Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Pezzana

sulle trasformazioni puntuali piane che si possono iperosculare in ogni coppia regolare con una trasformazione cubica. Nota II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.1, p. 73–82.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_1_73_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Sulle trasformazioni puntuali piane che si possono iperosculare in ogni coppia regolare con una trasformazione cubica

Mario Pezzana (Bologna)

Nota II

Sunto. - *In questo lavoro si trovano le equazioni di tutte le trasformazioni puntuali piane che si possono iperosculare in ogni coppia regolare di punti corrispondenti (a direzioni caratteristiche distinte), con una trasformazione cubica e si dà una costruzione geometrica delle trasformazioni stesse.*

5. Consideriamo ora il caso di b non identicamente nullo. Allora la forma $\omega_1 - 2\omega_2$ sarà un differenziale esatto. Ponendo $\omega_1 = \alpha du$, $\omega_1 - 2\omega_2 = dv$, $2a + b = c$, le (14) danno i sistemi differenziali

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\left(c + \dfrac{1}{4}\right)\alpha x + \alpha x_1 + \dfrac{1}{2}\alpha x_2 \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \left(\dfrac{1}{3}b + \dfrac{1}{12}\right)x - \dfrac{1}{2}x_2 \\[2mm] \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \left(\sigma - \dfrac{1}{4}b - \dfrac{1}{8}\right)\alpha x + 2c\alpha x_1 + \left(\dfrac{3}{2}c - b + \dfrac{1}{4}\right)\alpha x_2 \\[2mm] \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \left(\dfrac{1}{4}b + \dfrac{1}{8}\right)x - \left(\dfrac{2}{3}b + \dfrac{1}{6}\right)x_1 - \left(\dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{4}\right)x_2 \\[2mm] \dfrac{\partial x_2}{\partial u} = -\dfrac{1}{8}\alpha x + \dfrac{1}{2}\alpha x_1 - \left(c - \dfrac{1}{4}\right)\alpha x_2 \\[2mm] \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{8}x + \left(\dfrac{1}{3}b + \dfrac{1}{12}\right)x_2 \end{cases}$$

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial u} = -\left(c - \dfrac{1}{4}\right)\alpha y + \alpha y_1 + \dfrac{1}{2}\alpha y_2 \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial v} = \left(\dfrac{1}{3}b - \dfrac{1}{12}\right)y - \dfrac{1}{2}y_2 \\[2mm] \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = \left(\sigma + \dfrac{3}{2}c - \dfrac{5}{4}b - \dfrac{1}{8}\right)\alpha y + 2c\alpha y_1 + \left(\dfrac{3}{2}c - b - \dfrac{1}{4}\right)\alpha y_2 \\[2mm] \dfrac{\partial y_1}{\partial v} = -\left(\dfrac{1}{4}b - \dfrac{1}{8}\right)y - \left(\dfrac{2}{3}b - \dfrac{1}{6}\right)y_1 - \left(\dfrac{1}{2}b - \dfrac{1}{4}\right)y_2 \\[2mm] \dfrac{\partial y_2}{\partial u} = -\dfrac{1}{8}\alpha y - \dfrac{1}{2}\alpha y_1 - \left(c + \dfrac{1}{4}\right)\alpha y_2 \\[2mm] \dfrac{\partial y_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{8}y + \left(\dfrac{1}{3}b - \dfrac{1}{12}\right)y_2 . \end{cases}$$

Dalle (38), imponendo le condizioni di integrabilità per le prime due e le ultime due ed eliminando x_1, x_2, si ha

$$(40)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\alpha_v}{\alpha} - b\right) x_u = \left(\alpha c_v + \alpha bc + \frac{1}{3} b_u\right) x \\ &\left[(c\alpha)_v + \frac{1}{3} b_u\right]\left[x_v - \left(\frac{1}{3} b - \frac{1}{6}\right) x\right] = 0. \end{aligned}$$

Analogamente dalle (39) si ha

$$(41)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\alpha_v}{\alpha} - b\right) y_u = \left(\alpha c_v + \alpha bc + \frac{1}{3} b_u\right) y \\ &\left[(c\alpha)_v + \frac{1}{3} b_u\right]\left[y_v - \left(\frac{1}{3} b + \frac{1}{6}\right) y\right] = 0. \end{aligned}$$

Dalle seconde delle (40) e (41) si ha che

$$(42)\qquad (c\alpha)_v + \frac{1}{3} b_u = 0,$$

perchè altrimenti A coincide con A_2 e B con B_2, come mostrano le seconde delle (38) e delle (39).

Anche il caso $\frac{\alpha_v}{\alpha} - b \neq 0$; $(c\alpha)_v + \frac{1}{3} b_u = 0$ è da scartare, perchè la prima delle (40) diverrebbe $x_u = - c\alpha x$, e ciò è assurdo, perchè la prima delle (38) allora esige che A, A_1, A_2 siano allineati. L'analogo succederebbe per B, B_1, B_2.

6. Restano perciò le equazioni (42) e

$$(43)\qquad \frac{\alpha_v}{\alpha} = b.$$

Posto allora $b = \psi_v$, con eventuale cambiamento del parametro u, si ottiene

$$(44)\qquad \alpha = e^{\psi}.$$

La (42) diviene

$$c_v e^{\psi} + c\psi_v e^{\psi} + \frac{1}{3} \psi_{uv} = 0,$$

che, integrata rispetto a c, dà

$$c = -\frac{1}{3}\psi_u e^{-\psi} + \varphi e^{-\psi} \tag{45}$$

con φ funzione della sola u.

Tenendo conto delle (44) e (45), dalle (38) e (39) si traggono i sistemi differenziali

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \left(\frac{2}{3}\psi_u + \varphi\right)x_u + \left(2\psi_v - \frac{1}{2}\right)e^{2\psi}x_v + \tau x \\ x_{uv} &= \left(\frac{1}{3}\psi_{uv} - \frac{1}{9}\psi_u\psi_v + \frac{1}{3}\varphi\psi_v + \frac{1}{18}\psi_u - \frac{1}{6}\varphi\right)x + \left(\frac{1}{3}\psi_v - \frac{1}{6}\right)x_u + \left(\frac{1}{3}\psi_u - \varphi\right)x_v \\ x_{\iota v} &= \left(\frac{1}{3}\psi_{vv} - \frac{1}{9}\psi_v^2 - \frac{1}{18}\psi_v - \frac{1}{18}\right)x + \left(\frac{3}{2}\psi_v + \frac{1}{6}\right)x_v \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} y_{uu} &= \left(\frac{2}{3}\psi_u + \varphi\right)y_u + \left(2\psi_v + \frac{1}{2}\right)e^{2\psi}y_o + (\tau - \psi_v e^{2\psi})y \\ y_{uv} &= \left(\frac{1}{3}\psi_{uv} - \frac{1}{9}\psi_u\psi_v + \frac{1}{3}\varphi\psi_v - \frac{1}{18}\psi_u + \frac{1}{6}\varphi\right)y + \left(\frac{1}{3}\psi_v + \frac{1}{6}\right)y_u + \left(\frac{1}{3}\psi_u - \varphi\right)y_v \\ y_{\iota\iota} &= \left(\frac{1}{3}\psi_{vv} - \frac{1}{9}\psi_v^2 + \frac{1}{18}\psi_v + \frac{1}{18}\right)y + \left(\frac{2}{3}\psi_r - \frac{1}{6}\right)y_v \end{aligned} \tag{47}$$

dove τ è una funzione di u e v dipendente da σ.

Ponendo nella terza delle (46) $x = e^z$, essa diviene una equazione differenziale di Riccati in z_v di cui si vede subito un integrale particolare $z_\iota = \frac{1}{3}\psi_v + \frac{1}{3}$.

Si ottiene perciò l'integrale

$$x = e^{\frac{1}{3}\psi}\left(k e^{\frac{1}{3}v} + h e^{-\frac{1}{6}v}\right) \tag{48}$$

dove k e h sono funzioni della sola u.

Analogamente, ponendo nella terza delle (47) $y = e^t$, si ottiene per t_v una equazione di Riccati che ammette l'integrale particolare $t_v = \frac{1}{3}\psi_v - \frac{1}{3}$, e che perciò si integra. Si ottiene

$$y = e^{\frac{1}{3}\psi}\left(A e^{-\frac{1}{3}v} + B e^{\frac{1}{6}v}\right), \tag{49}$$

dove ancora A e B sono funzioni della sola u.

Imponendo che la (48) soddisfi la seconda delle (46) si ottiene

$$k' + \varphi k = 0. \tag{50}$$

Analogamente dalla (49) e seconda delle (47) si ha

$$A' + \varphi A = 0. \tag{51}$$

Si può porre allora, senza venir meno alla generalità,

$$A = k, \tag{52}$$

poichè non può essere nè $k = 0$, nè $A = 0$, in quanto, nel primo caso si avrebbe

$$x_v = \left(\frac{1}{3}\psi_v - \frac{1}{6}\right)x$$

che porta all'assurdo per la seconda delle (38); nel secondo caso,

$$y_v = \left(\frac{1}{3}\psi_v + \frac{1}{6}\right)y$$

che porta ancora all'assurdo per la seconda delle (39).

7. Se ora si impongono le condizioni di integrabilità dei sistemi (46) e (47), posto

$$M = -\tau + \frac{1}{3}\psi_{uu} - \varphi' - \frac{14}{3}\psi_v^2 e^{2\psi} + \frac{1}{2}\psi_v e^{2\psi} - 2\psi_{vv}e^{2\psi} +$$

$$+ \frac{1}{6}e^{2\psi} - \frac{1}{9}\psi_u^2 - \frac{1}{3}\varphi\psi_u + 2\varphi^2$$

$$N = \frac{1}{3}\left(\psi_v - \frac{1}{2}\right)\tau - \tau_v + \frac{1}{3}\psi_{uuv} - \frac{1}{9}\psi_{uu}\psi_v - \frac{2}{9}\psi_{uv}\psi_u + \tag{53}$$

$$+ \frac{1}{3}\varphi'\psi_v - \frac{1}{3}\varphi\psi_{uv} + \frac{1}{18}\psi_{uu} - \frac{1}{6}\varphi' - \frac{2}{3}\psi_{uv}\psi_v e^{2\psi} +$$

$$+ \frac{2}{9}\psi_v^3 e^{2\psi} + \frac{1}{18}\psi_v^2 e^{2\psi} - \frac{5}{36}\psi_v e^{2\psi} + \frac{1}{6}\psi_{vv}e^{2\psi} + \frac{1}{36}e^{2\psi} +$$

$$+ \frac{1}{27}\psi_u^2\psi_v + \frac{1}{9}\varphi\psi_u\psi_v - \frac{1}{54}\psi_u^2 - \frac{2}{3}\varphi^2\psi_v - \frac{1}{18}\varphi\psi_u + \frac{1}{3}\varphi^2$$

si ottiene

$$(54)\qquad \begin{aligned} &Mx_v + Nx = 0\\ &My_v + \left(N - \frac{1}{3}M\right) y = 0. \end{aligned}$$

Dalle (54), per $M \neq 0$ si ottiene

$$(55)\qquad \left(\log \frac{y}{x}\right)_v = \frac{1}{3},$$

cioè

$$(56)\qquad y = \gamma x e^{\frac{1}{3}v}.$$

Ma allora il confronto della terza delle (46) e della terza delle (47) conduce all'equazione

$$x_v = \left(\frac{1}{3}b - \frac{1}{6}\right) x$$

che, per la seconda delle (38), fa coincidere A con A_2 e perciò conduce all'assurdo.

Si ottiene perciò

$$(57)\qquad \begin{cases} M = 0\\ N = 0. \end{cases}$$

Ricavando τ dalla prima delle (57) e sostituendolo nella seconda si ottiene l'equazione differenziale in ψ

$$(58)\qquad 4\psi_{vvv} + 24\psi_{vv}\psi_v + 16\psi_v^3 - \psi_v = 0.$$

La (58), ponendo $\psi_v = e^z$ diviene

$$4z_{vv} + 24zz_v + 16z^3 - z = 0.$$

Poichè in quest'ultima non figura esplicitamente la v, posto $z_v = t$, si ha

$$z_{vv} = t_z z_v,$$

perciò

$$4tt_z + 24tz + 16z^3 - z = 0.$$

Posto ancora $z^2 = x$ si ha $2zt_x = t_z$, perciò

$$8tt_x + 24t + 16x - 1 = 0.$$

Ponendo ora $\theta = t + x$ si ha

$$8\theta\theta_x - 8x\theta_x + 16\theta - 1 = 0,$$

cioè

$$8\theta - 8x + (16\theta - 1)x_\theta = 0$$

che è lineare e si può integrare. Si ha

$$x = -\frac{1}{16}(16\theta - 2) - \frac{c}{16}(16\theta - 1)^{\frac{1}{2}}$$

con c funzione della sola u.

Ricordando le posizioni fatte si ha

$$z^2 = -\frac{1}{8}(8t + 8z^2 - 1) + c(16t + 16z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

che risolta rispetto a t diviene

$$t = \frac{1}{8}(c^2 - 16z^2 + 1) + \frac{1}{8}c\sqrt{c^2 - 16z^2 + 1}.$$

Ricordando infine che $t = z_v$ e $z = \psi_v$, si ha

$$(59)\qquad \begin{aligned} v &= 8\int \frac{dz}{c^2 - 16z^2 + 1 + c\sqrt{c^2 - 16z^2 + 1}} \\ \psi &= 4\int \frac{dz^2}{c^2 - 16z^2 + 1 + c\sqrt{c^2 - 16z^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Ponendo ancora $c = \dfrac{2m}{1 - m^2}$ e $z = \dfrac{\sqrt{c^2 + 1}}{4}\,\dfrac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}$ si ha

$$(60)\qquad \begin{aligned} e^\psi &= c_1 \frac{(1 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}}{(m + \mu)^{\frac{1}{2}}(1 + m\mu)^{\frac{1}{2}}} \\ e^v &= c_2 \left(\frac{1 + m\mu}{m + \mu}\right)^2 \end{aligned}$$

dove c_1, c_2, m sono funzioni della sola u, μ funzione di u e v.

Le (48) e (49) divengono perciò

$$
(61)\quad
\begin{aligned}
x &= \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{(1+\mu^2)^{\frac{1}{6}}}{(1+m\mu)^{\frac{1}{2}}(m+\mu)^{\frac{5}{6}}} [kc_2(1+m\mu)+h(m+\mu)]\\
y &= \left(\frac{c_1}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{(1+\mu^2)^{\frac{1}{6}}}{(1+m\mu)^{\frac{5}{6}}(m+\mu)^{\frac{1}{2}}} [k(m+\mu)+Bc_2(1+m\mu)].
\end{aligned}
$$

8. Imponendo ora che la prima delle (61) soddisfi alla prima delle (46), tenuto conto del valore di τ dato dalla prima delle (53), si ha

$$
(62)\quad h''+\frac{k'}{k}h'-\frac{k''}{k}h-\frac{k'^2}{k^2}h+c_1^2\frac{m}{(1-m^2)^2}h+c_1^2\sqrt{c_2}\frac{1+m^2}{2(1-m^2)^2}k=0.
$$

Analogamente, imponendo che la seconda delle (61) soddisfi alla prima delle (47), dove a τ è stato sostituito il suo valore, si ha

$$
(63)\quad B''+\frac{k'}{k}B'-\frac{k''}{k}B-\frac{k'^2}{k^2}B+c_1^2\frac{m}{(1-m^2)^2}B+\frac{c_1^2}{2\sqrt{c_2}}\frac{1+m^2}{(1-m^2)^2}k=0.
$$

Le (62) e (63) sono lineari in h e B rispettivamente e differiscono solo per un fattore nel termine noto. Perciò le omogenee corrispondenti coincidono.

Ponendo $\frac{h}{k}=z$, $\frac{B}{k}=\zeta$, esse divengono

$$
(64)\quad
\begin{aligned}
& z''+3z'\frac{k'}{k}+c_1^2\frac{m}{(1-m^2)^2}z+\frac{c_1^2\sqrt{c_2}}{2}\frac{1+m^2}{(1-m^2)^2}=0\\
& \zeta''+3\zeta'\frac{k'}{k}+c_1^2\frac{m}{(1-m^2)^2}\zeta+\frac{c_1^2}{2\sqrt{c_2}}\frac{1+m^2}{(1-m^2)^2}=0.
\end{aligned}
$$

Per l'integrazione delle omogenee poniamo $z=e^t$ $(\zeta=e^t)$. Si ha

$$
(65)\quad t''+t'^2+3t'\frac{k'}{k}+c_1^2\frac{m}{(1-m^2)^2}=0
$$

che è di RICCATI in t'.

Poichè k è una funzione arbitraria di u, scegliamo ad arbitrio un integrale particolare η; si avrà allora per k

$$
(66)\quad k=\eta^{-\frac{1}{3}}e^{-\int\frac{1}{3}\eta du}e^{-\frac{1}{3}\int\frac{c_1^2 m}{(1-m^2)^2}du}.
$$

L'equazione (65) può allora essere integrata, e si ottiene

$$t = \log\left(\int \frac{du}{k^3 e^{2\int\eta du}} + \sigma\right) + \int \eta du + \log\gamma$$

cioè

$$z = \gamma e^{\int\eta du} \int \frac{\eta e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}}{e^{\int\eta du}} du + \delta e^{\int\eta du} \tag{67}$$

$$\zeta = \bar{\gamma} e^{\int\eta du} \int \frac{\eta e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}}{e^{\int\eta du}} du \, \bar{\delta} e^{\int\eta du}$$

dove a k si è sostituito il valore dalla (66) e si è posto $\gamma\sigma = \delta$.

Per l'integrazione delle non omogenee si ha

(68

$$\gamma' = -\frac{c_1^2 \sqrt{c_2}(1+m^2)}{2\eta(1-m^2)^2} e^{-\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}$$

$$\delta' = \gamma \int \frac{\eta e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}}{e^{\int\eta du}} du$$

$$\bar{\gamma}' = \frac{\gamma'}{c_1}$$

$$\bar{\delta} = \frac{\delta'}{c_1}.$$

Si ha perciò, in definitiva, per le (61),

(69)

$$x = \frac{c_1^{\frac{1}{3}}}{c_2^{\frac{1}{3}}} \frac{(1+\mu^2)^{\frac{1}{6}} k}{(1+m\mu)^{\frac{1}{2}}(m+\mu)^{\frac{5}{6}}} \Bigg\{ c_2(1+m\mu) + (\gamma+\alpha)\eta(m+\mu) \cdot$$

$$\cdot \left[\int \frac{\eta e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}}{e^{\int\eta du}} du + e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du} \right] + (\delta+\beta)\eta(m+\mu) \Bigg\}$$

$$y = \frac{c_1^{\frac{1}{3}}}{c_2^{\frac{2}{3}}} \frac{(1+\mu^2)^{\frac{1}{6}} k}{(1+m\mu)^{\frac{5}{6}}(m+\mu)^{\frac{1}{2}}} \Bigg\{ m + \mu + c_2\left(\int \frac{\gamma'}{c_2} du + \bar{\alpha}\right)\eta \cdot$$

$$\cdot(1+m\mu)\left[\int \frac{\eta e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}}{e^{\int\eta du}} + e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}\right] + c_2\left(\int \frac{\delta'}{c_2} du + \bar{\beta}\right)\eta(1+m\mu) \Bigg\},$$

dove k è dato dalla (66), γ e δ per integrazione delle prime due delle (68), c_1, c_2, m, η sono funzioni arbitrarie della u, μ è funzione arbitraria di u, v, perciò può essere presa come nuovo parametro; α, β, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ sono costanti arbitrarie.

Tre coppie di integrali linearmente indipendenti scelti tra le (69) danno le equazioni parametriche delle trasformazioni cercate. Perciò, a meno di omografie, si ha

$$
(70) \qquad
\begin{cases}
x_1 = x_3\left[\displaystyle\int \frac{\eta e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}}{e^{\int \eta du}}\, du + e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}\right] \\[2ex]
x_2 = \gamma x_1 + \left(\dfrac{c_2(1+m\mu)}{\eta(m+\mu)} + \delta\right) x_3 \\[2ex]
x_3 = \eta(m+\mu)\dfrac{c_1^{\frac{1}{3}}}{c_2^{\frac{1}{3}}} \dfrac{(1+\mu^2)^{\frac{1}{6}} k}{(1+m\mu)^{\frac{1}{2}}(m+\mu)^{\frac{5}{6}}}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
y_1 = y_3\left[\displaystyle\int \frac{\eta e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}}{e^{\int \eta du}}\, du + e^{\int c_1^2 \frac{m}{(1-m^2)^2} du}\right] \\[2ex]
y_2 = y_1 \displaystyle\int \frac{\gamma'}{c_2}\, du + y_3\left(\frac{m+\mu}{c_2\eta(1+m\mu)} + \int \frac{\delta'}{c_2}\, du\right) \\[2ex]
y_3 = c_1^{\frac{1}{3}} c_2^{\frac{1}{3}} \eta(1+m\mu) \dfrac{(1+\mu^2)^{\frac{1}{6}} k}{(1+m\mu)^{\frac{5}{6}}(m+\mu)^{\frac{1}{2}}}.
\end{cases}
$$

Eliminando i parametri tra le (70) e tenendo conto dell'arbitrarietà delle funzioni c_1, c_2, η, m, si ottiene:

$$
(71) \qquad
\begin{cases}
\bar{x} = x \\[1ex]
\bar{y} = \varphi(x) + \dfrac{\psi(x)}{y - f(x)}
\end{cases}
\quad [10].
$$

[10] È immediata la verifica che le direzioni caratteristiche, in una coppia ordinaria di punti corrispondenti, sono tutte distinte, eccettuato il caso che. con $f(x)$ e $\varphi(x)$ lineari, $\psi(x)$ sia una forma quadratica a discriminante nullo (vedi anche la [8] della Nota I). Infatti. annullando i coefficienti della y nal discriminante dell'equazione che da le direzioni caratteristiche in una coppia generica, si ottiene $f''(x) = 0$; $\varphi''(x) = 0$; $\psi'^2 - 2\psi\psi'' = 0$. che ci dicono che $f(x)$ e $\varphi(x)$ devono essere lineari e $\psi(x)$ deve essere una forma quadratica a discriminante nullo.

Si osservi che le trasformazioni (37) si presentano come caso particolare delle (71), per $f(x)$ e $\varphi(x)$ lineari.

Si noti ancora come le (71) comprendano come caso particolare le trasformazioni di De Jonquières, e si ritrova così un risultato noto [11], che cioè *ogni trasformazione di De Jonquières, si può iperosculare in ogni coppia di punti corrispondenti con una trasformazione cubica.*

9. Concludendo si può dire che *condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale si possa iperosculare in ogni coppia regolare di punti corrispondenti a direzioni caratteristiche distinte con una trasformazione cubica è che essa sia del tipo* (71).

È facile dare di tali trasformazioni una costruzione geometrica.

Basterà assegnare nei due piani una proiettività tra due fasci di rette e su ciascuna coppia di rette corrispondenti una proiettività tale che i centri dei due fasci non si corrispondano [12].

Le trasformazioni così costruite sono effettivamente quelle rappresentate dalle (71). Per vederlo basta scegliere il riferimento proiettivo in modo che l'equazione della proiettività tra i fasci sia la $x = \bar{x}$.

Allora l'equazione della proiettività tra due rette corrispondenti assume la forma della seconda delle (71) [13].

Si ha immediatamente che nelle trasformazioni (71) le curve $y = f(x)$ e $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ sono singolari per la trasformazione, in quanto a ciascun punto di esse corrisponde sempre nell'altro piano il centro del fascio. Pure singolari sono le rette del fascio per cui $\psi(x) = 0$ $[\psi(\bar{x}) = 0]$, in quanto su di esse la proiettività degenera Si esige che la proiettività sia funzione continua e differenziabile C^3 della retta variabile nel fascio.

Le (71) poi divengono le (37) se le curve $y = f(x)$ e $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ sono rette.

Pervenuta alla Segreteria dell'U M I
l'1 settembre 1966

[11] M. VILLA, *Ricerche locali sulle trasformazioni cremoniane*, Memorie I, II, « Accademia delle Scienze di Bologna », Ser X, Vol. I, pp. 189-198; Vol. II, pp. 117-126 (1944-45).

[12] Le curve luogo dei punti corrispondenti dei centri dei fasci possono essere entrambe rette, che indicherò con r ed $\bar{r}$. In tale caso, detta T la trasformazione in esame, ogni omografia Ω, che subordina trai due fasci la proiettività subordinata da T e trasformi la r nella $\bar{r}$, è tale che la trasformazione $T\Omega^{-1}$ subordina su tutte le rette del fascio delle involuzioni. Orbene, va escluso il caso che il luogo dei punti doppi di tali involuzioni sia costituito da una coppia di rette.

[13] Resta escluso l'unico caso eccezionale indicato nella [12].