ENRICO BOMBIERI

Sulla seconda variazione della funzione di Koebe.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.1, p. 25–32.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_1_25_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Sulla seconda variazione della funzione di Koebe.

ENRICO BOMBIERI (Milano)

Sunto. - *Sia* $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in S$ *una funzione regolare e univalente in* $|z| < 1$. *In relazione ad una precedente ricerca di* DUREN *e* SCHIFFER [1] *si studiano alcune forme quadratiche in un numero infinito di variabili e si dimostra che sono positive definite. Si traggono di qui alcune conclusioni a proposito della validità della congettura di* BIEBERBACH *per le funzioni della famiglia* S.

Summary. - *Let* $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in S$ *be regular and univalent in the unit disk* $|z| < 1$. DUREN *and* SCHIFFER [1] *have shown that any analytical variation of the* KOEBE *function* $\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots$ *gives a variational formula*

$$a_n^* = n + \varepsilon^2 \delta^2 \{ a_n \} + O(\varepsilon^3)$$

where $\delta^2 \{ a_n \}$ *can be expressed by a quadratic form in an infinite number of variables uniquely determined by the variation* $z^* = z + \varepsilon v(z)$.

In this paper we prove $\delta^2 \{ a_n \} < 0$ *unless the variation is trivial, for all values of* n. *This result, as we shall show elsewhere, can be used to give a proof of the local maximum property of the* n*-th coefficent of the* KOEBE *function, for all indices* n.

1. - Introduzione.

Sia $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in S$ una funzione regolare e univalente in $|z| < 1$. La nostra congettura di BIEBERBACH afferma che $Re \{ a_n \} \leq n$, valendo il segno di uguaglianza se e solamente se $f(z) = \frac{z}{(1 - \rho z)^2}$ con $\rho^{n-1} = 1$.

Recentemente ([1], [2]) è stato posto il problema di verificare la validità o meno della congettura per le funzioni «vicine» alla congetturata funzione estremale $\frac{z}{(1 - z)^2}$.

Più precisamente, se $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ sia

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(\frac{1}{2} e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta \right\} \tag{1}$$

(è chiaro che la costante $\frac{1}{2}$ può essere rimpiazzata da un qualunque numero < 1); il problema che si presenta è verificare che

CONGETTURA 1. - *Esiste* $\varepsilon_n > 0$ *tale che se* $f(z) \in S$ *e se* $\| f(z) - \frac{z}{(1-z)^2} \| < \varepsilon_n$ *allora*

$$\operatorname{Re} \{ a_n \} \leq n, \tag{2}$$

valendo il segno di uguaglianza se e solamente se $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Tale congettura è stata dimostrata da GARABEDIAN, ROSS e SCHIFFER [3] quando $n = 2m$ è un numero pari. La loro dimostrazione, che dipende da un nuovo e originale trattamento delle disuguaglianze di GRUNSKY (vedasi [3]), si applica però solamente al caso $n = 2m$ ma non al caso $n = 2m + 1$, come avviene ogni volta che si debba considerare la funzione ausiliaria $f(z^2)^{\frac{1}{2}}$. Riteniamo pertanto di un certo interesse dimostrare qui un risultato su alcune forme quadratiche considerate da DUREN e SCHIFFER [1] e dal quale è possibile dedurre una dimostrazione generale della Congettura 1. La dimostrazione di questa congettura essendo ancora notevolmente complicata, verrà data in un lavoro successivo. In questa nota ci limiteremo a dimostrare il seguente

TEOREMA 1. - *Sia* $f_\varepsilon(z) = z + a_2(\varepsilon) z^2 + \ldots \in S$ *una famiglia a un parametro di funzione univalenti, dipendente analiticamente dal parametro* ε, *con* $f_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, *ed ottenuta per mezzo di una variazione analitica di* $f_0(z)$.

Allora se ε *è sufficientemente piccolo si ha*

$$\operatorname{Re} \{ a_n(\varepsilon) \} \leq n. \tag{3}$$

2. - Sia $f_\varepsilon(z)$ una famiglia di funzioni univalenti soddisfacenti alle condizioni del Teorema 1. In questo caso DUREN e SCHIFFER hanno dimostrato che esistono forme quadratiche Q_n tali che

$$a_n(\varepsilon) = n + \varepsilon^2 \delta^2 \{ a_n \} + O(\varepsilon^3) \tag{4}$$

dove

$$\delta^2 \{ a_n \} = -\frac{2}{\pi} Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots). \tag{5}$$

Le variabili x_γ sono individuate dalla funzione analitica che « guida » la variazione della funzione $f_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, e queste non sono tutte nulle tranne se la variazione si riduce all'identità.

Le forme quadratiche Q_n sono date dalla formula

$$Q_n = \sum^*_{\substack{n<\alpha+\beta \\ 0<\alpha-\beta<n}} (\alpha+\beta)(x_\alpha - x_\beta)^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \alpha(n-\alpha)x^2_\alpha + \tag{6}$$
$$+ 2 \sum_{\alpha+\beta<n} (n-\alpha-\beta)x_\alpha x_\beta$$

dave $x_\alpha = 0$ se $\alpha \leq 0$ e dove Σ^* indica una somma estesa soltanto alle coppie α, β per le quali $\alpha + \beta$ e $n - 1$ abbiamo la stessa parità. Queste formule (6) sono ottenute dalle formule di DUREN e SCHIFFER ([1], ch. 7, formule (35) e (41), pp. 248-249), avendosi nella notazione di DUREN e SCHIFFER

$$S_{2m} = Q_{2m} \text{ e } S_{m+1} = \frac{1}{2} Q_{m+1}.$$

Infine abbiamo corretto un errore nella formula (34), pag. 248 di [1], dovuto al fatto che nella formula (33), pag. 248 di [1] il contributo del termine con $l = 0$ era stato inavvertimente omesso.

È chiaro da quanto precede che il Teorema 1 sarà dimostrato se verifichiamo che Q_n è una forma quadratica positiva definita. Ricordiamo che N. FRIEDMAN (vedasi [3]) ha calcolato gli autovalori di opportuni troncamenti della forma quadratica Q_n verificando così che $Q_n > 0$ per $n \leq 100$.

TEOREMA 2. - *Si ha*

$$Q_n \geq \sum^*_{\substack{n<\alpha+\beta \\ 0<\alpha-\beta<n}} (\alpha+\beta)(x_\alpha - x_\beta)^2 + \frac{n-1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha^2, \tag{7}$$

ed in particolare

$$Q_n > 0 \quad \textit{tranne se} \quad x_\alpha = 0 \quad \textit{per ogni} \quad \alpha. \tag{8}$$

La disuguaglianza (8) mostra il carattere positivo definito della forma quadratica Q_n e con esso, ricordando le formule (4) e (5), dimostra anche il Teorema 1.

2. - Dimostrazione del Teorema 2.

LEMMA 1. - *Sia $f(x)$ la funzione a scala*

$$(9) \qquad f(x) = \begin{cases} x_\alpha \quad se \quad 1 - \dfrac{2\alpha + 1}{n} < x < 1 - \dfrac{2\alpha - 1}{n}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n; \\ 0 \quad se \quad |x| > 1 - \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Allora si ha

$$(10) \qquad \left(\frac{n}{2}\right)^3 \int_{-1}^{1} (1 - x^2) f^2(x) dx = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \alpha(n - \alpha) x_\alpha^2 - \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha^2,$$

$$(11) \qquad \left(\frac{n}{2}\right)^3 2 \iint_{x+y \geq 0} (x + y) f(x) f(y) dx dy =$$

$$= 2 \sum_{\alpha+\beta<n} (n - \alpha - \beta) x_\alpha x_\beta + \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha x_{n-\alpha},$$

$$(12) \qquad \left(\frac{n}{2}\right)^3 \int_{-1}^{1} f^2(x) dx = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \left(\frac{n}{2}\right)^2 x_\alpha^2.$$

DIMOSTRAZIONE. - È immediata; ad esempio

$$\int_{-1}^{1} f^2(x) dx = \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha^2 \int_{1-\frac{2\alpha+1}{n}}^{1-\frac{2\alpha-1}{n}} dx = \frac{2}{n} \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha^2.$$

La dimostrazione della (11) richiede una verifica più complessa, ma non presenta particolari difficoltà.

LEMMA 2. - *Sia $f(x) \in L^2(-1, 1)$. Allora*

$$(13) \qquad \int_{-1}^{1} (1 - x^2) f^2(x) dx + 2 \iint_{x+y \geq 0} (x + y) f(x) f(y) dx dy \geq 0.$$

DIMOSTRAZIONE. - Per dimostrare la disuguaglianza (13), basterà dimostrare che qualunque sia r con $0 < r < 1$ la (13) è vera per tutte le funzioni $f(x)$ di quadrato integrabile e che si annullano per $|x| > r$. Sia perciò $\Delta(r)$ il dominio triangolare

(14) $$\Delta(r) = \{ x,\ y \mid x + y \geq 0,\ |x| \leq r,\ |y| \leq r \}$$

e sia

(15) $$\alpha = \alpha(r) = \operatorname*{Inf}_{L^2} \frac{\displaystyle\iint_{\Delta(r)} (x + y)f(x)f(y)dxdy}{\displaystyle\int_{-r}^{r} (1 - x^2)f^2(x)dx}.$$

Poichè $1 - x^2 \geq 1 - r^2 > 0$ per $|x| < r$, la teoria di FREDHOLM si applica, e ne viene che

(16) $$\alpha = -\frac{1}{\lambda}$$

dove λ è il minimo autovalore positivo dell'equazione integrale

(17) $$(1 - x^2)f(x) = -\lambda \int_{-x}^{r} (x + y)f(y)dy;$$

infatti è assai facile vedere che $\alpha < 0$, dunque per avere $\alpha = \min$ si dovrà avere $\lambda = \min$ e $\lambda > 0$.

L'equazione (17) mostra immediatamente che $f(x)$ è la restrizione all'intervallo $-r \leq x \leq r$ di una funzione di variabile complessa $f(z)$ che è olomorfa in $|z| < 1$. Potremo quindi scrivere

$$f(x) = A \sum_0^\infty a_m x^{2m} + B \sum_0^\infty b_m x^{2m+1},$$

dove le due serie sono assolutamente convergenti in $|x| < 1$. Sostituendo nell'equazione (17) e integrando termine a termine si ricava

(18) $$\begin{aligned} Aa_0 + Bb_0x + A \sum_1^\infty (a_m - a_{m-1})x^{2m} + \\ + B \sum_1^\infty (b_m - b_{m-1})x^{2m+1} = \\ = -\lambda \left\{ A \sum_0^\infty \frac{a_m}{2m+2} r^{2m+2} + B \sum_0^\infty \frac{b_m}{2m+3} r^{2m+3} \right\} - \\ - \lambda x \left\{ A \sum_0^\infty \frac{a_m}{2m+1} r^{2m+1} + B \sum_0^\infty \frac{b_m}{2m+2} r^{2m+2} \right\} - \\ - \lambda A \sum_1^\infty \frac{a_{m-1}}{2m(2m-1)} x^{2m} + \lambda B \sum_1^\infty \frac{b_{m-1}}{2m(2m+1)} x^{2m+1}. \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro potenze x^h con $h \geq 2$, ricaviamo

$$a_m = a_0 \prod_1^m \left(1 - \frac{\lambda}{2h(2h-1)}\right) \tag{19}$$

$$b_m = b_0 \prod_1^m \left(1 + \frac{\lambda}{2h(2h+1)}\right) \tag{20}$$

e queste formule mostrano che si può supporre $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$.

Infine uguagliando tra loro i termini costanti e i coefficienti di x nella (18) otteniamo un sistema lineare omogeneo di due equazioni, nelle due incognite A e B. Il determinante di questo sistema sarà nullo e otteniamo così l'equazione in λ

$$\begin{aligned}\left[1 - \lambda \sum_1^\infty a_m \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}\right) r^{2m+2}\right] \cdot \\ \cdot \left[1 + \lambda \sum_0^\infty b_m \left(\frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+3}\right) r^{2m+2}\right] + \\ + \left[1 + \lambda \sum_0^\infty a_m \left(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2}\right) r^{2m+2}\right] \cdot \\ \cdot \left[1 + \lambda \sum_0^\infty b_m \left(\frac{1}{2m+2} - \frac{1}{2m+3}\right) r^{2m+2}\right] = 0\end{aligned} \tag{21}$$

dove $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ e dove a_m e b_m sono dati dalle formule (19) e (20).

Supponiamo adesso che $0 < \lambda < 2$. Allora delle formule (19) e (20) si ricava $0 < a_m \leq 1 - \frac{\lambda}{2}$ se $m \geq 1$, e inoltre $b_m \geq 1$. Dalla (21) segue che

$$1 - \lambda \sum_0^\infty a_m \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}\right) r^{2m+2} < 0$$

dunque

$$\begin{aligned}1 \leq \frac{\lambda}{2} + \lambda \sum_1^\infty a_m \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}\right) r^{2m+2} \leq \\ \leq \frac{\lambda}{2} + \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \sum_1^\infty \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}\right) \leq \\ \leq \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{3}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \leq 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Ne viene $\lambda \geq 2$, un assurdo. Dunque se $\lambda > 0$ allora $\lambda \geq 2$, cioè

$\alpha(r) \geq -\frac{1}{2}$ qualunque sia $r < 1$, e il Lemma 2 è completamente dimostrato.

Per dimostrare il Teorema 2 si procede nel modo seguente. Sia $x = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\xi$, $y = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\eta$, $g(\xi) = f\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\xi\right]$. Avremo, osservando che $f(x) = 0$ per $|x| > 1 - \frac{1}{n}$:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) f^2(x) dx + 2 \iint_{x+y \geq 0} (x + y) f(x) f(y) dx dy =$$

$$= \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right] \int_{-1}^{1} f^2(x) dx +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 \left\{ \int_{-1}^{1} (1 - \xi^2) g^2(\xi) d\xi + 2 \iint_{\xi+\eta \geq 0} (\xi + \eta) g(\xi) g(\eta) d\xi d\eta \right\} \geq$$

$$\geq \frac{2n - 1}{n^2} \int_{-1}^{1} f^2(x) dx,$$

quest' ultima disuguaglianza a causa del Lemma 2. Moltiplicando per $\left(\frac{n}{2}\right)^3$ e ricordando il Lemma 1 otteniamo

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \alpha(n - \alpha) x_\alpha^2 - \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha^2 + 2 \sum_{\alpha+\beta<n} (n - \alpha - \beta) x_\alpha x_\beta +$$

$$+ \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha x_{n-\alpha} \geq \frac{2n - 1}{4} \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha^2,$$

ed il Teorema 2 è completamente dimostrato, poichè

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha x_{n-\alpha} \leq \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha^2 .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] P. L. Duren e M. Schiffer, *The theory of the second variation in extremum problems for univalent functions*, Jour. Analyse Math., X, (1962/63), pp. 193-252.

[2] E. BOMBIERI, *Sul problema di Bieberbach per le funzioni univalenti*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Sci. Fis. Mat. Nat, XXXV, (1963), pp. 469-471.

[3] P. R. GARABEDIAN, G. G. ROSS e M. SCHIFFER, *On the Bieberbach conjecture for even n*, Jour of Math. and Mechanics, XIV, (1965), pp. 975-989.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M I.
l'1 giugno 1966