Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Franchetti

Sull'approssimazione di funzioni più volte derivabili con successioni di operatori lineari, positivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 318–323.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_318_0>

Sull'approssimazione di funzioni più volte derivabili con successioni di operatori lineari, positivi

CARLO FRANCHETTI (Firenze) (*)

Summary. - *The necessary and sufficient conditions are established so that a formula of the type*

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x)\,[\mathcal{L}_n(f) - f(x)] = A(x) f^{(p)}(x)$$

holds uniformly in the interval $[a, b]$; *where* $\mathcal{L}_n(f)$ *is a linear positive operator,* $C_n(x)$ *and* $A_n(x)$ *are functions defined in the same interval and* $C_n(x)$ *is non negative.*

The function $f(x)$ *is assumed belonging to the class* $C^p[a, b]$.

Sia $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ una successione di operatori lineari che trasformano $C[a, b]$ in sè; siano inoltre positivi; cioè tali che da

$$f(t) \leq g(t)$$

segua

$$\mathcal{L}_n(f) \leq \mathcal{L}_n(g).$$

Conveniamo che $\mathcal{L}_n$ operi sulle funzioni della variabile t, trasformandole in funzioni della variabile x, come si ha nel seguente esempio:

$$\text{sia} \quad \mathcal{L}(f) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{per} \quad f = f(t),$$

se $f = f(x)$ è invece

$$\mathcal{L}(f) = \int_a^x f(x)dt = f(x)\int_a^x 1dt = f(x)\mathcal{L}(1).$$

Noi ci proponiamo di studiare il comportamento della differenza $[\mathcal{L}_n(f) - f(x)]$ quando $n \to \infty$; per funzioni $f(x) \in C^p[a, b]$, con $p = 1, 2, \ldots$.

TEOREMA. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè per ogni*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca per le scienze matematiche n. 6 del C. N. R.

funzione $f(x) \in C^r[a, b]$ *sussista uniformemente in* $[a, b]$ *una formula del tipo*:

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x)[\mathcal{L}_n(f) - f(x)] = A(x)f^{(p)}(x) \tag{1}$$

dove $C_n(x)$ *e* $A(x)$ *sono funzioni definite in* $[a, b]$ *e* $C_n(x) \geq 0$; *è che tale formula sia valida per le particolari funzioni*

$$f(t) = t^k \quad con \quad k = \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ p+2 & \text{se } p \text{ è pari} \\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ p+1 & \text{se } p \text{ è dispari} \end{cases}$$

ossia che si abbia

$$\lim_{n\to\infty} C_n[\mathcal{L}_n(t^k) - x^k] = A(x)k(k-1) - (k-p+1)x^{k-p} \tag{2}$$

$$per \quad k = \begin{cases} 0,\ 1,\ \dots,\ p+2 & \text{se } p \text{ è pari} \\ 0,\ 1,\ \dots,\ p+1 & \text{se } p \text{ è dispari.} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. - Che la condizione sia necessaria è ovvio. Per provare che la condizione è sufficiente, cominciamo col dimostrare che se vale la (2) si ha uniformemente in $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x)\mathcal{L}_n[(t-x)^s] = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq s < p \\ A(x)p\,! & \text{se } s = p \\ 0 & \text{se } p+2 \geq s > p. \end{cases} \tag{3}$$

Si ha infatti:

$$\mathcal{L}_n[(t-x)^s] = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} \mathcal{L}_n(t^i)(-x)^{s-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} \left\{ \binom{s}{i}(-x)^{s-i}[\mathcal{L}_n(t^i) - x^i] + \binom{s}{i} x^i(-x)^{s-i} \right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i}(-x)^{s-i}[\mathcal{L}_n(t^i) - x^i] + (-x)^s \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{s}{i},$$

e poichè la seconda somma è identicamente nulla si ha:

$$C_n(x)\mathcal{L}_n[(t-x)^s] = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i}(-x)^{s-i} C_n(x)[\mathcal{L}_n(t^i) - x^i]:$$

passando al limite per $n \to \infty$, tenuto conto della (2), si ha per

$0 \leq s \leq p + 2$:

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x)\mathcal{L}_n[(t-x)^s] = A(x) \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (-x)^{s-i} i(i-1)\dots(i-p+1)x^{i-p} =$$

$$= x^{s-p} A(x) \sum_{i=0}^{s} (-1)^{s-i} \binom{s}{i} i(i-1)\dots(i-p+1).$$

Quest'ultima somma se $0 \leq s < p$ è identicamente nulla; se $s = p$ è uguale appunto a $A(x)p!$, se $p < s \leq p+2$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x)\mathcal{L}_n[(t-x)^s] = x^{s-p}A(x) \sum_{i=p}^{s} (-1)^{s-i} \frac{s!}{(s-i)!\,i!} \cdot \frac{i!}{(i-p)!} =$$

$$= \quad (\text{ponendo } i-p=k)\; x^{s-p}A(x) \sum_{k=0}^{s-p} (-1)^{s-p-k} \frac{s!}{(s-p-k)!\,k!} =$$

$$= \frac{(-x)^{s-p}A(x)s!}{(s-p)!} \sum_{k=0}^{s-p} (-1)^k \binom{s-p}{k};$$

e quindi anche questa somma è identicamente nulla. La (3) è quindi completamente provata.

Poichè $f(x) \in C^p[a, b]$ si ha:

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \dots + (t-x)^{p-1} \frac{f^{(p-1)}(x)}{(p-1)!} +$$
$$+ (t-x)^p \left[\frac{f^{(p)}(x)}{p!} + \eta(t-x)\right]$$

con

(4) $$|\eta(h)| < M; \qquad \lim_{h\to 0} \eta(h) = 0,$$

Applicando l'operatore $\mathcal{L}_n$ si ha:

$$\mathcal{L}_n(f) - f(x) = f(x)[\mathcal{L}_n(1) - 1] + \sum_{h=1}^{p-1} \mathcal{L}_n[(t-x)^h] \cdot \frac{f^{(h)}(x)}{h!} +$$
$$+ \frac{f^{(p)}(x)}{p!} \mathcal{L}_n[(t-x)^p] + \mathcal{L}_n[\eta(t-x)(t-x)^p],$$

Per la (3) e poichè la funzione $x = 1$ ha tutte le derivate identicamente nulle si ha

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x)[\mathcal{L}_n(f) - f(x)] = A(x)f^{(p)}(x) + \lim_{n\to\infty} C_n(x)\mathcal{L}_n[\eta(t-x)(t-x)^p].$$

Perchè il teorema sia provato resta da dimostrare che il secondo limite esiste ed è identicamente nullo.

A motivo della (4), fissato $\sigma > 0$, possiamo determinare un $\delta > 0$ tale che $|t - x| < \delta \Rightarrow |\eta(t - x)| < \sigma$.

Per valutare $\mathcal{L}_n[\eta(t - x)(t - x)^p]$ distinguiamo a seconda che sia $|t - x| < \delta$; $|t - x| \geq \delta$.

Se p è pari; $p = 2l$, si ha:

$$\Big| \mathcal{L}_{n \atop |t-x|<\delta} [\eta(t - x)(t - x)^{2l}] \Big| \leq \mathcal{L}_{n \atop |t-x|<\delta} [|\eta(t - x)|(t - x)^{2l}] <$$

$$< \sigma\mathcal{L}_n[(t - x)^{2l}] = \sigma\mathcal{L}_n[(t - x)^p];$$

$$\Big| \mathcal{L}_{n \atop |t-x|\geq\delta} [\eta(t - x)(t - x)^{2l}] \Big| = \left| \mathcal{L}_{n \atop |t-x|\geq\delta} \left[\eta(t - x)\frac{(t - x)^{2l+2}}{(t - x)^2}\right] \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{L}_{n \atop |t-x|\geq\delta} \left[|\eta(t - x)| \frac{(t - x)^{2l+2}}{(t - x)^2} \right] <$$

$$< \frac{M}{\delta^2} \mathcal{L}_n[(t - x)^{2l+2}] = \frac{M}{\delta^2} \mathcal{L}_n[(t - x)^{p+2}].$$

Se p è dispari; $p = 2l + 1$, si ha:

$$\Big| \mathcal{L}_{n \atop |t-x|<\delta} [\eta(t - x)(t - x)^{2l+1}] \Big| = \Big| \mathcal{L}_{n \atop |t-x|<\delta} [\eta(t - x)(t - x)(t - x)^{2l}] \Big| \leq$$

$$\leq \mathcal{L}_{n \atop |t-x|<\delta} [|\eta(t - x)|(t - x)(t - x)^{2l}] < \sigma\delta\mathcal{L}_n[(t - x)^{2l}] = \sigma\delta\mathcal{L}_n[(t - x)^{p-1}];$$

$$\Big| \mathcal{L}_{n \atop |t-x|\geq\delta} [\eta(t - x)(t - x)^{2l+1}] \Big| = \left| \mathcal{L}_{n \atop |t-x|\geq\delta} \left[\eta(t - x)\frac{(t - x)^{2l+2}}{(t - x)}\right] \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{L}_{n \atop |t-x|\geq\delta} \left[|\eta(t - x)| \frac{(t - x)^{2l+2}}{(t - x)} \right] < \frac{M}{\delta} \mathcal{L}_n[(t - x)^{2l+2}] = \frac{M}{\delta} \mathcal{L}_n[(t - x)^{p+1}].$$

Si avrà quindi

$$|C_n(x)\mathcal{L}_n[(t - x)^p\eta(t - x)]| \leq \Big| C_n(x) \mathcal{L}_{n \atop |t-x|<\delta} [(t - x)^p\eta(t - x)] \Big| +$$

$$+ \Big| C_n(x) \mathcal{L}_{n \atop |t-x|\geq\delta} [(t - x)^p\eta(t - x)] \Big| <$$

$$< \begin{cases} \sigma C_n(x)\mathcal{L}_n[(t - x)^p] + \dfrac{M}{\delta^2} C_n(x)\mathcal{L}_n[(t - x)^{p+2}] & \text{se } p \text{ è pari} \\ \sigma\delta C_n(x)\mathcal{L}_n[(t - x)^{p-1}] + \dfrac{M}{\delta} C_n(x)\mathcal{L}_n[(t - x)^{p+1}] & \text{se } p \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi, tenuto conto che è $p \geq 1$. σ arbitrariamente piccolo; in virtù delle (3) segue

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x)\mathcal{L}_n[\eta(t - x)(t - x)^p] = 0 \qquad \text{c.v.d.}$$

Alcune conseguenze.

Ricordiamo il teorema di KOROVKIN:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè per una successione $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ di operatori lineari e positivi in $C[a, b]$ si abbia uniformemente in $[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n(f) = f(x) \quad \text{per ogni} \quad f \in C[a, b]$$

è che tale relazione sussista per le tre funzioni 1, t, t^2; cioè che

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n(t^k) = x^k \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2.$$

Discutiamo ora la nostra formula e cioè

(1) $$\lim_{n\to\infty} C_n(x)[\mathcal{L}_n(f) - f(x)] = A(x)f^{(p)}(x)$$

I. - Sia $\lim\limits_{n\to\infty} C_n(x) = +\infty$.

Allora per il teorema su menzionato si ha $\mathcal{L}_n(f) \to f$ per $n \to \infty$. In particolare prendendo $C_n(x) = n$ si possono dimostrare le note formule asintotiche del tipo

$$\lim_{n\to\infty} n[\mathcal{L}_n(t) - f(x)] = A(x)f''(x)$$

valide per una vasta classe di operatori positivi, (polinomi di BERNSTEIN e altri).

Si noti inoltre che se avviene che $\mathcal{L}_n(\psi) \equiv \psi(x)$ per ogni polinomio $\psi(x)$ di grado non superiore a $s-1$, sarà $p = s$, dovendo essere il 2° membro della (1) per tali funzioni identicamente nullo.

Sia $\lim\limits_{n\to\infty} C_n(x) = C(x)$, con $C(x) > 0$.

Allora la successione $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ converge, ma non a $f(x)$, bensì a $f(x) + \dfrac{A(x)}{C(x)} f^{(p)}(x)$; in particolare se $A(x) \equiv C(x) \equiv 1$ si avrà

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n(f) = f(x) + f^{(p)}(x).$$

Se $A(x) = 0$ e $p = 1$, si ottiene il teorema di KOROVKIN, però sotto la condizione più restrittiva che $f(x) \in C^1[a, b]$.

Sia $\lim\limits_{n\to\infty} C_n(x) = 0$; $A(x) \not\equiv 0$.

Allora la successione $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ diverge; e la (1) sarà atta a studiare tale divergenza.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. C. LORENTZ, *Bernstein polynomials*, Math. Exp. N. 8, Toronto (1953).

[2] P. P. KOROVKIN, *Linears operators and approximation theory*, Hind. publ. corp., Delhi (1960).

[3] R. G. MAMEDOV, *Valutazione asintotica dell'approssimazione di funzioni più volte differenziabili mediante operatori lineari positivi* (In russo), Dokl. Akad. Nank. SSSR, 146 (1962), pagg. 1013-1016, (Math. rev. 25 ≠ 4293).

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 12 aprile 1967