BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DELFINA ROUX

Sull'ordine secondo Ritt delle serie di Dirichlet.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.1, p. 4–14.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_1_4_0>

Sull'ordine secondo Ritt delle serie di Dirichlet.

DELFINA ROUX (Torino)

Summary. - *Formulas giving the Ritt order of a Dirichlet series* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ *(convergent all over the complex plane* (s)*) through the behaviour of the sequences* $\{a_n\}$ *and* $\{\lambda_n\}$ *have been obtained only under particular assumptions. In this Note we assign an upper bound for the Ritt order of any series* $f(s)$ *and we give a sufficient condition for the Ritt order to be the highest according with this upper bound. The general form of this condition contains, as particular cases, all the theorems on the subject known so far.*

1. - Introduzione.

Il problema della determinazione dell'ordine secondo RITT di una serie generale di DIRICHLET convergente in tutto il piano complesso non è ancora completamente risolto. Su questo argomento sono finora note le proposizioni seguenti.

Sia (qui e nel seguito)

$$(1.1) \qquad f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots.., \ \lambda_n \to +\infty)$$

una serie di DIRICHLET convergente in tutto il piano complesso $s = \sigma + i\tau$. L'ordine ρ (secondo J. F. RITT) di $f(s)$ (1) soddisfa le limitazioni:

$$(1.2) \qquad \frac{1}{\rho} \leq \varliminf_{n \to +\infty} \frac{\log |1/a_n|}{\lambda_n \log \lambda_n} \qquad \text{(J. F. RITT [5]) (2)}$$

(1) $\rho = \varlimsup_{\sigma \to -\infty} \dfrac{\log \log M(\sigma)}{-\sigma}$, dove $M(\sigma) = \sup_{-\infty < \tau < +\infty} |f(\sigma + i\tau)| \leqq +\infty$. Poichè $M(\sigma)$ non può mantenersi limitato per $\sigma \to -\infty$, risulta sempre $0 \leqq \rho \leqq +\infty$.

(2) Questa limitazione è stata stabilita da J. F. RITT nell'ipotesi che $f(s)$ converga assolutamente per ogni s, ma la dimostrazione è valida anche senza questa condizione.

e, qualora $f(s)$ abbia ascissa di uniforme convergenza eguale a $-\infty$,

$$\frac{1}{\rho} \geqq \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\log 1/T(x)}{x \log x} \quad \text{(C. Tanaka [8])} \tag{1.3}$$

dove $T(x) = \sup\limits_{-\infty<\tau<+\infty} \left| \sum\limits_{[x] \leqq \lambda_n < x} a_n e^{-\lambda_n i\tau} \right|$ (3).

Sussistono inoltre i seguenti teoremi:

« Se $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \log n/\lambda_n < +\infty$ (4), vale in (1.2) il segno $=$ » (J. F. Ritt [5]);

« Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \log n/(\lambda_n \log \lambda_n) = 0$, vale in (1.2) il segno $=$ » (K. Sugimura [7]) (5);

« Se $a_n > 0$ per ogni n, vale in (1.3) il segno $=$ » (C. Tanaka [8]) (6).

In questa Nota viene stabilita una limitazione dal di sotto per $1/\rho$ in forma più generale, benchè sostanzialmente equivalente alla (1.3) e viene assegnata una condizione sufficiente affinchè ρ assuma il massimo valore compatibile con tale limitazione. Il teorema così ottenuto contiene, come casi particolari, i teoremi enunciati sopra e permette, fra l'altro, di determinare l'ordine secondo Ritt delle serie (1.1) soddisfacenti la condizione

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(\exp \exp (\delta\lambda_n \log \lambda_n)) \tag{1.4}$$

per ogni $\delta > 0$, $n \to +\infty$ (7).

(3) Si denota con $[x]$ il massimo intero non superiore ad x.

(4) E quindi (come è ben noto) $f(s)$ converge assolutamente per ogni s.

(5) Vedasi anche A. G. Azpeitia [1].

(6) Vedasi anche D. Roux [6]. C. Tanaka ([8], Teorema II p. 68 e Corollario IV p. 77) ha stabilito il teorema in una forma più generale: essa è però una ovvia conseguenza del teorema enunciato come sopra e della disuguaglianza $\left| \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Re e\, a_n e^{-\lambda_n \sigma} \right| \leqq M(\sigma) \leqq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$.

(7) Questa condizione è analoga alla cosidetta « *condizione di Schnee* » che ricorre sovente in questioni riguardanti le serie di Dirichlet (vedasi ad es. E. Landau [3], pp. 781-799; G. Valiron [11], pp. 15-17). La (1.4) è però meno restrittiva della condizione di Schnee.

2. - I risultati.

Sia $\{n_h\}$ una successione crescente di interi positivi soddisfacente le condizioni

$$(2.1)\qquad \lim_{h\to+\infty}\frac{\lambda_{n_{h+1}-1}}{\lambda_{n_h}}=1,\qquad \overline{\lim_{h\to+\infty}}\frac{\log h}{\lambda_{n_h}}<+\infty.$$

Per ogni n che verifichi la limitazione $n_h\leqq n<n_{h+1}$ $(h=$ $=0,\ 1,\ \dots)$ poniamo

$$(2.2)\qquad S_n=S(\lambda_{n_h},\lambda_n)=\sup_{-\infty<\tau<+\infty}\Big|\sum_{n_h\leqq m\leqq n}a_m e^{-\lambda_m i\tau}\Big|$$

e sia

$$(2.3)\qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log 1/S_n}{\lambda_n\log\lambda_n}=\alpha.$$

Sussiste il seguente:

TEOREMA 1. - *Risulta*

$$(2.4)\qquad 1/\rho\geqq\alpha.$$

DIMOSTRAZIONE. - Se $\alpha\leqq 0$, il Teorema è ovvio. Se $\alpha>0$, la serie

$$\varphi(s)=\sum_{h=0}^{\infty}\ \operatorname*{Max}_{n_h\leqq n<n_{h+1}} S_n\cdot\exp\left(-\lambda_{n_{h+1}-1}s\right)$$

per le (2.1) e per il teorema di RITT ha ordine $1/\alpha$. Poichè dalla identità di BRUNACCI-ABEL si ricava $|f(s)|\leqq 2\varphi(\sigma)$, ne segue la (2.4).

OSSERVAZIONI. - 1) Se $\alpha=+\infty$, allora $\rho=0$.

2) Ponendo $\lambda_{n_0}=\lambda_1$, $\lambda_{n_h}=\operatorname{Min}\lambda_n$ $(\lambda_n\geqq[\lambda_{n_{h-1}}+1])$ $(h=1,2,\dots)$, da (2.4) si ottiene (1.3).

3) α, essendo l'opposto della ascissa di uniforme convergenza [8] della serie

$$(2.5)\qquad f_1(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n\log\lambda_n s},$$

è indipendente dalla particolare successione $\{\lambda_{n_h}\}$ (soddisfacente

[8] G. VALIRON [10] A questa Nota si faccia riferimento, anche nel seguito, per tutte le questioni riguardanti ascisse di convergenza semplice, uniforme e assoluta. Vedasi anche G. VALIRON [11], p. 7.

le (2.1)) prescelta (come, d'altronde, si potrebbe dimostrare anche direttamente).

4) È evidente che $\alpha \geqq \overline{\lim\limits_{h\to+\infty}} \dfrac{\log 1/\sum\limits_{n_h \leqq n < n_{h+1}} |a_n|}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h}} = a$. La (2.4) è però, in generale, migliore della disuguaglianza $1/\rho \geqq a$, perchè esistono funzioni $f(s)$ per le quali risulta $\alpha > a$ ([9]).

Per ogni coppia di numeri reali a, b $(0 \leq a \leqq b)$ poniamo

$$S(a, b) = \sup_{-\infty<\tau<+\infty} \Big| \sum_{a \leqq \lambda_n \leqq b} a_n e^{-\lambda_n i\tau} \Big|.$$

Vale il seguente

TEOREMA II. – *Sia $\alpha \geqq 0$ ed esistano due successioni crescenti e divergenti a $+\infty$ di numeri reali positivi $\{\mu_h\}$, $\{\nu_h\}$ $(\mu_h \leqq \nu_h < \mu_{h+1},\ h = 1, 2, \ldots)$ e una successione di numeri reali positivi $\{\vartheta_h\}$ tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

a) $$\lim_{h\to+\infty} \frac{\log 1/S(\mu_h, \nu_h)}{\mu_h \log \mu_h} = \alpha;$$

b) $$\vartheta_h = o(\mu_h), \qquad \frac{\nu_h - \mu_h}{\vartheta_h} = O(\exp\exp(\delta\mu_h \log \mu_h))$$

per ogni $\delta > 0$, $h \to +\infty$;

c) $$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log 1/S(\mu_h - \vartheta_h, \lambda_n)}{\lambda_n \log \lambda_n} > \alpha \qquad (\mu_h - \vartheta_h \leqq \lambda_n < \mu_h),$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log 1/S(\lambda_n, \nu_h + \vartheta_h)}{\lambda_n \log \lambda_n} > \alpha \qquad (\nu_h < \lambda_n \leqq \nu_h + \vartheta_h).$$

Allora risulta

$$1/\rho = \alpha \tag{2.6}$$

(*con la solita convenzione* $1/\rho = +\infty$ *se* $\rho = 0$, $1/\rho = 0$ *se* $\rho = +\infty$).

OSSERVAZIONI. – 1) Se $f(s)$ ha ascissa di uniforme convergenza $u < +\infty$, è certamente $\alpha \geqq 0$. $\left(\text{In tal caso infatti deve essere } \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\log 1/S_n}{\lambda_n} = -u > -\infty\right)$.

([9]) Una tale funzione può essere costruita p. e. tenendo presente che α ed a sono, rispettivamente, gli opposti delle ascisse di convergenza uniforme ed assoluta della serie $f_1(s)$ definita in (2.5). Basta allora assumere come funzione $f_1(s)$ la funzione dell'esempio III 0 di L. NEDER ([4], pp. 10-12) per ottenere $\alpha = +\infty$, $a = 0$.

2) È evidente che esistono sempre successioni $\{\mu_h\}$, $\{\nu_h\}$ soddisfacenti la condizione a): l'ipotesi essenziale del Teorema II è che (oltre ad essere $\alpha \geqq 0$) esista anche $\{\vartheta_h\}$ tale che siano soddisfatte b) e c) e questa ipotesi può non essere verificata.

Ad es., si può vedere facilmente che così avviene per la serie (assolutamente convergente in tutto il piano)

$$f(s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(\log N_p)^2} e^{-ps} \sum_{\substack{n=-N_p \\ n \neq 0}}^{n=+N_p} \frac{1}{n} e^{ns/N_p^2}, \tag{2.7}$$

dove $N_p = \exp \exp (p \log p)$.

3) Se le ipotesi del Teorema II non sono soddisfatte, la (2.6) può non essere verificata.

Si consideri, ad es., la serie (2.7).

Essendo notoriamente [10] per ogni x reale $\left| \sum_{n=1}^{n=N} \frac{\sin nx}{n} \right| \leq A$ (A costante indipendente da N e da x) ed essendo $\mathrm{Ch}\, x$ decrescente al crescere di x per $x < 0$, dall'identità di Brunacci-Abel segue, per ogni N intero positivo, per ogui x reale e per ogni $y \leq 0$

$$\left| \sum_{n=1}^{n=N} \frac{\sin nx}{n} \mathrm{Ch}\, ny \right| \leqq 2Ae^{-Ny}$$

e quindi, per ogni $s = \sigma + i\tau$ $(\sigma < 0)$, si ha

$$\left| \sum_{\substack{n=-N_p \\ n \neq 0}}^{n=+N_p} \frac{1}{n} e^{ns/N_p^2} \right| =$$

$$= 2 \left| \sum_{n=1}^{n=N_p} \frac{1}{n} \left(i \sin \frac{n\tau}{N_p^2} \mathrm{Ch} \frac{n\sigma}{N_p^2} + \cos \frac{n\tau}{N_p^2} \mathrm{Sh} \frac{n\sigma}{N_p^2} \right) \right| \leqq$$

$$\leqq 2Ae^{-\sigma/N_p} + 2 \sum_{n=1}^{n=N_p} \frac{1}{n} \mathrm{Sh} \frac{-n\sigma}{N_p^2} = 2Ae^{-\sigma/N_p} + F_p(\sigma).$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} |f(s)| \leqq 2A \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-(p+1)\sigma}}{(\log N_p)^2} + \sum_{N_p < -\sigma} \frac{F_p(\sigma)}{(\log N_p)^2} e^{-p\sigma} + \\ + \sum_{N_p \geqq -\sigma} \frac{F_p(\sigma)}{(\log N_p)^2} e^{-p\sigma} = f_1(\sigma) + f_2(\sigma) + f_3(\sigma). \end{aligned} \tag{2.8}$$

[10] Vedasi, p es., E. C. Titchmarsh [9], p. 42.

Essendo, per ogni $\sigma < 0$, $F_p(\sigma) < 2 \log N_p e^{-\sigma/N_p}$, si ha

$$f_1(\sigma) < 2 \sum_{N_p < -\sigma} \frac{e^{-(p+1)\sigma}}{\log N_p}$$

cioè, posto $p_0 = p_0(\sigma) = \operatorname*{Max}_{N_p < -\sigma} p$,

$$f_2(\sigma) < 2p_0 e^{-(p_0+1)\sigma} < -2\sigma e^{\sigma^2}.$$

Infine, poichè per $0 \leqq x \leqq 1$ si ha $\operatorname{Sh} x < ex$, se $N_p \geqq \quad \sigma$ risulta

$$F_p(\sigma) < 2e \sum_{n=1}^{n=N_p} \frac{-\sigma}{N_p^2} = -2e \frac{\sigma}{N_p}$$

e, di conseguenza,

$$f_3(\sigma) < -2e\sigma \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-p\sigma}}{N_p}$$

e quindi, per il teorema di Ritt,

$$f_3(\sigma) = O(\exp \exp(-\varepsilon\sigma))$$

per ogni $\varepsilon > 0$, $\sigma \to -\infty$. Da (2.8) segue allora

$$|f(s)| = O\left(\exp \exp - \frac{(1+\varepsilon)\sigma}{2}\right) \quad \text{per ogni} \quad \varepsilon > 0,\ \sigma \to -\infty.$$

La serie (2.7) ha dunque ordine $\rho \leqq 1/2$ e, poichè per essa è $\alpha = 1$, la (2.6) non vale.

3. - Conseguenze del Teorema II.

Veniamo ora a segnalare alcuni casi particolari nei quali sono soddisfatte le condizioni del Teorema II.

Valgono i seguenti corollari.

Corollario I. - *Sia*

$$\alpha = \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\log 1/S_n}{\lambda_n \log \lambda_n} = \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\log |1/a_n|}{\lambda_n \log \lambda_n}. \tag{3.1}$$

Allora $1/\rho = \alpha$.

Infatti, nell'ipotesi (3.1) è certamente $\alpha \geqq 0$ ed esiste $\{ m_h \}$ tale che $\lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\log |1/a_{m_h}|}{\lambda_{m_h} \log \lambda_{m_h}} = \alpha$. Basta allora assumere $\mu_h = \nu_h = \lambda_{m_h}$, $\vartheta_h = \dfrac{1}{2} \operatorname{Min} (|\lambda_{m_h} - \lambda_{m_h \pm 1}|)$, per soddisfare le ipotesi del Teorema II.

Osservazione. - Se $\log n/(\lambda_n \log \lambda_n) \to 0$ per $n \to +\infty$, la (3.1) è certamente verificata ([11]): il Teorema II contiene quindi come casi particolari i teoremi di J. F. Ritt e di K. Sugimura citati nell'Introduzione.

Corollario II. - *Sia* $\alpha \geqq 0$ *ed inoltre*

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\,(\exp \exp (\delta \lambda_n \log \lambda_n))$$

per ogni $\delta > 0$, $n \to +\infty$. *Allora* $1/\rho = \alpha$.

Infatti, è sempre possibile scegliere per $\{\mu_h\}$ e $\{\nu_h\}$ due opportune successioni parziali estratte dalla successione $\{ \lambda_n \}$ in modo che sia soddisfatta (oltre alla condizione a)) la ulteriore condizione $\nu_h - \mu_h \leqq 1$ $(h = 1, 2, \ldots)$ ([12]). Basta allora assumere $\vartheta_h = \dfrac{1}{2} \operatorname{Min}\limits_{n} (|\mu_h - \lambda_n|, |\nu_h - \lambda_n|)$ $(\lambda_n \neq \mu_h, \nu_h)$ per soddisfare anche b) e c).

Per ogni coppia di numeri reali a, b $(0 \leqq a \leqq b)$ poniamo

$$A(a, b) = \sum_{a \leqq \lambda_n \leqq b} | a_n |.$$

Vale il

Corollario III. - *Sia* $\alpha \geqq 0$ *ed esistano* $\{\mu_h\}$, $\{\nu_h\}$ e $\{\vartheta_h\}$ *soddisfacenti la condizione* b) *e le condizioni*

a') $\lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\log 1/A(\mu_h, \nu_h)}{\mu_h \log \mu_h} = \alpha$;

c') $S(\lambda_n, \lambda_m) = A(\lambda_n, \lambda_m) \cdot e^{o(\lambda_n \log \lambda_n)}$, $(\mu_h - \vartheta_h \leqq \lambda_n \leqq \lambda_m \leqq \leqq \nu_h + \vartheta_h)$.

Allora $1/\rho = \alpha$.

(11) Infatti, si può sempre scegliere $\{ n_h \}$ (soddisfacente le (2.1)) in modo che sia $\underline{\lim}_{h\to+\infty} \dfrac{\log 1/a_{n_h}}{\lambda_{n_h} \log \lambda_{n_h}} = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \dfrac{\log |1/a_n|}{\lambda_n \log \lambda_n}$; dalla relazione evidente $|a_{n_h}| \leqq \operatorname{Max}\limits_{n_h \leqq n < n_{h+1}} S_n \leqq (n_{h+1} - 1) \operatorname{Max}\limits_{n_h \leqq n < n_{h+1}} |a_n|$ segue immediatamente la (3.1).

(12) Vedasi l'Osservazione 3 in calce al Teorema I.

OSSERVAZIONE. - Se $a_n > 0$ per ogni n, dalla convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ segue $\alpha \geqq 0$; le condizioni a') e c') sono evidentemente soddisfatte e quindi il Teorema II contiene come caso particolare il teorema di C. TANAKA citato nell'Introduzione (13).

Per dimostrare il Corollario III, dividiamo ogni intervallo $(\mu_h - \vartheta_h, \mu_h)$ in $\exp \mu_h^2$ intervalli parziali, ciascuno di ampiezza compresa fra $\vartheta_h/(2 \exp \mu_h^2)$ e $2\vartheta_h/\exp \mu_h^2$, in modo che i punti di divisione non coincidano con alcun λ_n. In uno almeno degli intervalli ottenuti (sia esso $(\mu'_h - \vartheta'_h, \mu'_h)$) deve essere $A(\mu'_h - \vartheta'_h, \mu'_h) \leqq A(\mu_h - \vartheta_h, \mu_h)/\exp \mu_h^2$ e quindi, se $\mu'_h - \vartheta'_h \leqq \lambda_n \leqq \mu'_h$, risulta

$$\varliminf_{n \to +\infty} \frac{\log 1/S(\mu'_h - \vartheta'_h, \lambda_n)}{\lambda_n \log \lambda_n} \geqq \varliminf_{h \to +\infty} \frac{\log 1/S(\mu'_h - \vartheta'_h, \mu'_h)}{\mu_h \log \mu_h} \geqq$$

$$\geqq \lim_{h \to +\infty} \frac{\mu_h}{\log \mu_h} + \varliminf_{h \to +\infty} \frac{\log 1/S(\mu_h - \vartheta_h, \mu_h)}{\mu_h \log \mu_h} = +\infty.$$

In modo analogo si prova l'esistenza di una successione di intervalli $(\nu'_h, \nu'_h + \vartheta''_h)$ $(\nu_h \leqq \nu'_h < \nu'_h + \vartheta''_h \leqq \nu_h + \vartheta_h)$ soddisfacenti la condizione

$$\varliminf_{n \to +\infty} \frac{\log 1/S(\nu'_h, \lambda_n)}{\lambda_n \log \lambda_n} = +\infty \qquad (\nu'_h \leqq \lambda_n \leqq \nu'_h + \vartheta''_h)$$

e si può sempre pensare che sia $\vartheta''_h = \vartheta'_h$.

Le successioni $\{\mu'_h\}$, $\{\nu'_h\}$ e $\{\vartheta'_h\}$ soddisfano la condizione c) ed è facile verificare che esse soddisfano anche la b).

Essendo $S(\mu'_h, \nu'_h) \leqq S(\mu'_h, \mu_h) + S(\mu_h, \nu_h) + S(\nu_h, \nu'_h)$, dalla definizione di α e dalle condizioni a'), b) e c') si ricava

$$\alpha \leqq \varliminf_{h \to +\infty} \frac{\log 1/S(\mu'_h, \nu'_h)}{\mu'_h \log \mu'_h} \leqq \varlimsup_{h \to +\infty} \frac{\log 1/S(\mu'_h, \nu'_h)}{\mu'_h \log \mu'_h} =$$

$$= \varlimsup_{h \to +\infty} \frac{\log 1/A(\mu'_h, \nu'_h)}{\mu'_h \log \mu'_h} \leqq \varlimsup_{h \to +\infty} \frac{\log 1/A(\mu_h, \nu_h)}{\mu_h \log \mu_h} = \alpha.$$

Allora $\{\mu'_h\}$, $\{\nu'_h\}$, $\{\vartheta'_h\}$ soddisfano anche la condizione a) e dal Teorema II segue $1/\rho = \alpha$, c. d. d.

4. - Dimostrazione del Teorema II.

Essendo, per il Teorema I, $\rho \leqq 1/\alpha$, basta dimostrare che è anche $\rho \geqq 1/\alpha$. Se $\alpha = +\infty$ ciò è ovvio; supponiamo allora $\alpha < +\infty$.

(13) Anche nella sua forma più generale ([8], Cor. IV p. 77).

Possiamo anche sempre supporre che gli intervalli $(\mu_h - \vartheta_h, \mu_h)$ e $(\nu_h, \nu_h + \vartheta_h)$ $(h = 1, 2, \ldots)$ non contengano alcun esponente λ_n. Infatti, in caso contrario, sia $\{\lambda_{n_p}\}$ $(\lambda_{n_0} < \lambda_{n_1} < \ldots)$ la successione degli esponenti λ_n interni a questi intervalli. La serie $f_1(s) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n_p} e^{-\lambda_{n_p} s}$, per la condizione c) e per il teorema I, ha ordine $\rho_1 < 1/\alpha$. Per dimostrare il Teorema II basta quindi dimostrare che la funzione $f(s) - f_1(s)$ ha ordine $\rho \geq 1/\alpha$ ([14]).

Per ogni coppia di numeri reali non negativi a, b $(a \leq b)$ e per egni numero reale τ poniamo

$$\Sigma(a, b; \tau) = \sum_{a \leq \lambda_n \leq b} a_n e^{-\lambda_n i\tau}.$$

Se a e b non coincidono con alcun esponente λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, dal teorema di PERRON ([15]) segue, per ogni $\sigma < 0$ e per ogni τ

$$\Sigma(a, b; \tau) = \Sigma(0, b; \tau) - \Sigma(0, a; \tau) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} f(s + i\tau) \frac{e^{bs} - e^{as}}{s} ds \ ([16]).$$

In particolare, per ogni u soddisfacente la limitazione $0 < u < \vartheta_h$ risulta

$$\Sigma(\mu_h - \vartheta_h + u, \nu_h + u; \tau) = \Sigma(\mu_h, \nu_h; \tau) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} f(s + i\tau) \frac{e^{(\nu_h + u)s} - e^{(\mu_h - \vartheta_h + u)s}}{s} ds$$

da cui, integrando rispetto ad u nell'intervallo $(0, \vartheta_h)$ ([17]) si ottiene

$$\vartheta_h \Sigma(\mu_h, \nu_h; \tau) = I_h \tag{4.1}$$

dove

$$I_h = I_h(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} f(s + i\tau) ds \int_0^{\vartheta_h} \frac{e^{(\nu_h + u)s} - e^{(\mu_h - \vartheta_h + u)s}}{s} du =$$

([14]) Infatti, se $f_1(s)$, $f_2(s)$ hanno ordine, rispettivamente ρ_1 e ρ_2 con $\rho_2 > \rho_1$, la funzione $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$ ha ordine $\rho = \rho_2$.

([15]) Vedasi ad es. E. LANDAU [3] teor. 49 p. 831; G. VALIRON [11] p. 9.

([16]) $s = \sigma + it$ e l'integrale inteso nel senso di integrale principale secondo CAUCHY.

([17]) Un analogo artificio è stato usato da E. LANDAU [2].

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(s+i\tau)\,\frac{(e^{\vartheta_h s}-1)(e^{\nu_h s}-e^{(\mu_h-\vartheta_h)s})}{s^2}\,ds.$$

Veniamo a maggiorare I_h. È facile verificare che, per ogni $\sigma < 0$ e per ogni coppia di numeri reali a, b $(a > b \geq 0)$ risulta

$$|e^{as} - e^{bs}| < \mathrm{Min}\,(2e^{b\sigma},\ (a-b)\,|s|\,e^{b\sigma})\ \text{(18)}.$$

Pertanto, posto $M(\sigma) = \sup\limits_{-\infty<\tau<+\infty} |f(\sigma+i\tau)|$, risulta

$$|I_h| < \frac{1}{\pi} M(\sigma) e^{(\mu_h-\vartheta_h)\sigma}\int_0^{+\infty} \frac{1}{|s|^2}\,\mathrm{Min}\,(2,\ \mathfrak{I}_h|s|)\cdot \mathrm{Min}\,(2,\ (\nu_h-\mu_h+\mathfrak{I}_h)|s|)dt <$$

$$< \frac{1}{\pi} M(\sigma) e^{(\mu_h-\vartheta_h)\sigma}(I_{h,1}+I_{h,2}+I_{h,3})$$

dove

$$I_{h,1} = \int_0^{2/(\nu_h-\mu_h+\vartheta_h)} \mathfrak{I}_h(\nu_h-\mu_h+\mathfrak{I}_h)dt = 2\mathfrak{I}_h,$$

$$I_{h,2} = \int_{2/(\nu_h-\mu_h+\vartheta_h)}^{2/\vartheta_h} \frac{2\mathfrak{I}_h}{|s|}\,dt < \int_{2/(\nu_h-\mu_h+\vartheta_h)}^{2/\vartheta_h} \frac{2\mathfrak{I}_h}{t}\,dt = 2\mathfrak{I}_h \log\frac{\nu_h-\mu_h+\mathfrak{I}_h}{\mathfrak{I}_h},$$

$$I_{h,3} = \int_{2/\vartheta_h}^{+\infty} \frac{4}{|s|^2}\,dt < \int_{2/\vartheta_h}^{+\infty} \frac{4}{t^2}\,dt = 2\mathfrak{I}_h.$$

Si ottiene così la seguente limitazione, valida per ogni τ e per ogni $\sigma < 0$:

$$|I_h| < \mathfrak{I}_h M(\sigma) e^{(\mu_h-\vartheta_h)\sigma}\left(2+\log\frac{\nu_h-\mu_h+\mathfrak{I}_h}{\mathfrak{I}_h}\right).$$

Da (4.1) si ricava allora

$$M(\sigma) > S(\mu_h,\ \nu_h)e^{-(\mu_h-\vartheta_h)\sigma}\Big/\left(2+\log\frac{\nu_h-\mu_h+\mathfrak{I}_h}{\mathfrak{I}_h}\right).$$

(18) Sia infatti $\sigma < 0$, $c > 0$. È ovvio che $|e^{cs}-1| < 2$. Inoltre, se $c\,|s| < 2$, si ha

$$|e^{cs}-1|^2 = e^{2c\sigma} - 2e^{c\sigma}\cos c\tau + 1 \leqq e^{2c\sigma} - 2e^{c\sigma}(1-c^2\tau^2/2) + 1 \leqq$$
$$\leqq (e^{c\sigma}-1)^2 + c^2\tau^2 < c^2\sigma^2 + c^2\tau^2 = c^2\,|s|^2.$$

Quindi $|e^{cs}-1| < \mathrm{Min}\,(2,\ c\,|s|)$. Posto $c = a - b$ ne segue la disuguaglianza in oggetto.

Di qui segue, tenendo presenti a) e b), che, per ogni $\varepsilon > 0$, $h \geq h_0(\varepsilon)$, risulta

$$\log M(\sigma) > -(\sigma + (\alpha + \varepsilon) \log \mu_h)\mu_k + \vartheta_h \sigma. \tag{4.2}$$

Poniamo $\sigma_h = -(\alpha + 3\varepsilon) \log \mu_h$. Essendo $\vartheta_k = o(\mu_h)$, da (4.2) si ottiene, per $h \geq h_1(\varepsilon)$

$$\log M(\sigma_h) > \varepsilon \mu_h \log \mu_k$$

e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\rho = \overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\log \log M(\sigma)}{-\sigma} \geq \overline{\lim_{h \to -\infty}} \frac{\log \log M(\sigma_h)}{-\sigma_h} = \frac{1}{\alpha + 3\varepsilon}$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, si ricava $\rho \geq 1/\alpha$ c. d. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. G. Azpeitia, *A remark on the Ritt order of entire functions defined by Dirichlet series*, «Proc. Amer. Math. Soc.» **12** (1961), 722-723.

[2] E. Landau, *Über die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen*, «Math. Z.» **11** (1921), 317-318.

[3] — —, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, II, New York 1953.

[4] L. Neder, *Über die Lage der Konvergenzabszissen einer Dirichletschen Reihe zur Beschränktheitsabszisse ihrer Summe*, «Ark. Mat. Astr. Fys.» **16** n. 20 (1922), 1-15.

[5] J. F. Ritt, *On certain points in the theory of Dirichlet series*, «Amer. J. Math.» **50** (1928), 73-86.

[6] D. Roux, *Una osservazione sulle serie di Dirichlet a coefficienti positivi*, «Boll. Un. Mat. Ital.» (3) **21** (1966), 119-123.

[7] K. Sugimura, *Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen*, «Math. Z.» **29** (1929), 264-277.

[8] C. Tanaka, *Note on Dirichlet series* (V): *On the integral functions defined by Dirichlet series* (I), «Tôhoku Math. J.» (2) **5** (1953), 67-78.

[9] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford 1952.

[10] G. Valiron, *Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet*, «Bull. Soc. Math. France» **52** (1924), 166-174.

[11] — —, *Théorie générale des séries de Dirichlet*, «Mémor. Sci. Math.» **17**, Paris 1926.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 1° ottobre 1966