Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Sulle trasformazioni puntuali fra più di due spazi a n dimensioni. Nota I.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.1, p. 57–67.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_1_57_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Sulle trasformazioni puntuali fra più di due spazi a n dimensioni.

NOTA I

MARIO VILLA (Bologna)

Sunto. - *In una corrispondenza puntuale* $\mathcal{C}$ *fra tre spazi proiettivi a* n *dimensioni* ($n>1$), *considerata una terna ordinaria* O_1, O_2, O_3 *di punti corrispondenti, in generale, a due* E_2 *di centri* O_1, O_2 *non corrisponde in* $\mathcal{C}$ *un* E_2. *Orbene in questa Nota si ricercano le terne di* E_2 *corrispondenti in* $\mathcal{C}$. *Tra siffatte terne si considerano poi quelle per cui uno dei tre* E_2 *è di flesso, pervenendo così, in ciascuno dei tre spazi, a* 3^n *direzioni particolari (se non sono indeterminate) chiamate caratteristiche o inflessionali e a* $2 \cdot 3^{n-1}$ E_2 *intrinsecamente determinati. Si ottengono anche altri* E_2 *intrinsecamente determinati da* $\mathcal{C}$ *e una proprietà di essi.*

1. - In un lavoro recente ho stabilito alcune proprietà relative alle trasformazioni puntuali fra tre piani proiettivi [1], proprietà suscettibili di varie estensioni.

La Nota presente e le altre che la seguiranno con lo stesso titolo, costituiscono una prima serie di queste estensioni, non sempre immediate.

In questa Nota si considerano le trasformazioni puntuali $\mathcal{C}$ fra tre spazi proiettivi S_1, S_2, S_3 a n dimensioni ($n>1$). Se O_1, O_2, O_3 è una terna regolare di punti corrispondenti in $\mathcal{C}$, dato in S_1 un E_2 di centro O_1 e dato in S_2 un E_2 di centro O_2, ad essi non corrisponde in $\mathcal{C}$, in generale, un E_2 (di centro O_3). Orbene, la presente Nota è rivolta alla ricerca delle terne di E_2 corrispondenti in $\mathcal{C}$ e il risultato a cui si perviene è particolarmente semplice in quanto *ad ogni direzione uscente da* O_1 (*ad esempio*) *corrisponde una ben determinata terna di* E_2 *siffatti.* Il risultato si trova nel n. 4 ed è preceduto da quello (n. 3) riguardante le terne di E_1 corrispondenti in $\mathcal{C}$.

Si passa poi (nn. 5, 6) a studiare quelle direzioni uscenti da O_1 per cui almeno uno dei tre E_2 relativi è di flesso. Si trova che esistono per O_1 (ad esempio) tre gruppi di 3^{n-1} direzioni per cui

(1) M. VILLA, *Sulle corrispondenze fra tre piani*, Annali di Matematica pura e applicata, Ser. IV, Vol. LXXI, p. 351 (1966).

uno dei tre E_2 determinati da una di tali direzioni è di flesso (le direzioni per cui è di flesso l'E_2 di S_1, o di S_2, o di S_3 costituendo uno stesso gruppo). In relazione a queste direzioni (che per ovvi motivi chiamo *caratteristiche* o *inflessionali*) si ottengono così complessivamente $2\cdot 3^n$ E_2 (in generale non di flesso) intrinsecamente determinati dalla corrispondenza $\mathcal{C}$ ([2]).

Se, ad esempio, T_2 è la trasformazione fra gli spazi S_1, S_3 nella quale si corrispondono le coppie di punti che assieme al punto O_2, costituiscono terne di punti corrispondenti in $\mathcal{C}$, si considerano (n. 7) le direzioni caratteristiche di T_2 uscenti da O_1 e gli E_2 relativi corrispondenti in $\mathcal{C}$ (due dei quali, si dimostra, sono corrispondenti nella T_2 stessa). Si perviene così a nuovi E_2 intrinsecamente determinati dalla corrispondenza $\mathcal{C}$ ([3]) ([4]).

2. – Sia $\mathcal{C}$ una trasformazione (o corrispondenza) puntuale fra tre spazi proiettivi, a n dimensioni ($n > 1$), S_1, S_2, S_3 e sia O_1, O_2, O_3 una terna di punti corrispondenti.

Assumiamo O_1, O_2, O_3 come origini delle coordinate proiettive (non omogenee) in S_1, S_2, S_3 e indichiamo rispettivamente con $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tali coordinate in S_1, S_2, S_3.

([2]) Le direzioni caratteristiche possono però anche essere indeterminate.

([3]) Per $n = 2$, si ritrovano risultati del lavoro citato nella ([1]).

([4]) Sulle trasformazioni puntuali fra più di due spazi proiettivi ho pubblicato recentemente anche il lavoro: M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali fra tre o più spazi lineari*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Ser. III, Vol. XX, p. 87 (1965). L'oggetto di tale lavoro è però completamente diverso da quello del lavoro attuale.

In quel lavoro ho considerato certe corrispondenze che ho chiamato trasformazioni di GODEAUX (ma che è meglio fosse chiamare *trasformazioni di Godeaux generalizzate*), le quali rientrano come caso particolarissimo in quelle trasformazioni fra p spazi proiettivi a n dimensioni ($p > 2$, $n > 1$) che chiamerò *trasformazioni cremoniane generalizzate*.

Una trasformazione T fra p spazi proiettivi S_n si dirà *cremoniana generalizzata* ($p > 2$, $n > 1$) quando, dati arbitrariamente $p - 2$ punti in $p - 2$ qualunque dei p spazi dati (un punto in ciascun spazio), è cremoniana la corrispondenza fra i due spazi rimanenti in cui si corrispondono coppie di punti che assieme ai $p - 2$ punti dati costituiscono p^{uple} di punti corrispondenti in T.

Il caso più semplice di trasformazioni cremoniane generalizzate si ha ovviamente quando le trasformazioni cremoniane (ordinarie) suddette sono tutte omografie. Sono trasformazioni che rientrano pure, come caso particolare, nelle trasformazioni di GODEAUX generalizzate.

La trasformazione $\mathcal{C}$ sarà rappresentata da equazioni del tipo

$$z_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n;\ y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1}$$

dove le funzioni f_i si suppongono sviluppabili in serie di potenze nell'intorno dei punti $O_1(0, 0, \dots, 0)$, $O_2(0, 0, \dots, 0)$ (5).

Sia T_1 la trasformazione fra gli spazi S_2, S_3 nella quale si corrispondono le coppie di punti (dei due spazi) che assieme al punto O_1 costituiscono terne di punti corrispondenti nella data trasformazione $\mathcal{C}$. Analogamente sia T_2 la trasformazione fra gli spazi S_1, S_3 nella quale si corrispondono le coppie di punti che assieme al punto O_2 costituiscono terne di punti corrispondenti nella data trasformazione $\mathcal{C}$. Supporremo che la coppia (O_2, O_3) sia regolare per T_1 e che la coppia (O_1, O_3) sia regolare per T_2 (6).

Assumiamo nello spazio S_1 come rette fondamentali uscenti da O_1, n fra le $2^n - 1$ rette caratteristiche per O_1 della T_2 e inoltre assumiamo come retta $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ un'ulteriore retta caratteristica per O_1 della T_2. Analogamente assumiamo nello spazio S_3 come rette fondamentali uscenti da O_3 le rette caratteristiche per O_3 della T_2, corrispondenti rispettivamente alle rette fondamentali analoghe nella proiettività $\mathcal{F}_2$ subordinata, fra le stelle di direzioni di centri O_1, O_3, dalla T_2; inoltre assumiamo come retta $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ la retta caratteristica per O_3 della T_2 corrispondente nella

(5) Più generalmente una corrispondenza fra i tre spazi S_1, S_2, S_3 è rappresentata da equazioni del tipo

$$\begin{array}{c} F_1(x_1, \dots, x_n;\ y_1, \dots, y_n;\ z_1, \dots, z_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n;\ y_1, \dots, y_n;\ z_1, \dots, z_n) = 0 \end{array} \tag{2}$$

dove le $F_1, F_2, \dots, F_n$ ammettono derivate parziali prime continue. Supposto lo jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial z_1} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

nell'intorno della terna di punti corrispondenti O_1, O_2, O_3, le (2) possono scriversi nella forma (1).

(6) In queste ipotesi diremo che la terna (O_1, O_2, O_3) è *regolare* per $\mathcal{C}$.

$\mathcal{T}_2$ alla $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (7). Assumiamo ancora nello spazio S_1 come punti fondamentali, in coordinate omogenee, $(1, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, 0, \dots, 1, 0)$ del riferimento proiettivo, i punti corrispondenti, nelle proiettività caratteristiche (relative a T_2) fra le suddette coppie di rette caratteristiche corrispondenti nella $\mathcal{T}_2$, dei punti fondamentali analoghi di S_3; assumiamo inoltre come punto $(-1, -1, \dots, -1, 1)$ di S_1 il punto corrispondente, nella proiettività caratteristica (relativa a T_2) fra la coppia di rette caratteristiche $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, del punto $(1, 1, \dots, 1, 0)$ di S_3. Assumiamo infine come punto unità in S_3 il punto corrispondente nella proiettività caratteristica (relativa a T_2) fra la coppia di rette caratteristiche $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, del punto $(1, 1, \dots, 1, 0)$ di S_1. Nello spazio S_2 assumiamo come rette fondamentali uscenti da O_2 le rette rispettivamente corrispondenti alle rette fondamentali analoghe nella proiettività $\mathcal{T}_1$ subordinata fra le stelle di direzioni di centri O_2, O_3 dalla T_1; ancora nello spazio S_2 assumiamo come retta $y_1 = y_2 = \dots = y_n$ la retta corrispondente alla retta $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ nella proiettività $\mathcal{T}_1$ fra le stelle di centri O_2, O_3.

Con questa scelta dei riferimenti proiettivi negli spazi S_1, S_2, S_3, le equazioni (1) della trasformazione possono scriversi (8)

$$z_i = x_i + \beta y_i + \sum_{p,q} a^i_{pq} x_p x_q + \sum_{p,q} d^i_{pq} y_p y_q + \sum_{p,q} g^i_{pq} x_p y_q + [3], \tag{3}$$

essendo β, le a, d, g costanti, indicando con $[3]$ l'insieme dei termini nelle x, y di grado superiore al secondo e dove

$$\beta \neq 0 \ (9),$$

$$\begin{aligned} & a^i_{pp} = 0 \quad (\text{sia per} \quad i \neq p \quad \text{che per} \quad i = p), \\ & \sum_{p,q} a^i_{pq} = -1 \quad (\text{per} \quad p \neq q), \\ & a^i_{pq} = a^i_{qp} \qquad\qquad (i, p, q = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \tag{4}$$

(7) Si suppone che le direzioni caratteristiche di T_2 uscenti da O_1 non siano indeterminate e che fra di esse ve ne siano $n+1$ distinte $(n+1 \leq \leq 2^n - 1)n$ qualunque delle quali non appartenenti ad un iperpiano.

(8) Si veda: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, Nota I, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Ser. VIII, Vol. IV, p. 61 (1948).

(9) Essendo la coppia (O_2, O_3) regolare per T_1 è $\beta \neq 0$.

Posto

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \sum_{p,q} a^i_{pq} x_p x_q, \\
&D_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv \sum_{p,q} d^i_{pq} y_p y_q, \\
&G_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv \sum_{p,q} g^i_{pq} x_p y_q,
\end{aligned}
$$

le (3) possono scriversi

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
z_i = x_i + \beta y_i + A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + D_i(y_1, y_2, \dots, y_n) + \\
+ G_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) + [3] \\
(i = 1, 2, \dots, n).
\end{aligned}
$$

3. - Si osservi che, dato in S_1 un E_1 di centro O_1 e dato in S_3 un E_1 di centro O_3, ad essi non corrisponde in $\mathcal{C}$, in generale, un E_1 (di centro O_2).

Si ha:

Dato in S_1 un E_1 di centro O_1 e dato in S_3 un E_1 di centro O_3, ad essi corrisponde in $\mathcal{C}$ un E_1 (di centro O_2) quando e solo quando si corrispondono nella proiettività $\mathcal{S}_2$; inoltre l'E_1 di centro O_2 corrispondente in $\mathcal{C}$ è quello corrispondente all'E_1 di centro O_3 nella proiettività $\mathcal{S}_1$.

Consideriamo infatti negli spazi S_1, S_2, S_3 gli E_1 rispettivamente di equazioni

$$
(7)\qquad x_j = p_j x_1, \qquad y_j = q_j y_1, \qquad z_j = m_j z_1 \qquad (j = 2, 3, \dots, n).
$$

Nelle (3) tenendo conto solo dei termini di 1° grado, si ottiene

$$
(3')\qquad z_i = x_i + \beta y_i .
$$

Sostituendo nelle (3') alle x_j, y_j le espressioni date dalle (7) si ottengono le

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&z_1 = x_1 + \beta y_1 \\
&z_j = p_j x_1 + \beta q_j y_1 \qquad (j = 2, 3, \dots, n).
\end{aligned}
$$

Sostituendo nella terza delle (7) alle z_1, z_j le espressioni (8), si ottengono le

$$
(9)\qquad p_j x_1 + \beta q_j y_1 = m_j (x_1 + \beta y_1).
$$

Le (9) sono identità in x_1, y_1 quando e solo quando sussistono le relazioni $p_j = m_j$, $\beta q_j = \beta m_j$, ossia, essendo $\beta \neq 0$, $p_j = q_j = m_j$.

I tre E_1 debbono dunque corrispondersi nelle proiettività $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_1$. L'asserto è così dimostrato.

4. - Dato in S_1 un E_2 di centro O_1 e dato in S_2 un E_2 di centro O_2, ad essi non corrisponde in $\mathcal{C}$, in generale, un E_2 (di centro O_3). Dal risultato del n. 3 segue che affinchè ciò avvenga è innanzitutto necessario che i tre E_1 dei tre E_2 si corrispondano in $\mathcal{C}$

Ma di più sussiste il teorema:

Per ogni terna di direzioni corrispondenti in $\mathcal{C}$ l_1, l_2, l_3 *è determinata un'unica terna di* E_2, *di centri* O_1, O_2, O_3 *e ivi tangenti rispettivamente a* l_1, l_2, l_3, *corrispondenti in* $\mathcal{C}$.

Consideriamo infatti negli spazi S_1, S_2, S_3 gli E_2 rispettivamente di equazioni

$$x_j = p_j x_1 + r_j x_1^2, \qquad y_j = q_j y_1 + t_j y_1^2, \qquad z_j = m_j z_1 + s_j z_1^2 \qquad (j = 2, 3, \ldots, n). \tag{10}$$

Sostituendo nelle (6) alle x_j, y_j le espressioni date dalle (10) si ottengono le

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + \beta y_1 + A_1(1, p_2, \ldots, p_n)x_1^2 + D_1(1, q_2, \ldots, q_n)y_1^2 + \\ &\quad + G_1(1, p_2, \ldots, p_n;\ 1, q_2, \ldots, q_n)x_1 y_1 + \ldots, \\ z_j &= p_j x_1 + \beta q_j y_1 + [r_j + A_j(1, p_2, \ldots, p_n)]x_1^2 + [\beta t_j + D_j(1, q_2, \ldots, q_n)]y_1^2 + \\ &\quad + G_j(1, p_2, \ldots, p_n;\ 1, q_2, \ldots, q_n)x_1 y_1 + \ldots. \end{aligned} \tag{11}$$

Sostituendo nelle terze delle (10) alle z_1, z_j le espressioni (11), tenendo conto soltanto dei termini di grado <3 in x_1, y_1, si ottiene

$$\begin{aligned} & p_j x_1 + \beta q_j y_1 + [r_j + A_j(1, p_2, \ldots, p_n)]x_1^2 + [\beta t_j + D_j(1, q_2, \ldots, q_n)]y_1^2 + \\ &+ G_j(1, p_2, \ldots, p_n;\ 1, q_2, \ldots, q_n)x_1 y_1 = \\ &= m_j[x_1 + \beta y_1 + A_1(1, p_2, \ldots, p_n)x_1^2 + D_1(1, q_2, \ldots, q_n)y_1^2 + \\ &+ G_1(1, p_2, \ldots, p_n;\ 1, q_2, \ldots, q_n)x_1 y_1] + s_j(x_1 + \beta y_1)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Le (12) sono identità in x_1, y_1 quando e solo quando sussistono le relazioni

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
&p_j = m_j ,\\
&\beta q_j = \beta m_j ,\\
&r_j + A_j(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n) = m_j A_1(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n) + s_j ,\\
&\beta t_j + D_j(1,\, q_2 ,\, \dots ,\, q_n) = m_j D_1(1,\, q_2 ,\, \dots ,\, q_n) + \beta^2 s_j ,\\
&G_j(1,\, p_2 .\, \dots ,\, p_n ;\, 1,\, q_2 ,\, \dots ,\, q_n) =\\
&= m_j G_1(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n ;\, 1.\, q_2 ,\, \dots ,\, q_n) + 2\beta s_j .
\end{aligned}
$$

Dai primi due gruppi di relazioni (13), essendo $\beta \neq 0$, segue

$$
(14)\qquad p_j = q_j = m_j .
$$

Dall'ultimo gruppo di relazioni (13), per le (14), si ricava

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
s_j = \frac{1}{2\beta}[G_j(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n ;\, 1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n) -\\
- p_j G_1(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n ;\, 1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n)].
\end{aligned}
$$

Dal terzo gruppo di relazioni (13), per le (14) e (15), si ottiene

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
r_j = \frac{1}{2\beta}[G_j(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n ;\, 1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n) -\\
- p_j G_1(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n ;\, 1,\, p_2 ;\, \dots ,\, p_n)] -\\
- [A_j(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n) - p_j A_1(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n)].
\end{aligned}
$$

Dal quarto gruppo di relazioni (13), per le (14) e (15), si ottiene

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
t_j = \frac{1}{2}[G_j(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n ;\, 1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n) -\\
- p_j G_1(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n ;\, 1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n)] -\\
- \frac{1}{\beta}[D_j(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n) - p_j D_1(1,\, p_2 ,\, \dots ,\, p_n)].
\end{aligned}
$$

Dalle (14), (15), (16), (17) segue dunque che la terna di direzioni corrispondenti in $\mathfrak{C}$ $x_j = p_j x_1$, $y_i = p_j y_1$, $z_j = p_j z_1$ determina la terna di E_2 corrispondenti in $\mathfrak{C}$ di equazioni

$$(18)\qquad x_j = p_j x_1 + \Big\{ p_j A_1(1, p_2, \dots, p_n) - A_j(1, p_2, \dots, p_n) + \\ + \frac{1}{2\beta}[G_j(1, p_2, \dots, p_n; 1, p_2, \dots, p_n) - \\ - p_j G_1(1, p_2, \dots, p_n; 1, p_2, \dots, p_n)] \Big\} x_1^2,$$

$$(19)\qquad y_j = p_j y_1 + \frac{1}{\beta} \Big\{ p_j D_1(1, p_2, \dots, p_n) - D_j(1, p_2, \dots, p_n) + \\ + \frac{1}{2}\beta[G_j(1, p_2, \dots, p_n; 1, p_2, \dots, p_n) - \\ - p_j G_1(1, p_2, \dots, p_n; 1, p_2, \dots, p_n)] \Big\} y_1^2,$$

$$(20)\qquad z_j = p_j z_1 + \frac{1}{2\beta}[G_j(1, p_2, \dots, p_n; 1, p_2, \dots, p_n) - \\ - p_j G_1(1, p_2, \dots, p_n; 1, p_2, \dots, p_n)] z_1^2.$$

Il teorema è così dimostrato [10].

5. - Abbiamo visto che per ogni direzione per O_1 (ad esempio) esistono nei tre spazi tre E_2 ben determinati di equazioni (18), (19), (20). Ci si può chiedere: esistono direzioni per O_1 per cui almeno uno dei tre E_2 suddetti è di flesso?

A questa domanda risponde il teorema:

Esistono per O_1 (ad esempio) tre gruppi di 3^{n-1} direzioni per cui uno dei tre E_2 determinati da una di tali direzioni è di flesso; le direzioni per cui è di flesso l'E_2 di S_1, o di S_2, o di S_3 costituendo uno stesso gruppo.

Infatti affinchè sia di flesso l'E_2 di equazioni (18) dev'essere

$$(21)\qquad p_j A_1(1, p_2, \dots, p_n) - A_j(1, p_2, \dots, p_n) + \\ + \frac{1}{2\beta}[G_j(1, p_2, \dots, p_n; 1, p_2, \dots, p_n) - \\ - p_j G_1(1, p_2, \dots, p_n; 1, p_2, \dots, p_n)] = 0.$$

Essendo $j = 2, 3, \dots, n$, il sistema (21) è costituito di $n-1$ equazioni algebriche di 3° grado nelle $n-1$ incognite $p_2, \dots, p_n$ e pertanto ammette 3^{n-1} soluzioni (a meno che non siano infinite). Si hanno dunque 3^{n-1} direzioni per O_1 (a meno che non siano

(10) Va rilevato che questo teorema (come quello del n 3) ha carattere topologico.

indeterminate). Affinchè sia di flesso l' E_2 di equazioni (19) dev'essere

$$
\begin{aligned}
(22) \qquad & p_j D_1(1, p_2, \ldots, p_n) - D_j(1, p_2, \ldots, p_n) + \\
& + \frac{1}{2}\beta[G_j(1, p_2, \ldots, p_n;\ 1, p_2, \ldots, p_n) - \\
& - p_j G_1(1, p_2, \ldots, p_n;\ 1, p_2, \ldots, p_n)] = 0.
\end{aligned}
$$

Si ha quindi un altro gruppo di 3^{n-1} direzioni per O_1.

Infine affinchè sia di flesso l'E_2 di equazioni (20) dev'essere

$$
\begin{aligned}
(23) \qquad & G_j(1, p_2, \ldots, p_n;\ 1, p_2, \ldots, p_n) - \\
& - p_j G_1(1, p_2, \ldots, p_n;\ 1, p_2, \ldots, p_n) = 0
\end{aligned}
$$

che porge un ulteriore gruppo di 3^{n-1} direzioni per O_1. L'asserto è così dimostrato.

Le 3^n direzioni (21), (22), (23) si diranno *direzioni caratteristiche* (od *inflessionali*) di $\mathfrak{C}$ per l'analogia che esse presentano con le direzioni caratteristiche (od inflessionali) delle trasformazioni puntuali fra due spazi ([11]).

6. - Se $\rho_{2l}, \rho_{3l}, \ldots, \rho_{nl}$ $(l = 1, 2, \ldots, 3^{n-1})$ sono le 3^{n-1} soluzioni del sistema (21), le direzioni $x_j = \rho_{jl} x_1$ $(j = 2, \ldots, n)$ sono caratteristiche ([12]) e gli E_2 relativi di S_1 sono di flesso, mentre i relativi E_2 di S_2 e di S_3 hanno rispettivamente le equazioni

$$
\begin{aligned}
y_j = \rho_{jl} y_1 + \frac{1}{\beta}\Big\{ & \rho_{jl} D_1(1, \rho_{2l}, \ldots, \rho_{nl}) - D_j(1, \rho_{2l}, \ldots, \rho_{nl}) + \\
& + \beta[A_j(1, \rho_{2l}, \ldots, \rho_{nl}) - \rho_{jl} A_1(1, \rho_{2l}, \ldots, \rho_{nl})]\Big\} y_1^2
\end{aligned}
$$

$$
z_j = \rho_{jl} z_1 + [A_j(1, \rho_{2l}, \ldots, \rho_{nl}) - \rho_{jl} A_1(1, \rho_{2l}, \ldots, \rho_{nl})] z_1^2.
$$

([11]) Si veda: M. VILLA, op. cit. nella ([8]), p. 57. Naturalmente vari casi possono presentarsi a seconda delle coincidenze che si possono avere fra le 3^n direzioni caratteristiche di $\mathfrak{C}$ uscenti da O_1.

([12]) La rappresentazione $x_j = p_j x_1$ per le direzioni uscenti da O_1 esclude le direzioni appartenenti all'iperpiano $x_1 = 0$ che è determinato da $r - 1$ direzioni caratteristiche di T_2, uscenti da O_1 (per $n = 2$ esclude la direzione caratteristica di T_2 $x_1 = 0$) (n. 2). D'altra parte, considerando le equazioni del sistema (21) come quelle di ipersuperficie cubiche dell'S_{n-1} di coordinate (non omogenee) $p_2, \ldots, p_n$, le direzioni in discorso (per cui non vale cioè la rappresentazione $x_j = p_j x_1$) sono quelle relative agli eventuali *punti impropri* comuni alle suddette ipersuperficie cubiche.

Se $\sigma_{2l}, \sigma_{3l}, \dots, \sigma_{nl}$ $(l = 1, 2, \dots, 3^{n-1})$ sono le 3^{n-1} soluzioni del sistema (22), le direzioni $x_j = \sigma_{jl} x_1$ $(j = 2, \dots, n)$ sono caratteristiche e gli E_2 relativi di S_2 sono di flesso, mentre i relativi E_2 di S_1 e di S_3 hanno rispettivamente le equazioni

$$x_j = \sigma_{jl} x_1 + \Big\{ \sigma_{jl} A_1(1, \sigma_{2l}, \dots, \sigma_{nl}) - A_j(1, \sigma_{2l}, \dots, \sigma_{nl}) + \\ + \frac{1}{\beta^2} [D_j(1, \sigma_{2l}, \dots, \sigma_{nl}) - \sigma_{jl} D_1(1, \sigma_{2l}, \dots, \sigma_{nl})] \Big\} x_1^2,$$

$$z_j = \sigma_{jl} z_1 + \frac{1}{\beta^2} [D_j(1, \sigma_{2l}, \dots, \sigma_{nl}) - \sigma_{jl} D_1(1, \sigma_{2l}, \dots, \sigma_{nl})] z_1^2.$$

Infine se $\tau_{2l}, \tau_{3l}, \dots, \tau_{nl}$ $(l = 1, 2, \dots, 3^{n-1})$ sono le 3^{n-1} soluzioni del sistema (23), le direzioni $x_j = \tau_{jl} x_1$ $(j = 2, 3, \dots, n)$ sono caratteristiche e gli E_2 relativi di S_3 sono di flesso, mentre i relativi E_2 di S_1 e di S_2 hanno rispettivamente le equazioni

$$x_j = \tau_{jl} x_1 + [\tau_{jl} A_1(1, \tau_{2l}, \dots, \tau_{nl}) - A_j(1, \tau_{2l}, \dots, \tau_{nl})] x_1^2,$$

$$y_j = \tau_{jl} y_1 + \frac{1}{\beta} [\tau_{jl} D_1(1, \tau_{2l}, \dots, \tau_{nl}) - D_j(1, \tau_{2l}, \dots, \tau_{nl})] y_1^2.$$

Va rilevato che: *questi* $2 \cdot 3^n$ E_2 ($2 \cdot 3^{n-1}$ *su ciascun spazio*) *sono intrinsecamente determinati dalla trasformazione data* $\mathfrak{C}$.

7. – Le direzioni caratteristiche delle trasformazioni T_1, T_2 (n. 2) e della trasformazione T_3 (fra gli spazi S_1, S_2 nella quale si corrispondono le coppie di punti che assieme al punto O_3 costituiscono terne di punti corrispondenti in $\mathfrak{C}$) determinano, per il teorema del n. 4, degli E_2 che sono quindi intrinsecamente caratterizzati dalla trasformazione $\mathfrak{C}$ [13]. Consideriamo, ad esempio, la direzione caratteristica per O_1 di equazioni $x_j = 0$ $(j = 2, \dots, n)$ della T_2 (n. 2). Gli E_2 relativi a questa direzione nei tre spazi sono rispettivamente

$$x_j = \frac{1}{2\beta} g^j{}_{11} x_1^2, \tag{24}$$

[13] Naturalmente vari casi possono presentarsi a seconda delle coincidenze che si possono avere, non soltanto fra le 3^n direzioni caratteristiche di $\mathfrak{C}$ uscenti da O_1, ma anche di queste con le direzioni caratteristiche di T_2 (ad esempio).

$$y_7 = \left(\frac{1}{2} g^{J}{}_{11} - \frac{1}{\beta} d^{J}{}_{11}\right) y_1^2,$$

$$(25) \qquad z_7 = \frac{1}{2\beta} g^{J}{}_{11} z_1^2$$

come si ottiene ponendo $p_7 = 0$ nelle (18), (19), (20) e tenendo presenti le (4), (5).

Ora. si osservi che gli E_2 (24) e (25) si corrispondono nella T_2 le cui equazioni sono

$$z_i = x_i + \sum_{p,q} a^i{}_{pq} x_p x_q + [3],$$

i coefficienti a essendo legati dalle (4).

Si ha dunque:

Dei tre E_2 corrispondenti in $\mathcal{C}$ determinati da una direzione caratteristica di T_2 (ad esempio) due si corrispondono nella T_2 stessa [14].

Pervenuto alla Segreteria dell' U. M. I.
il 26 novembre 1966

[14] I vari elementi geometrici introdotti in questa Nota consentirebbero (sia nel caso proiettivo, che in quello affine) una ulteriore determinazione intrinseca dei riferimenti nei tre spazi e quindi una semplificazione nelle equazioni (3) della trasformazione $\mathcal{C}$, nonchè la determinazione e l'interpretazione geometrica degli invarianti del 1° e del 2° ordine della $\mathcal{C}$, ma ciò qui non vien fatto.