Bollettino Unione Matematica Italiana

Piero Bonera

La geometria d'una rete generica di quadriche di S_r.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.1, p. 68–72.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_1_68_0>

La geometria d'una rete generica di quadriche di S_r.

PIERO BONERA (Bologna) (*)

Sunto. - *Nella presente Nota, premessa qualche considerazione introduttiva, si enunciano alcuni risultati, che, tra gli altri, son forse i più significativi e che troveranno posto in una Nota successiva, corredati dalle rispettive dimostrazioni.*

1. - Nello studio di una rete di quadriche di S_r conviene dapprima escludere che essa consti di quadriche tutte specializzate ([1]).

In tale ipotesi entro la rete (sistema lineare ∞^2) esiste un sistema algebrico ∞^1 (non lineare) di quadriche specializzate.

Lo specializzarsi (almeno) due volte impone ad una quadrica *tre* condizioni e quindi una rete non conterrà, di regola, quadriche specializzate due (o più) volte.

Allora il luogo dei vertici dei coni della rete sarà una *curva* algebrica, Θ, che, com'è noto, dicesi jacobiana della rete.

La Θ occupa un posto importante nello studio della rete, insieme colla *varietà base*, la quale è una V_{r-3}^8, quando si escluda l'esistenza di varietà V_{r-2} comuni a tutte le quadriche della rete.

Si può dimostrare che la curva Θ è di ordine:

$$\binom{r+1}{2}.$$

Infatti, se è:

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0$$

l'equazione della quadrica variabile nella rete, agevolmente risulta che la jacobiana della rete stessa è la varietà che annulla i

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca N. 26 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

([1]) In S_r son esempi di reti irriducibili di quadriche tutte specializzate le reti genericamente subordinate dei sistemi (lineari) dotati di due spazi base sghembi S_{k-1} e S_{r-k}, essendo $k = 2, \dots, \frac{r}{2}$ o $k = 2, \dots, \frac{r-1}{2}$, secondo che r è pari o dispari.

Cfr. P. BONERA, *Dei sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente* (Boll. U.M.I., 1966, (3), Vol. XXI, Nota II).

minori di terzo ordine della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_{r+1}} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_{r+1}} & \frac{\partial Q_3}{\partial x_{r+1}} \end{matrix} \right\|$$

Ciò premesso, si giunge subito alla detta determinazione dell'ordine ([2]).

Ma questo potrebbe pure determinarsi più agevolmente sfruttando le seguenti considerazioni, utili anche sotto altri aspetti.

Interpretate le λ_1, λ_2, λ_3 come coordinate proiettive omogenee di punto in un piano π, nasce una proiettività tra le quadriche della rete e i punti-imagine in π.

In particolare, all'∞^1 delle quadriche specializzate corrisponderà in π una curva-imagine, Θ', che, di regola, sarà riferita biunivocamente al luogo dei vertici, cioè alla jacobiana Θ.

Sempre escludendo (com'è implicito nella considerazione della curva Θ) quadriche specializzate più di due volte, le eventuali eccezioni nascono in un senso dalla presenza di quadriche due volte specializzate, al punto-imagine di una di esse sulla Θ' corrispondendo sulla Θ tutti i punti della retta-vertice, e nell'altro senso dalla presenza di fasci di coni a vertice comune, al punto genericamente variabile sulla retta-imagine di un tale fascio corrispondendo sulla Θ costantemente il vertice comune.

Poichè un fascio genericamente subordinato della rete possiede $r+1$ quadriche specializzate, segue che la curva Θ' è d'ordine $r+1$.

Ma la Θ', come meglio si assoderà, è priva, in generale, di punti doppi, onde essa è irriducibile e di genere:

$$p = \binom{r}{2}.$$

2. – Per stabilire che la Θ' è, di regola, priva di punti doppi si può procedere nel modo seguente.

Se il sistema lineare ∞^R, con:

$$R = \frac{r(r+3)}{2},$$

([2]) C. SEGRE, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti....* (R. Accad. Lincei, 9 (5). 1900).

di tutte le quadriche di S_r si riferisce proiettivam spazio lineare S_R, in questo il luogo dei punti-imagine (driche specializzate di S_r sarà un'ipersuperficie V_{R-1}^{r+1}.

Poichè una quadrica specializzata due volte c volte almeno tra le quadriche specializzate di un fascio onten-ga (precisamente due volte per quello che la con nerica-mente), il relativo punto-imagine sarà doppio per

Analogamente si stabilisce che il punto-imagir a qua-drica più di due volte specializzata ha multiplicità (e che quello di una non specializzata è semplice).

Dunque, la V_{R-1}^{r+1} possiede una V_{R-3} doppia (... ...i non occorre conoscere l'ordine).

Il piano π, imagine di una rete (al solito di quadriche non tut-te specializzate), taglia V_{R-1}^{r+1} in una curva d'ordine $r+1$, la Θ' del num. 1.

Ebbene, tale Θ' può presentare un punto doppio, solo quando si avveri una delle due seguenti circostanze:

I. - Il piano π si appoggia alla V_{R-3} doppia;

II. - Il piano π è tangente alla V_{R-1}^{r+1} in un punto semplice.

Ora, se π è generico, la I. non si avvera (in S_r una data V_{r-3} e un S_2 generico non avendo punti comuni); e neppure si avvera la II. (essendo ∞^{3R-7} gli S_2 tangenti alla V_{R-1}^{r+1} e, invece, ∞^{3R-6} gli S_2 di S_R).

Dunque, se π è generico, cioè se la rete è generica, la Θ' è priva di punti doppi.

Allora, non possedendo la rete quadriche due volte specializza-te, nè possedendo Θ' componenti rettilinee, non possono presentarsi eccezioni nel riferimento biunivoco tra Θ e Θ'.

Pertanto, se (come si supporrà) la rete è generica, *la curva Θ è irriducibile e di genere*:

$$p = \binom{r}{2}.$$

3. - La curva Θ' è stata utilizzata la prima volta da HESSE nel caso $r = 3$, ponendo in relazione le reti di quadriche dello spazio ordinario con la quartica piana.

Si ha così un metodo (detto metodo di HESSE) per lo studio delle 28 bitangenti della qnartica piana (3).

Esso è stato poi utilizzato per $r = 4$ da EDGE (4).

4. - *La varietà* V^8_{r-3} *è normale in* S_r $(r > 3)$, giacchè la sezione con un S_4 generico è la curva canonica del genere cinque.

Se la varietà V^8_{r-3} e la curva Θ (prive di punti comuni) hanno una corda comune, questa è base d'un fascio della rete e perciò la retta-imagine di tale fascio è bitangente a Θ'; e inversamente.

Allora, calcolando il numero dei punti doppi della proiezione piana generica di Θ, si può giungere al risultato:

La curva Θ' *possiede*:

$$\frac{1}{2}(r^2-1)(r-2)(r+4)$$

bitangenti.

Utilizzando la proiettività posta tra le quadriche della rete e i punti-imagine in π si può dimostrare che:

I punti di π, *che corrispondono a quelli d'una sezione iperpiana generica della curva* Θ, *son punti di contatto* (*semplice*) *della curva* Θ' *con una curva d'ordine* r, γ, *detta «curva di contatto»;* e che:

I punti di contatto di due curve γ *appartengono ad una curva d'ordine* r.

Se, poi, si considera il luogo dei punti coniugati d'un generico iperpiano di S_r, rispetto alle singole quadriche della rete, si può dimostrare che:

In π, il sistema lineare delle curve d'ordine $2r$, che passano doppiamente per i punti di contatto d'una curva γ e semplicemente per i punti comuni ad una conica generica e alla curva Θ', segna su quest'ultima la *serie canonica;*

(3) L. O. HESSE, *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 49, 1855, p. 279-332, oppure Gesammelte Werke, München 1897, p. 345-404).

C. ROSATI, *Alcune considerazioni intorno al metodo di Hesse* (Giornale di Matematiche, 38, 1900, p. 165-170).

(4) W. L. EDGE, *The geometry of a net of quadrics in four-dimensional space* (Acta Mathematica, 64, 1935, p. 185-244).

e che:

In π, una curva d'ordine $2r$, che passa doppiamente per i punti di contatto d'una curva γ, sega ulteriormente la curva Θ' nei punti comuni a questa e ad una curva d'ordine r.

Inoltre si può riconoscere, mediante considerazioni geometriche dirette, che:

Lo spazio polare d'un punto della curva Θ, rispetto alla rete, è un S_{r-2}, σ, p-secante la curva stessa;
e che:

Gli spazi σ tangenti alla curva Θ son in numero di:

$$4p(p-1).$$

Quest'ultimo risultato può ottenersi altresì applicando una nota formula di SCHUBERT [5].

Infine si aggiunga, come emerge da considerazioni di Geometria sulla curva algebrica, che:

La curva Θ è normale (in S_r) e non giace in alcuna quadrica di S_r.

*Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I.
il 12 giugno 1966*

[5] Cfr., ad es., F. SEVERI, Padova, Atti 24, 137 (1908)