Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Franchetti

Sull'approssimazione di funzioni con derivata prima continua mediante una classe di operatori lineari positivi del tipo di Bernstein.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 311–317.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_311_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Sull'approssimazione di funzioni con derivata prima continua mediante una classe di operatori lineari positivi del tipo di Bernstein (*)

CARLO FRANCHETTI (Firenze)

Summary. - *We have considered Voronovskaja's asymptotic formula for a class of linear positive operators wider than Bernstein's polynomials and we have demonstrated that mean convergence is true also for functions belonging to the class C^1.*

Se si indica con $B_n(f)$ l'n-mo polinomio di BERNSTEIN

$$B_n(f) = B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

è noto che si ha:

$$B_n(f, 0) = f(0); \qquad B_n(f, 1) = f(1).$$

Inoltre per ogni $f \in C[0, 1]$ si ha uniformemente in $[0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} | B_n(f) - f(x) | = 0$$

e per ogni $f \in C^k[0, 1]$ si ha pure uniformemente in $[0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} | B_n^{(k)}(f) - f^{(k)}(x) | = 0 \tag{1}$$

È altresì noto che per ogni $f \in C^2[0, 1]$ si ha uniformemente in $[0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(f) - f(x)] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x); \tag{2}$$

questa è la formula asintotica della VORONOVSKAJA [1].

Se ora supponiamo $f \in C^1[0, 1]$ e $f \notin C^2[0, 1]$, può sussistere una formula del tipo

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha[B_n(f) - f(x)] = A(x)f'(x) \tag{3}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo VI di Ricerca del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C.N.R.

con $0 < \alpha$; $\alpha \neq 1$ e $A(x)$ funzione continua in $[0, 1]$ non identicamente nulla?

È subito visto che ciò è impossibile. Presa infatti una funzione $f \in C^2[0, 1]$, e quindi anche $f \in C^1[0, 1]$, tale che non sia $f'(x) \equiv 0$; per tale funzione dovrebbero valere contemporaneamente le (2) e (3), mentre ciò è assurdo.

Per avere un'idea del comportamento asintotico della differenza $[B_n(f) - f(x)]$ per funzioni $f \in C^1[0, 1]$ si può ragionare così: dalla (2) poichè la convergenza è uniforme integrando tra 0 e x si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^x [B_n(f) - f(x)]dx = \frac{1}{2}\int_0^x x(1-x)f''(x)dx$$

e con facili calcoli

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^x [B_n(f) - f(x)]dx = \tag{4}$$

$$= \frac{x(1-x)}{2} f'(x) - \frac{(1-2x)}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(0) - \int_0^x f(x)dx.$$

Poichè la (4) è conseguenza della (2) essa è valida per funzioni $\in C^2[0, 1]$. Tuttavia a secondo membro della (4) compare solo la derivata prima della $f(x)$.

Noi ci proponiamo appunto di dimostrare che la formula (4) sussiste anche per funzioni $\in C^1[0, 1]$. Daremo anzi la dimostrazione per una classe di operatori lineari positivi più generale.

Considereremo cioè gli operatori (di BASKAKOV) [2] definiti dalla relazione

$$\mathcal{L}_n(f) = \mathcal{L}_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{k!}(-x)^k$$

dove la successione di funzioni $\{\varphi_n(x)\}$ soddisfa alle condizioni

i) $\varphi_n(x)$ è analitica per $|x| \leq a$, $a > 0$

ii) $(-1)^k \varphi_n^{(k)}(x) \geq 0$

iii) $\varphi_n'(x) = -n\varphi_{m_n}(x)$, con $\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = 1$

iv) $\varphi_n(0) = 1$

Si dimostra [2] che per ogni funzione $f(x) \in C[0, a]$ si ha uniformemente in $[0, a]$

$$\lim_{n\to\infty} | \mathfrak{L}_n(f) - f(x) | = 0.$$

A motivo della iii) e della iv) potremo scrivere

$$\varphi_n'(0) = -n;\ \varphi_n''(0) = nm_n;\ \varphi_n^{(3)}(0) = -nm_n p_{m_n};\ \varphi_n^{(4)}(0) = nm_n p_{m_n} q_{p_{m_n}}$$

con (scrivendo per brevità m, p, q in luogo di m_n, p_{m_n}, $q_{p_{m_n}}$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{m} = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{p} = 1.$$

Si noti infine che si ha $\mathfrak{L}_n(f, 0) = f(0)$; e che, anche ora, si può dimostrare che per ogni funzione $f \in C^k[0, a]$ si ha uniformemente in $[0, a]$

$$\lim_{n\to\infty} | \mathfrak{L}_n^{(k)}(f) - f^{(k)}(x) | = 0. \tag{5}$$

Se alle prime quattro ipotesi sulla successione $\{ \varphi_n(x) \}$ aggiungiamo la

v) $\lim_{n\to\infty} (m - n) = \lim_{n\to\infty} (p - m) = \lim_{n\to\infty} (q - p) = C_\varphi$

si può dimostrare [3] che per ogni funzione $f \in C^2[0, a]$ si ha ivi uniformemente

$$\lim_{n\to\infty} n[\mathfrak{L}_n(f) - f(x)] = \frac{xf''(x)}{2} [1 + C_\varphi x], \tag{6}$$

formula che generalizza la (2).

Particolarizzando la successione $\{ \varphi_n(x) \}$ si possono ottenere diversi operatori. Diamo ora tre esempi, per i quali vale anche la v).

I. - Se $\varphi_n(x) = (1 - x)^n$; $C_\varphi = -1$; (Polinomi di BERNSTEIN)

$$\mathfrak{L}_n(f) = B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

II. - Se $\varphi_n(x) = e^{-nx}$; $C_\varphi = 0$

$$\mathfrak{L}_n(f) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

III. - Se $\varphi_n(x) = (1 + x)^{-n}$; $C_\varphi = 1$

$$\mathfrak{L}_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} x^k (1 + x)^{-(n+k)}.$$

Senza particolarizzare $\varphi_n(x)$, supponiamo ora che valga anche la v). Vogliamo dimostrare il seguente:

Teorema. - *Per ogni funzione* $f(x) \in C^1[0, a]$, *si ha uniformemente in* $[0, a]$:

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^x [\mathcal{L}_n(f) - f(x)]dx =$$

$$= \frac{x(1 + C_\varphi x)}{2} f'(x) - \frac{(1 + 2C_\varphi x)}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(0) + C_\varphi \int_0^x f(x)dx.$$

Questa formula si ottiene dalla (6) integrando fra 0 e x.

Per $C_\varphi = -1$; $\mathcal{L}_n(f) = B_n(f)$ si ha appunto la (4).

Prima di provare il teorema occorre fare le seguenti considerazioni.

Si noti che per dimostrare la convergenza degli operatori $\mathcal{L}_n$ bastano le ipotesi i, ii, iii, iv. Per provare invece la (6) è indispensabile la v, [3].

Per la dimostrazione che ci proponiamo di fare è necessario aggiungere altre ipotesi. Tuttavia, senza cercare le ipotesi più generali che richiederebbero laboriose dimostrazioni, facciamo le seguenti che negli esempi I, II, III sono verificate:

vi) $(m - n) = (p - m) = (q - p) = C_\varphi$.

Premettiamo ora i seguenti lemmi sugli operatori $\mathcal{L}_n$ verificanti le i, ..., vi:

nelle ipotesi fatte sussistono le

$$\lim_{n\to\infty} n[\mathcal{L}_n(tf) - x\mathcal{L}_n(f)] = x(1 + C_\varphi x)f'(x) \quad \text{per ogni} \quad f \in C^1 \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} n[\mathcal{L}'_n(\varphi) - \mathcal{L}_n(\varphi')] = \frac{1 + 2C_\varphi x}{2} \varphi''(x) \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in C^2. \tag{8}$$

La (7) si dimostra così:

non presenta difficoltà verificare che

$$\mathcal{L}_n(tf) = \frac{x(1 + C_\varphi x)}{n} \mathcal{L}'_n(f) + x\mathcal{L}_n(f) \tag{9}$$

e da questa, se $f \in C^1$, tenuto conto della (5), segue immediatamente la (7).

Per la (8) si ha:

$$\mathfrak{L}'_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]\frac{\varphi_n^{(k+1)}(\varkappa)}{k!}(-\varkappa)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right]\frac{\varphi_n^{(k)}(\varkappa)}{(k-1)!}(-\varkappa)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} n\cdot\frac{k}{n}\left[\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right]\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{k!}(-\varkappa)^{k-1}.$$

Essendo $\varphi \in C^2$ si avrà:

$$\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{n}\varphi'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\left[\frac{\varphi''\left(\frac{k}{n}\right)}{2} + \varepsilon\left(\frac{k}{n}\right)\right], \quad \begin{matrix}\text{con} & \varepsilon(h) \to 0\\ \text{per} & h \to 0\end{matrix}$$

E perciò:

$$\varkappa\mathfrak{L}'_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\varphi'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\varphi_n^{(k)}(\varkappa)}{k!}(-\varkappa)^k - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\varphi''\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\varphi_n^{(k)}(\varkappa)}{k!}(-x)^k -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\varepsilon\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\varphi_n^{(k)}(\varkappa)}{k!}(-\varkappa)^k.$$

Poichè $\varepsilon(h)$ è limitato:

$|\varepsilon(h)| \leq H$ si avrà:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\varepsilon\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\varphi_u^{(k)}(\varkappa)}{k!}(-\varkappa)^k = A_n < \frac{H}{n}$$

Si ha allora

$$\varkappa\mathfrak{L}'_n(\varphi) = \mathfrak{L}_n(t\varphi') - \frac{1}{2n}\mathfrak{L}_n(t\varphi'') - A_n.$$

Ma per la (7) è

$$\mathfrak{L}_n(t\varphi') = \frac{\varkappa(1 + C_\varphi x)}{n}\mathfrak{L}'_n(\varphi') + x\mathfrak{L}_n(\varphi')$$

per cui infine

$$n\varkappa[\mathfrak{L}'_n(\varphi) - \mathfrak{L}_n(\varphi')] = \varkappa(1 + C_\varphi x)\mathfrak{L}'_n(\varphi') - \frac{1}{2}\mathfrak{L}_n(t\varphi'') - A_n$$

e passando al limite per $n \to \infty$

$$x\lim_{n\to\infty} n[\mathfrak{L}'_n(\varphi) - \mathfrak{L}_n(\varphi')] = x(1 + C_\varphi x)\varphi''(\varkappa) - \frac{\varkappa}{2}\varphi''(\varkappa).$$

Poichè la convergenza è uniforme in $[0, a]$, se si divide per x, si avrà pure convergenza nel punto $x=0$ per ovvie considerazioni di continuità. Perciò si ha

$$\lim_{n\to\infty} n[\mathcal{L}'_n(\varphi) - \mathcal{L}_n(\varphi')] = (1 + C_\varphi x)\varphi''(x) - \frac{1}{2}\varphi''(x)$$

che è appunto la (8). Passiamo ora alla

Dimostrazione del teorema enunciato.

Proviamo che per ogni funzione $f \in C^1[0, a]$ si ha uniformemente in $[0, a]$:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^x [\mathcal{L}_n(f) - f(x)]dx = \tag{10}$$

$$= \frac{x(1 + C_\varphi x)}{2} f'(x) - \frac{(1 + 2C_\varphi x)}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(0) + C_\varphi \int_0^x f(x)\,dx$$

Sia $f(x) \in C^1[0, a]$ e poniamo

$$\int_0^x f(t)dt = \varphi(x); \qquad \text{si ha} \quad \varphi(x) \in C^2[0, a]; \qquad \varphi(0) = 0; \qquad \varphi'(x) = f(x).$$

Allora:

$$\int_0^x [\mathcal{L}_n(f) - f(t)]dt = \int_0^x \mathcal{L}_n(\varphi')dt - \varphi(x) = \left[\int_0^x \mathcal{L}_n(\varphi')dt - \mathcal{L}_n(\varphi)\right] +$$
$$+ [\mathcal{L}_n(\varphi) - \varphi(x)].$$

Per cui ammessa provvisoriamente l'esistenza del limite

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^x [\mathcal{L}_n(f) - f(t)]dt = \lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^x \mathcal{L}_n(\varphi')dt - \mathcal{L}_n(\varphi)\right] +$$
$$= \lim_{n\to\infty} n[\mathcal{L}_n(\varphi) - \varphi(x)].$$

Ma per la (6) l'ultimo limite è uguale a

$$\frac{x}{2} f'(x)\,[1 + C_\varphi x].$$

Per la (8)

$$\lim_{n\to\infty} n[\mathcal{L}_n(\varphi') - \mathcal{L}'_n(\varphi)] = -\frac{\varphi''(x)}{2}[1 + 2C_\varphi x] = -\frac{f'(x)}{2}[1 + 2C_\varphi x]$$

da cui integrando tra 0 e x si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^x \mathcal{L}_n(\varphi')dt - \mathcal{L}_n(\varphi) + \mathcal{L}_n(\varphi, 0)\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^x \mathcal{L}_n(\varphi')dt - \mathcal{L}_n(\varphi) + \varphi(0)\right] =$$

$$+ \lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^x \mathcal{L}_n(\varphi')dt - \mathcal{L}_n(\varphi)\right] = -\frac{1}{2}\int_0^x f'(t)[1 + 2C_\varphi t]dt =$$

$$= -\frac{(1 + 2C_\varphi x)}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(0) + C_\varphi \int_0^x f(t)dt.$$

Si ha quindi

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^x [\mathcal{L}_n(f) - f(t)]dt =$$

$$= \frac{x[1 + C_\varphi x]}{2} f'(x) - \frac{(1 + 2C_\varphi x)}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(0) + C_\varphi \int_0^x f(t)dt.$$

C. V. D.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. G. LORENTZ, *Bernstein Polynomials*, «Math. exp. N. 8», University of Toronto press., (1953), pag. 22.

[2] P. P. KOROVKIN, *Linear operators and approximation theory*, Delhi-Hindustan Publishing Corporation, (1960), pagg. 53-54.

[3] F. SCHURER, *On the approximation of functions of many variables with linear positive operators*, «Indag. Math. Kon. Ned. Akad», Vol, XXV, (1963), pagg. 313-327.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 12 aprile 1967