BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Francesco Giacomo Tricomi

Su di una classe di nuclei definiti-positivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.1, p. 1–3.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Su di una classe di nuclei definiti-positivi

FRANCESCO GIACOMO TRICOMI (Torino)

Sunto. - *Si dimostra che certi nuclei di Fredholm collegati con una funzione a coefficienti di Fourier positivi, sono tutti definti-positivi.*

1. – Nella mia ormai ben nota memoria lincea del 1923 sulle equazioni di tipo misto, mi occorse di dimostrare che l'integrale

$$\int_0^1\int_0^1 | x - y |^{-1/3}\nu(x)\nu(y)dxdy$$

è sempre positivo (ammenochè la funzione $\nu(x)$ sia identicamente nulla) cioè che il nucleo di FREDHOLM

$$| x - y |^{-1/3} \tag{1}$$

è definito-positivo. Però tale dimostrazione è sbagliata perchè vi si considera una «forma quadratica» $\Sigma a_{rs}x_r x_s$ che non è per nulla una forma quadratica perchè non è $a_{rs} = a_{sr}$.

Questo mi fu fatto osservare verso la fine del 1924 dal VAN DER WAERDEN — allora perfezionando a Göttingen — che doveva riferire sulla mia memoria al seminario di Courant. Mi riuscì però di rimpiazzar subito la dimostrazione fallace con un'altra impeccabile che pubblicai qualche anno dopo [1] e che l'HADAMARD giudicò una delle cose più graziose che avessi mai fatto.

Tale dimostrazione è imperniata su di una speciale formula della teoria della funzione *gamma* e, come tale, sembra peculiare al caso dei nuclei del tipo (1) o poco più generali. Tuttavia, rivangando queste vecchie cose, mi sono ora accorto che essa può essere facilmente estesa ad una classe molto più ampia di nuclei simmetrici, e la cosa merita forse di essere fatta conoscere perchè può riuscire utile in più di un caso. Si tratta precisamente dei nuclei

[1] TRICOMI, *Sull'equazione integrale di Abel con limiti d'integrazione costanti*, Rend. R. Ist. Lombardo (2) **60**, 598-604 (1927).

del tipo «del ciclo chiuso»

$$K(x, y) = f(x - y) \tag{2}$$

dove $f(t)$ denota una funzione *pari* rappresentabile in un intervallo $(0, a)$ di ampiezza non inferiore ad 1, mediante una serie di coseni *a coefficienti positivi* [2], oppure (caso limite per $a \to \infty$) mediante un integrale di FOURIER della forma

$$f(t) = \int_0^\infty \cos(tu) A(u) du \tag{3}$$

con $A(u) > 0$. Ci si potrebbe anzi accontentare di condizioni un po' meno restrittive, come accennerò alla fine.

2. – La dimostrazione è quasi immediata. Invero se si può porre

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{a} \quad \text{con} \quad a_n > 0,\ a \geq 1, \tag{4}$$

con un'integrazione termine a termine — certo lecita quando f e ν appartengono alla classe L^2 — si ha

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} \equiv \int_0^1\int_0^1 f(x-y)\nu(x)\nu(y)dxdy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1\int_0^1 \nu(x)\nu(y) \cos \frac{n\pi(x-y)}{a} dxdx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1\int_0^1 \Big[\nu(x) \cos \frac{n\pi x}{a} \cdot \nu(y) \cos \frac{n\pi y}{a} + \\ &\qquad + \nu(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \nu(y) \sin \frac{n\pi y}{a}\Big] dxdy = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \left[\int_0^1 \nu(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx\right]^2 + \left[\int_0^1 \nu(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx\right]^2 \right\} \end{aligned}$$

e questo dimostra che è certo $\mathfrak{J} > 0$, ammenochè i coefficienti di FOURIER della funzione $\nu(x)$ siano tutti nulli, cioè la funzione sia q. d. p. nulla in $(0, a)$.

[2] Al proposito può vedersi: R. P. BOAS, *Fourier series with positive coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc. 72, 863-865 (1966).

Similmente, se vale la rappresentazione integrale (3), risulta

$$\mathfrak{I} = \int_0^\infty A(u) \left\{ \left[\int_0^1 \cos (ux)\nu(x)dx \right]^2 + \left[\int_0^1 \sin (ux)\nu(x)dx \right]^2 \right\} du$$

e le conclusioni sono le stesse di prima.

3. - Le condizioni precedentemente indicate possono attenuarvi, nel senso che non è per nulla neccessario che la funzione f sia proprio *rappresentata* dalla serie (4) o l'integrale (3), in quanto quello che occorre è solo — nel caso della serie — che essa (moltiplicata per ν) possa venire integrata termine a termine; per lo che è notoriamente sufficiente che le due funzioni f e ν appartengano entrambe alla classe L^2.

In concreto dunque, per poter asserire che il nucleo (2), dove f denota una funzione *pari* di classe L^2, sia definito-positivo nell'intervallo fondamentale (0, 1), basta verificare che per qualche $a \geq 1$ risulta

$$\int_0^a f(t) \cos \frac{n\pi t}{a} dt > 0, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...), \tag{5}$$

oppure (caso limite $a \to \infty$) che risulta

$$\int_0^\infty f(t) \cos (tu)dt > 0 \tag{6}$$

quasi dappertutto per $0 < u < 1$.

Nel caso (1) la condizione (6) è subito verificata perchè notoriamente si ha

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} \cos (tu)du = \frac{\Gamma(\alpha)}{u^\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} > 0, \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
il 30 settembre 1966