Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Cavalieri D'Oro

Trasformazioni puntuali osculabili con trasformazioni quadratiche biintere.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.2, p. 208–218.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_2_208_0>

Trasformazioni puntuali osculabili con trasformazioni quadratiche biintere.

LUIGI CAVALIERI D'ORO (Bologna) (*).

Sunto. - *Si dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale T, moltiplicata per un' opportuna omografia, sia osculabile, in una coppia regolare, con una trasformazione quadratica biintera.*

1. – Nel presente lavoro si dimostra che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale T, moltiplicata per un' opportuna omografia, sia osculabile, in una coppia regolare $(0, 0')$, *con una trasformazione quadratica biintera* T_q (¹), *è che le direzioni caratteristiche della T presentino uno dei seguenti casi*

1°) *Due piani di rette caratteristiche la cui retta d' intersezione è tripla come retta caratteristica*;

2°) *Un piano doppio di rette caratteristiche, essendo una retta di tale piano tripla come retta caratteristica*;

3°) *Un piano di rette caratteristiche, essendo una retta di tale piano quadrupla come retta caratteristica*;

4°) *Le sette rette caratteristiche coincidenti,* tale coincidenza avvenendo come è descritto nel seguito.

Nel n. 2 si cerca la configurazione delle rette caratteristiche delle trasformazioni quadratiche biintere T_q e si trova che essa può essere soltanto dei quattro tipi suddetti. Questo dimostra che la condizione è necessaria (²).

(*) Lavoro eseguito nell' ambito dell' attività del Gruppo di Ricerca Matematica n. 26 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(¹) Si veda: M. VILLA, *Un' osservazione sulla geometria affine delle trasformazioni puntuali,* Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, Ser. III, Vol. 19, p. 54 (1964).

(²) Infatti se una T è osculabile con una T_q, la T ha le stesse rette caratteristiche della T_q; e ciò avviene anche se la T è moltiplicata per un' omografia qualunque.

Nel n. 3 si determinano, in una coppia regolare $(0, 0')$, le equazioni delle trasformazioni puntuali T, fra due spazi affini A_3 ed A'_3, aventi le direzioni caratteristiche di ciascuno dei quattro tipi suddetti. Si vede che ciascuna delle T trovate è osculabile in $(0, 0')$ con una trasformazione quadratica T' che possiede, fra le quadriche del sistema omaloidico di A_3, un piano π contato due volte (e quindi la superficie jacobiana della T' è costituita dal piano π contato quattro volte). Segue subito che il prodotto $\Omega \cdot T$, ove Ω è una qualunque delle omografie che trasformano il piano π nel piano improprio, è osculabile in $(0, 0')$ con una T_q. Resta così dimostrato che la condizione è anche sufficiente.

2. - Una trasformazione puntuale è quadratica biintera quando e solo quando le sue equazioni, a meno di affinità, si possono scrivere nella seguente forma canonica

$$(1)\qquad \begin{array}{llll} & y_1 = x_1 + x_2x_3 & & y_1 = x_1 + x_2^2 \\ \text{a)} & y_2 = x_2 & \text{a}') & y_2 = x_2 \\ & y_3 = x_3 & & y_3 = x_3 \\ & & & \\ & y_1 = x_1 + x_2x_3 & & y_1 = x_1 + x_2^2 + \alpha x_2x_3 \\ \text{b)} & y_2 = x_2 + x_3^2 & \text{c)} & y_2 = x_2 + x_3^2 \\ & y_3 = x_3 & & y_3 = x_3 \ (^3) \end{array}$$

Le rette caratteristiche in $(0, 0)$ della T_q di equazioni (1)a) sono le rette comuni ai coni cubici che si ottengono annullando la matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2x_3 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Una delle tre equazioni è identicamente soddisfatta e le altre due sono

$$(2)\qquad x_2^2x_3 = 0, \qquad x_2x_3^2 = 0.$$

I due coni (2) sono degeneri, perchè si spezzano in due piani. di cui uno è doppio. I due piani $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$ sono comuni ai

[3] Le a), a') rappresentano una $T_{2,2}$; le b) una $T_{2,3}$; le c) una $T_{2,4}$. Si veda: L. CAVALIERI D'ORO, *Le trasformazioni quadratiche biintere fra due spazi tridimensionali*, Atti Sem. Mat. e Fis., Univ. Modena, Vol. XIV, p 58, (1965)

coni (2) e quindi sono piani di rette caratteristiche. Il piano residuo è il piano $x_2 = 0$ per il primo cono e $x_3 = 0$ per il secondo. Segue che la retta $x_2 = x_3 = 0$, comune a tali piani, è retta caratteristica. Si osservi che tale retta coincide con la retta intersezione dei due piani caratteristici.

Si tratta dunque del caso di due piani distinti di rette caratteristiche [4] in cui però l'ulteriore retta caratteristica appartiene ad entrambi i piani ed è quindi tripla come retta caratteristica: le direzioni caratteristiche sono cioè quelle del caso 1°) del n. 1.

Per brevità nel seguito chiameremo questa configurazione delle rette caratteristiche *configurazione di tipo* a).

Le rette caratteristiche in (0, 0') della T_q di equazioni (1)a') sono le rette comuni ai coni cubici $x_2^3 = 0$ e $x_2^2 x_3 = 0$. Si tratta di due coni degeneri ciascuno dei quali si spezza nel piano $x_2 = 0$ contato due volte che quindi è piano doppio di rette caratteristiche; il terzo piano di tali coni è il piano $x_2 = 0$ per il primo e $x_3 = 0$ per il secondo. Segue che la retta intersezione di questi due piani è retta caratteristica: tale retta appartiene al piano doppio di rette caratteristiche.

Si tratta dunque del caso di un piano doppio di rette caratteristiche in cui però l'ulteriore retta caratteristica appartiene a tale piano ed è quindi tripla come retta caratteristica: le direzioni caratteristiche sono cioè quelle del caso 2°) del n. 1.

Per brevità nel seguito chiameremo questa configurazione delle rette caratteristiche *configurazione di tipo* a').

Le rette caratteristiche in (0, 0') della T_q di equazioni (1)b) sono le rette comuni ai coni cubici che si ottengono annullando la matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 x_3 & x_3^2 & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Le loro equazioni sono

$$x_3(x_1 x_3 - x_2^2) = 0, \qquad x_2 x_3^2 = 0, \qquad x_3^3 = 0. \tag{3}$$

Poichè il piano $x_3 = 0$ appartiene a ciascuno dei coni (3) esso è piano di rette caratteristiche. Le ulteriori rette caratteristiche

(4) Si veda: G. Martini, *Ricerche locali sulle trasformazioni puntuali tra due spazi nella geometria affine*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Ser. XI, Vol. 10, p. 217, (1963).

sono le rette comuni ai coni quadrici

$$x_1x_3 - x_2^2 = 0, \tag{4}$$

$$x_2x_3 = 0, \tag{5}$$

$$x_3^2 = 0. \tag{6}$$

Segando i tre coni quadrici con il piano improprio $x_4 = 0$ si ottengono le tre coniche (4), (5), (6). Il punto $S(1, 0, 0)$ è semplice per la conica (4) e doppio per le coniche (5) e (6); inoltre le tre coniche sono tangenti in S. Dunque il punto S è triplo come punto intersezione delle tre coniche: infatti l'E_2 in S della conica (4) è (avendo posto $x_1 = 1$)

$$x_3 = x_2^2 \tag{7}$$

e tale E_2 appartiene anche alle coniche (5) e (6). Segue che la retta $x_2 = x_3 = 0$ è tripla come retta caratteristica: essa si ottiene proiettando da 0 l'E_2 (7) avente centro in $S_\infty(1, 0, 0, 0)$ e tangente in S_∞ alla retta $x_3 = x_4 = 0$, poichè tale retta appartiene al piano di rette caratteristiche $x_3 = 0$, essa è quadrupla come retta caratteristica.

Si tratta dunque del caso in cui vi è un piano di rette caratteristiche [5] in cui però le ulteriori tre rette caratteristiche coincidono e appartengono al piano: le direzioni caratteristiche sono cioè quelle del caso 3°) nel n. 1.

Per brevità nel seguito chiameremo questa configurazione delle rette caratteristiche *configurazione di tipo* b).

Cerchiamo infine la configurazione delle rette caratteristiche in (0, 0') della T_q di equazioni (1)c). Considerata la matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2^2 + \alpha x_2x_3 & x_3^2 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

le rette caratteristiche sono le rette comuni ai coni cubici

$$x_1x_3^2 - x_2^3 - \alpha x_2^2x_3 = 0, \qquad x_3(x_2^2 + \alpha x_2x_3) = 0, \qquad x_3^3 = 0, \tag{8}$$

e quindi a tutti i coni della rete individuata da questi tre

$$\lambda x_3^3 + \mu(x_2^2x_3 + \alpha x_2x_3^2) + \nu(\alpha x_2^2x_3 + x_2^3 - x_1x_3^2) = 0. \tag{9}$$

Segando i coni (9) con il piano improprio si ottiene una rete di cubiche piane. Posto, come è lecito, $\nu = 1$, $x_1 = 1$, la rete di

[5] Si veda: G MARTINI, op. cit nella [4], pag. 213.

cubiche si scrive

$$x_3^2 = \lambda x_3^3 + x_2^3 + (\mu + \alpha)x_2^2 x_3 + \alpha\mu x_2 x_3^2 . \tag{10}$$

Le cubiche della rete (10) hanno in $A(1, 0, 0)$ una cuspide e la tangente cuspidale $x_3 = 0$ in comune, essendovi un punto comune ai rami del 2° ordine, oltre ai sei dovuti alla coincidenza delle tangenti cuspidali [6].

Si conclude quindi che nella T_q di equazioni (1)c) la configurazione delle rette caratteristiche in (0, 0′) è la seguente: le sette rette caratteristiche coincidono, la coincidenza avvenendo nel modo sopra descritto [7]; le direzioni caratteristiche sono cioè quelle del caso 4°) del n. 1.

Per brevità nel seguito chiameremo questa configurazione delle rette caratteristiche *configurazione di tipo* c).

3. – Consideriamo ora una trasformazione puntuale T fra due spazi affini A_3 ed A'_3 e sia 0, 0′ una coppia regolare di punti corrispondenti. Introdotti nei due spazi due sistemi di coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3 in A_3 e y_1, y_2, y_3 in A'_3) di origini (0, 0′) le equazioni della T, nell'intorno di (0, 0′), si possono sempre scrivere, con una conveniente scelta degli assi cartesiani

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ &\qquad + 2a_{23}x_2x_3 + [3] \\ y_2 &= x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + \\ &\qquad + 2b_{23}x_2x_3 + [3] \\ y_3 &= x_3 + c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + \\ &\qquad + 2c_{23}x_2x_3 + [3], \end{aligned} \tag{11}$$

(6) Considerate infatti due cubiche qualunque della rete (10), ottenute per i valori λ_1, μ_1 e λ_2, μ_2 dei parametri λ e μ si trova che il risultante delle loro equazioni è

$$x_3^7(p_1x_3^3 + p_2x_3^2 + p_3x_3 + p_4)$$

essendo p_1, p_2, p_3, p_4 funzioni razionali di λ_1, μ_1, λ_2, μ_2. Osservando che $p_4 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)^2$ e quindi in generale è $p_4 \neq 0$, si conclude che due cubiche qualunque della rete hanno riunite in A sette intersezioni.

(7) Sulla coincidenza delle sette rette caratteristiche di una trasformazione puntuale fra due spazi ordinari, si veda: L. MURACCHINI, *Alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali fra spazi*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Ser III, Vol. 7, p. 127, (1952).

le a, b, c, essendo costanti e indicando con [3] l'insieme dei termini di grado > 2 negli sviluppi in serie di potenze ([8]).

Nella coppia $(0, 0')$ le equazioni complessive delle rette caratteristiche della T di equazioni (11) si ottengono uguagliando a zero la matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \end{matrix} \right\|,$$

f_2, φ_2, ψ_2, essendo i gruppi dei termini di 2° grado delle (11). Quindi le rette caratteristiche sono le rette comuni ai tre coni cubici

$$x_1\varphi_2 - x_2 f_2 = 0 \tag{12}$$

$$x_1\psi_2 - x_3 f_2 = 0 \tag{13}$$

$$x_2\psi_2 - x_3\varphi_2 = 0. \tag{14}$$

Cerchiamo ora le condizioni affinchè la T di equazioni (11) abbia la configurazione di tipo a).

Affinchè la T abbia due piani di rette caratteristiche, essi dovranno appartenere a ciascuno dei tre coni. Assunti tali piani come piani $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$ dovrà essere

$$\begin{gathered} a_{22} = a_{33} = b_{11} = b_{13} = b_{33} = c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0, \\ a_{11} = 2b_{12} = 2c_{13}, \qquad b_{22} = 2a_{12}, \qquad c_{33} = 2a_{13}. \end{gathered} \tag{15}$$

Per le (15), le (12), (13), (14) divengono

$$x_2x_3[(b_{23} - a_{13})x_1 - a_{23}x_2] = 0 \tag{16}$$

$$x_2x_3[(c_{23} - a_{12})x_1 - a_{23}x_3] = 0 \tag{17}$$

$$x_2x_3[(c_{23} - a_{12})x_2 - (b_{23} - a_{13})x_3] = 0. \tag{18}$$

Ciascuno dei coni (16), (17), (18) si spezza dunque, oltre che nei piani $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$, in un terzo piano. Questi tre ulteriori piani appartengono ad uno stesso fascio e quindi l'asse r di tale fascio è retta caratteristica per la T; le equazioni di r si possono scrivere, supposto $a_{23} \neq 0$ ([9])

$$\frac{x_1}{a_{23}} = \frac{x_2}{b_{23} - a_{13}} = \frac{x_3}{c_{23} - a_{12}}.$$

([8]) Si veda: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari I. Intorno del 2° ordine*, Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Ser VIII, Vol. 4, p. 60, (1948).

([9]) Se fosse $a_{23} = 0$ la retta r apparterebbe al piano $x_1 = 0$ e quindi non potrebbe coincidere con la $x_2 = x_3 = 0$.

La r coincide con la $x_2 = x_3 = 0$ d'intersezione dei due piani di rette caratteristiche se

$$a_{13} = b_{23}, \qquad a_{12} = c_{23}. \tag{19}$$

Per le (15) e (19) le equazioni (11) della T divengono

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + 2a_{23}x_2x_3 + [3] \\ y_2 &= x_2(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + [3] \\ y_3 &= x_3(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + [3]. \end{aligned} \tag{20}$$

Le (20) sono le equazioni della T cercata. La T è osculabile, nell'intorno di $(0, 0')$, con la seguente trasformazione quadratica T'

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3) + 2a_{23}x_2x_3}{(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3)^2} \\ y_2 &= \frac{x_2}{1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3} \\ y_3 &= \frac{x_3}{1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_2}. \end{aligned} \tag{21}$$

La T' (21) possiede fra le quadriche del sistema omaloïdico ∞^3 di A_3 che corrispondono proiettivamente ai piani di A'_3, il piano $1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3 = 0$ contato due volte e ciò porta come conseguenza che la superficie jacobiana della T' è costituita dallo stesso piano contato quattro volte.

Da quando precede si ha che il prodotto $\Omega \cdot T'$ ove Ω è una qualunque delle omografie che conservano l'origine e trasformano il piano $1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3 = 0$ nel piano improprio ([10]), è una trasformazione quadratica biintera.

Considerata ad esempio l'omografia Ω

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1}{1 + a_{11}X_1 + b_{22}X_2 + c_{33}X_3} \\ x_2 &= \frac{X_2}{1 + a_{11}X_1 + b_{22}X_2 + c_{33}X_3} \\ x_3 &= \frac{X_3}{1 + a_{11}X_1 + b_{22}X_2 + c_{33}X_3} \end{aligned} \tag{22}$$

([10]) Di tali omografie ve ne sono ∞^9, cioè il prodotto di una qualunque di esse per una centro-affinità di centro 0.

si ha che il prodotto $\Omega \cdot T'$ è

$$(23) \qquad \begin{aligned} y_1 &= X_1 + 2a_{23}X_2X_3 \\ y_2 &= X_2 \\ y_3 &= X_3 . \end{aligned}$$

Le (23) sono appunto le equazioni di una trasformazione quadratica biintera T_q: infatti esse, a meno di affinità, coincidono con le (1)a).

Segue immediatamente che la T_q di equazioni (23) oscula il prodotto dell'omografia Ω di equazioni (22) per la T di equazioni (20): infatti T' oscula T e quindi $\Omega \cdot T'$ oscula $\Omega \cdot T$. Essendo poi $T_q = \Omega \cdot T'$, segue che T_q escula $\Omega \cdot T$.

Consideriamo ancora la T di equazioni (11): procedendo analogamente a quanto fatto nel caso precedente si trova che essa ha la configurazione di tipo a') se

$$(24) \qquad \begin{aligned} &a_{23} = a_{33} = b_{11} = b_{13} = b_{33} = c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0, \\ &a_{11} = 2b_{12} = 2c_{13}, \qquad b_{22} = 2a_{12} = 2c_{23}, \qquad c_{33} = 2a_{13} = 2b_{23}, \end{aligned}$$

avendo scelto come piano doppio di rette caratteristiche il piano $x_2 = 0$ e come ulteriore retta caratteristica appartenente a tale piano la retta $x_2 = x_3 = 0$.

Per le (24) le equazioni (11) della T divengono

$$(25) \qquad \begin{aligned} y_1 &= x_1(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + a_{22}x_2^2 + [3] \\ y_2 &= x_2(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + [3] \\ y_3 &= x_3(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + [3]. \end{aligned}$$

La T di equazioni (25) è osculabile in (0, 0) con la seguente trasformazione quadratica T'

$$(26) \qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3) + a_{22}x_2^2}{(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3)^2} \\ y_2 &= \frac{x_2}{1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3} \\ y_3 &= \frac{x_3}{1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3} \end{aligned}$$

che possiede il piano doppio $(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3)^2 = 0$ fra le quadriche del sistema omaloidico fondamentale di A_3. Segue che il prodotto $\Omega \cdot T'$, ove Ω è una qualunque delle omografie che trasformano il piano improprio nel suddetto piano, è una trasformazione quadratica biintera.

Considerata anche ora l'omografia Ω di equazioni (22), si ha che il prodotto $\Omega \cdot T'$, essendo T' la trasformazione quadratica di equazioni (26), è

$$(27) \qquad \begin{aligned} y_1 &= X_1 + a_{22}X_2^2 \\ y_2 &= X_2 \\ y_3 &= X_3 . \end{aligned}$$

Le (27) sono le equazioni di una trasformazione quadratica biintera T_q: infatti esse, a meno di affinità. coincidono con le (1)a'). Segue immediatamente che la T_q di equazioni (27) oscula il prodotto dell'omografia (22) per la T di equazioni (25).

Considerata ancora la T di equazioni (11) cerchiamo le condizioni affinchè essa abbia la configurazione di tipo b).

Sarà sufficiente imporre ai coni cubici (12), (13), (14) di contenere uno stesso piano α; inoltre i coni quadrici ottenuti prescindendo dal piano α dovranno oscularsi lungo una retta r del piano α avendo nei punti di r come piano tangente lo stesso piano α.

Scelto il piano $x_3 = 0$ come piano α si ha

$$(28) \qquad a_{22} = b_{11} = c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0, \qquad a_{11} = 2b_{12}, \qquad b_{22} = 2a_{12},$$

e quindi le equazioni (12), (13), (14) dei coni cubici divengono

$$(29) \qquad \begin{aligned} & x_3[b_{33}x_1x_3 + 2b_{13}x_1^2 - a_{33}x_2x_3 - 2a_{23}x_2^2 + 2(b_{23} - a_{13})x_1x_2] = 0 \\ & x_3[a_{33}x_3^2 - (c_{33} - 2a_{13})x_1x_3 - 2(c_{13} - b_{12})x_1^2 + \\ & \qquad + 2a_{23}x_2x_3 - 2(c_{23} - a_{12})x_1x_2] = 0 \\ & x_3[b_{33}x_3^2 + 2b_{13}x_1x_3 - (c_{33} - 2b_{23})x_2x_3 - 2(c_{23} - a_{12})x_2^2 - \\ & \qquad - 2(c_{13} - b_{12})x_1x_2] = 0. \end{aligned}$$

Scelta poi come retta r la retta $x_2 = x_3 = 0$, i coni quadrici, ottenuti dalle (29) prescindendo dal piano $x_3 = 0$, contengono la r se

$$(30) \qquad b_{13} = 0, \qquad b_{12} = c_{13};$$

hanno come piano tangente lungo la retta r il piano α se

$$(31) \qquad a_{13} = b_{23}, \qquad a_{12} = c_{23};$$

infine si osculano lungo la r se

$$(32) \qquad c_{33} = 2a_{13}.$$

Per le (28), (30), (31), (32) le equazioni (11) della T divengono

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + [3] \\
y_2 &= x_2(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + b_{33}x_3^2 + [3] \qquad (33) \\
y_3 &= x_3(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + [3].
\end{aligned}
$$

Le (33) sono dunque le equazioni della T cercata. La T è osculabile, nell'intorno di $(0, 0')$, con la seguente trasformazione quadratica T'

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{x_1(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3) + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2}{(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3)^2} \\
y_2 &= \frac{x_2(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3) + b_{33}x_3^2}{(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3)^2} \qquad (34) \\
y_3 &= \frac{x_3}{1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3}.
\end{aligned}
$$

Anche ora, come nei casi precedenti, il prodotto dell'omografia Ω di equazioni (22) per la T' di equazioni (34) è una trasformazione quadratica biintera T_q le cui equazioni sono

$$
\begin{aligned}
y_1 &= X_1 + 2a_{23}X_2X_3 + a_{33}X_3^2 \\
y_2 &= X_2 + b_{33}X_3^2 \qquad (35) \\
y_3 &= X_3.
\end{aligned}
$$

Esse infatti coincidono, a meno di affinità, con le (1)b). Segue quindi che la T_q (35) oscula il prodotto dell'omografia (22) per la T di equazioni (33).

Cerchiamo infine le condizioni affinchè la T di equazioni (11) abbia la configurazione di tipo c).

Imponendo dapprima alle cubiche piane, ottenute segando i coni cubici (12), (13), (14) con il piano improprio $x_4 = 0$, di avere in $A(1, 0, 0)$ una cuspide e la stessa tangente cuspidale che sceglieremo come retta $x_3 = 0$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
&b_{11} = b_{13} = c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0, \qquad a_{11} = 2b_{12} = 2c_{13}, \\
&b_{22} = 2a_{12} = 2c_{23}, \qquad a_{13} = b_{23}. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Imponendo infine alle cubiche piane della rete individuata dalle tre suddette di avere in A una settima intersezione, oltre alle sei dovute alla coincidenza delle tangenti cuspidali, si ottiene

$$
c_{33} = 2a_{13}, \qquad a_{22} \neq 0, \qquad b_{33} \neq 0. \qquad (37)
$$

Per le (36), (37) le equazioni (11) della T divengono

$$
\begin{aligned}
&y_1 = x_1(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\
&\qquad\qquad + 2a_{23}x_2x_3 + [3] \\
(38) \qquad &y_2 = x_2(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + b_{33}x_3^2 + [3] \\
&y_3 = x_3(1 + a_{11}x_1 + b_{22}x_2 + c_{33}x_3) + [3].
\end{aligned}
$$

Le (38) sono dunque le equazioni della T cercata. La T (38) è osculabile, nell'intorno di $(0, 0')$, con la seguente trasformazione quadratica T'

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{x_1(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3) + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3}{(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3)^2} \\
(39) \qquad &y_2 = \frac{x_2(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3) + b_{33}x_3^2}{(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3)^2} \\
&y_3 = \frac{x_3}{(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3)}.
\end{aligned}
$$

Poichè la T (39) possiede fra le quadriche del sistema omaloidico fondamentale di A_3 il piano doppio $(1 - a_{11}x_1 - b_{22}x_2 - c_{33}x_3)^2 = 0$, il prodotto per essa di un'omografia qualunque che trasformi detto piano nel piano improprio, è una trasformazione quadratica biintera.

Ad esempio il prodotto $\Omega \cdot T'$, essendo Ω l'omografia (22), è

$$
\begin{aligned}
&y_1 = X_1 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{23}X_2X_3 \\
(40) \qquad &y_2 = X_2 + b_{33}X_3^2 \\
&y_3 = X_3
\end{aligned}
$$

e le (40) sono le equazioni di una trasformazione quadratica biintera T_q: infatti, a meno di affinità, coincidono con le (1)c).

Segue dunque subito che la T_q (40) oscula il prodotto dell'omografia (22) per la T di equazioni (38).

Resta così dimostrato che la condizione del n. 1 è anche sufficiente.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 9 febbraio 1967.