K, \neg >$ un C.G.N., e diciamo duale di un sottoinsieme X di E l'insieme $\neg(X)$ (che si indicherà con $\tilde{X}$); si ha:

Prop. 3. – *I chiusi duali di* $\mathcal{C}$ *sono tutti e soli i duali dei chiusi di* $\mathcal{C}$ (*come si era già osservato*).

Prop. 4 – *I chiusi massimali di* $\tilde{\mathcal{C}}$ *sono tutti e soli i duali dei chiusi massimali di* $\mathcal{C}$.

Prop. 5. - *Indicata con* $\leq_{\mathcal{C}}$ ($\leq_{\tilde{\mathcal{C}}}$) *la relazione di ordine parziale associata a* $\mathcal{C}$ (*a* $\tilde{\mathcal{C}}$) (ved. [4] n. 6) *si ha:*

$$x \leq_{\mathcal{C}} y \quad \textit{se e solo se} \quad y \leq_{\tilde{\mathcal{C}}} x \qquad (x,\ y \in E).$$

Prop. 6. – *Se* X *è un chiuso* (*un chiuso duale*) *di* $\mathcal{C}$, $x \leq_{\mathcal{C}} y$ ($y \leq_{\mathcal{C}} x$) *e* $x \in X$, *allora* $y \in X$.

Prop. 7. – *Se* X *è un sottoinsieme normale di* E *e* $X = Y \cup \tilde{Y}$ *con* Y *chiuso proprio di* $\mathcal{C}$, *sono equivalenti le:*

$X = E$

Y è massimale (nell'insieme dei chiusi propri),

$\tilde{Y}$ è massimale (nell'insieme dei chiusi duali propri).

Infine ricordo che nei C.G.N. i chiusi massimali costituiscono una base (Cfr. [6], parte II, n. 7).

Il teorema 1 può essere esteso a tutti (e soli, come si vedrà più oltre) i C.G.N. in cui vale la seguente proposizione:

(°) *Se* Y_1 *e* Y_2 *sono due chiusi non massimali distinti con* $Y_1 \nsubseteq Y_2$ *e* $Y_2 \nsubseteq Y_1$, *allora ad uno dei due appartiene un elemento* x *tale che nè* x *nè* $\neg x$ *appartengono all'altro.*

Si dimostra ora molto facilmente che:

Teor. 3. – *Se* $\mathcal{C} = < E, K, \neg >$ *è un C.G.N. in cui vale la* (°) *allora ogni suo sottoinsieme normale proprio ammette* (*una e*) *una sola scomposizione del tipo* (5).

Dim. - Sia per assurdo $X = Y_1 \cup \tilde{Y}_1 = Y_2 \cup \tilde{Y}_2$ con X sottoinsieme normale proprio e Y_1, Y_2 chiusi distinti di $\mathcal{C}$. Ovviamente sono soddisfatte le ipotesi della (°), onde esisterà un elemento x, diciamo di Y_1, tale che nè x nè $\neg x$ appartengono a Y_2. Ciò conduce immediatamente a contraddizione perchè, se nè x nè $\neg x$ appartengono a Y_2 nè $\neg x$ nè x appartengono a $\tilde{Y}_2$, onde risulta $x \notin X$. D'altra parte $x \in Y_1 \subseteq X$.

Più interessante è osservare che la (°) è necessaria per la validità del teorema, nel senso che:

Teor. 4. - *In ogni C.G.N.* $< E, K, \neg >$ *in cui non valga la* (°) *almeno un sottoinsieme normale proprio ammette più di una scomposizione del tipo* (5).

Dim. - Siano Y_1, Y_2 due chiusi non massimali di $< E, K >$ con $Y_1 \not\subseteq Y_2$ e $Y_2 \not\subseteq Y_1$ e per ogni x di Y_1 (Y_2) non appartenente a Y_2 (Y_1) sia $\neg x \in Y_2$ ($\neg x \in Y_1$). Ne segue subito $Y_1 \subseteq Y_2 \cup \tilde{Y}_2$ e $Y_2 \subseteq Y_1 \cup \tilde{Y}_1$. Da queste segue: $\tilde{Y}_1 \subseteq \widetilde{Y_2 \cup \tilde{Y}_2} = \tilde{Y}_2 \cup \tilde{\tilde{Y}}_2 = \tilde{Y}_2 \cup Y_2$ e analogamente $\tilde{Y}_2 \subseteq \tilde{Y}_1 \cup Y_1$. Dalle inclusioni trovate segue $Y_1 \cup \tilde{Y}_1 = Y_2 \cup \tilde{Y}_2$ da cui il teorema.

Al solito si vede poi facilmente che:

Prop. 8. - *Se, in un C.G.N.* $< E, K, \neg >$, *E non si riduce ai soli elementi* 0, 1, *E stesso ammette più di una scomposizione del tipo* (5).

Dim. - Sia x un elemento di E diverso da 0 e da 1. Anche $\neg x$ sarà allora diverso da 1 e da 0 (e da x stesso) ([13]). I due chiusi $K\{x\}$ e $K\{\neg x\}$ sono certo propri e quindi estendibili a due chiusi massimali Y_1, Y_2 che risultano distinti. Si ha allora $E = Y_1 \cup \tilde{Y}_1 = Y_2 \cup \tilde{Y}_2$.

Osservazione. - Potrebbe sorgere il dubbio che la (°) valesse per tutti i C.G.N.. Che non sia così è mostrato dal seguente esempio.

Sia S un insieme di almeno cinque elementi e siano a, b, c, d quattro suoi elementi distinti. Sia $S^* \subseteq \mathfrak{P}(S)$ l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di S che non «spezzano» le coppie $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ (cioè quei sottoinsiemi X per cui è: $X \cap \{a, b\} = \emptyset$ oppure $X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$, e analogamente per $\{c, d\}$), e inoltre dall'insieme $\{a, c\}$ e dal suo complementare. $< S, S^* >$ è base di un (unico) C. G. concreto duale $< S, S^*, K >$ (ved. [4] nn. 7 e 10) e

([13]) Cfr. [6] parte II.

non è difficile vedere che $< S^*, K, - >$ (dove « — » rappresenta la complementazione insiemistica in S) è un C.G.N.

$Y_1 = S^* \cap \mathscr{G}(\{a, b\})$ e $Y_2 = S^* \cap \mathscr{G}(\{c, d\})$ (notazioni di [4]) sono ovviamente due chiusi non massimali distinti di $< S^*, K >$, e si ha:

$$Y_1 \cup \tilde{Y}_1 = Y_2 \cup \tilde{Y}_2 .$$

Sarebbe facile vedere, utilizzando i risultati di [6], che per ogni C.G.N., $\mathfrak{C}$, si può trovare un insieme S e un sottoinsieme S^* di $\mathscr{P}(S)$ tali che $\mathfrak{C}$ sia isomorfo alla struttura $< S^*, K, - >$ costruita come sopra e caratterizzare, sulla traccia dell'esempio dato, i C.G.N. per cui non vale la (°).

Una importante condizione sufficiente per la validità della (°) in un C.G.N. $< E, K, \neg >$ è che:

(°°) *in* $< E, K >$ *siano introducibili, nel senso di* [6] parte II, *tutti i connettivi finitari* (naturalmente, dato che si tratta di un C.G.N., è sufficiente chiedere, ad esempio, che sia introducibile la congiunzione).

Si può anzi dimostrare che:

TEOR. 5. - *Se in un C.G.N.* $< E, K, \neg >$ *vale la* (°°) *allora per ogni coppia* Y_1, Y_2 *con:*

Y_1, Y_2 *chiusi di* $< E, K >$,

$Y_2 \subseteq\!\!\!\!\!/\; Y_1$,

Y_1 *non massimale,*

esiste almeno un elemento $x \in Y_2$ *con* $x \notin Y_1$, $\neg x \notin Y_1$.

DIM. - A norma dei risultati di [6] parte II n. 10 il sistema $A = < E, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 >$ (14) è un'algebra di BOOLE, l'insieme S dei chiusi massimali di $< E, K >$ è un sottoinsieme denso dello spazio duale di A, e si ha:

$$KX = \bigcap_{\substack{Y \in S \\ Y \subseteq X}} Y \qquad (X \subseteq E).$$

Il risultato segue allora dal teorema 2, con banali considerazioni aggiuntive, tenuto conto che i chiusi di $< E, K >$ vengono ad essere particolari filtri di A. (Cfr. anche nota 7). Una dimostrazione diretta è la seguente.

Sia y un elemento di Y_2 non appartenente a Y_1. Se $\neg y \notin Y_1$,

(14) Notazioni di [6].

y stesso è l'elemento cercato, sia dunque $\neg y \in Y_1$. Poichè Y_1 non è massimale esso è certo estendibile a due chiusi massimali distinti, Z_1, Z_2. Si può certo trovare un elemento z appartenente a Z_1 ma non a Z_2 (nè, quindi, a Y_1). Posto $x = y \vee z$ si ha:

$$z \notin Z_2 \text{ e } y \notin Z_2 \text{ da cui } x \notin Z_2 \text{ e infine } x \notin Y_1,$$

$$\neg z \notin Z_1 \text{ da cui } \neg x = \neg z \wedge \neg y \notin Z_1 \text{ e infine } \neg x \notin Y_1,$$

e il teorema è dimostrato.

TESTI CITATI

[1] E W. BETH, *I fondamenti logici della matematica*, Feltrinelli, Milano 1963.

[2] E. CASARI, *Lineamenti di logica matematica*, Feltrinelli, Milano, 1960.

[3] L HENKIN, *La structure algébrique des théories mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris 1956.

[4] R. MAGARI, *Calcoli generali e spazi V_α (Calcoli generali I)*, Le matematiche vol. XXI fasc. 1 (1966) pp. 83-108.

[5] — —, *Calcoli generali con più di un operatore deduzione (Calcoli generali II)*, ibidem pp. 135-149.

[6] — —, *Sull'introduzione dei connettivi in un calcolo generale (Calcoli generali III)*, (in corso di pubblicazione in Le Matematiche).

[7] P. MANGANI, *Osservazioni sui legami fra i « Calcoli generali » e le algebre di Boole*, Le Matematiche, Vol. XXI, Fasc. 2 (1966).

[8] R. SIKORSKI, *Boolean Algebras*, Springer Verlag, Berlin, 1960.

Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I.
il 7 luglio 1966