Bollettino Unione Matematica Italiana

Claudio Rea

Un'osservazione sulle deformazioni di una varietà completa.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 345–349.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_345_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Un'osservazione sulle deformazioni di una varietà completa.

CLAUDIO REA (Pisa) (*)

Sunto. - *Si vuol dimostrare che una famiglia differenziabile di deformazioni, triviale all'infinito, di una varietà riemanniana o connessione lineare completa ammette una restrizione formata da varietà tutte complete.*
La necessità dell'ipotesi di trivialità all'infinito è provata con un contresempio.

DEFINIZIONE 1. - Una successione di CAUCHY $\{p_k\}$ di una varietà riemanniana o a connessione lineare M dicesi geodetica, se i suoi punti appartengono definitivamente ad una medesima geodetica γ di M (cioè se si ha $p_k \in \gamma$, per ogni k più grande di un certo k_0), se poi si può scrivere $p_i = \operatorname{Exp} s_i X$, ove X è un vettore tangente a γ, e $\{s_i\}$ è una successione numerica convergente, allora si dice che $\{p_i\}$ è di CAUCHY. Nel caso Riemanniano ciò equivale alla usuale condizione di CAUCHY.

Una successione di CAUCHY geodetica in M è tale in ogni sottovarietà M' di M che contenga γ, non altrettanto può dirsi per una qualunque successione di CAUCHY.

LEMMA 1. - *Se tutte le successioni di Cauchy geodetiche della varietà riemanniana o a connessione lineare M sono convergenti, M è completa.*

DIMOSTRAZIONE. - Nell'ipotesi assunta ogni geodetica di M è completa e pertanto indefinitivamente prolungabile, dunque M è essa stessa completa.

DEFINIZIONE 2. - Un fibrato differenziabile $\mathcal{W} \xrightarrow{\omega} B$ dicesi essere una *famiglia differenziabile di deformazioni* della varietà riemanniana (M, g) se sono dati

α) Una metrica riemmaniana g_t sulle fibre $M_t = \omega^{-1}(t)$, per ogni $t \in B$.

β) Un punto $0 \in B$, con $(M_0, g_0) \simeq (M, g)$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca N. 35 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

γ) Per ogni punto $x \in \mathcal{W}$ un intorno W e un diffeormismo $\varphi: W \longrightarrow M_0 \times B$, in modo che sia $pr_2 \circ \varphi = \omega$ e che, per ogni $t \in \omega W$, $\varphi / W \cap M_t$ sia una isometria di $W \cap M_t$ su una sottovarietà aperta della copia $M_0 \times \{ t \}$ di M_0. La coppia (W, φ) dicesi essere una «carta» per la deformazione $\mathcal{W} \longrightarrow B$.

Sia U un intorno aperto di 0 in B, la restrizione $\mathcal{W}/U = \omega^{-1}(U) \longrightarrow U$ di $\mathcal{W}$ a U è ancora una famiglia differenziabile di deformazioni di (M, g), e dicesi *restrizione* (ad U) della deformazione $\mathcal{W} \xrightarrow{\omega} B$.

Una famiglia differenziabile di deformazioni della varietà riemanniana (M, g) dicesi *triviale all'infinito,* se si può trovare un compatto $K_0 \subset M_0$ ed una applicazione continua

$$\tilde{T}: [(M_0 - K_0) \times B] \cup [(\overline{M_0 - K_0}) \times \{ 0 \}] \longrightarrow \mathcal{W}$$

in modo che la sua restrizione T a $(M_0 - K_0) \times B$ sia un diffeomorfismo soddisfacente le condizioni

δ) $\omega \circ T = pr_2$.

ε) La sua restrizione T_t a $(M_0 - K_0) \times \{ t \}$ è un'isometria su una sottovarietà aperta di M_t, che, per $t = 0$, si riduce all'identità su M_0.

ζ) La restrizione di ω a $\mathcal{W} - \mathfrak{Im}\, T$ è propria.

Le definizioni di deformazione e di trivialita all'infinito si ripetono nel caso delle connessioni con la sola sostituzione di «isomorfismo di connessioni» in luogo di «isometria».

Lemma 2. - *Sia $\mathcal{W}$ triviale all'infinito. È possibile trovare un intorno aperto U di 0 in B, un aperto $V \subset\subset M_0$, $V \supset K_0$, e un insieme $W \subset\subset \mathcal{W}$ contenente $\omega^{-1} U - \mathfrak{Im}\, T$, in modo che sia $T[(\overline{V} - K_0) \times U] \subset W$ e $\omega W = U$.*

Dimostrazione. - Indichiamo con ∂K_0 la frontiera di K_0 in M_0. Fissiamo per ogni $k \in \partial K_0$ un intorno $W_k \subset\subset \mathcal{W}$ e un intorno $V_k \times B_k$ di $k \times \{ 0 \}$ in $M_0 \times B$, in modo che sia $V_k \subset\subset M_0$, $B_k \subset\subset B$ e $\tilde{T} \{ [(\overline{V}_k - K_0) \times B_k] \cup [(\overline{V}_k - \overset{\circ}{K}_0) \times \{ 0 \}] \} \subset W_k$, in particolare $T[(\overline{V}_k - K_0) \times B_k] \subset W_k$.

$\{ V_k \}_{k \in \partial K_0}$ è un ricoprimento aperto di ∂K_0 in M_0 e $\{ W_k \}_{k \in \partial K_0}$ è un ricoprimento aperto di ∂K_0 in $\mathcal{W}$. Si può scegliere un numero finito di punti $k_1, \ldots, k_\nu$ in ∂K_0 in modo che sia

$$V_{k_1} \cup \cdots \cup V_{k_\nu} \supset \partial K_0, \qquad W_{k_1} \cup \cdots \cup W_{k_\nu} \supset \partial K_0.$$

Poniamo

$$U = B_{k_1} \cap \dots \cap B_{k_\nu}, \qquad V' = V_{k_1} \cup \dots \cup V_{k_\nu},$$

$W' = (W_{k_1} \cup \dots \cup W_{k_\nu}) \cap \omega^{-1}U$. Si ha $T[(\overline{V}' - K_0) \times U] \subset W'$ da cui $\omega W' \supset \omega T[(\overline{V}' - K_0) \times U] = pr_2[(\overline{V}' - K_0) \times U] = U$, siccome è anche $\omega W' \subset U$, deve aversi $\omega W' = U$. D'altra parte V' è un aperto relativamente compatto di M_0 e $V' \supset \partial K_0$, pertanto $V = V' \cup K_0$ è un aperto relativamente compatto in M_0 ed essendo $\overline{V} - K_0 = \overline{V}' - K_0$, si ha $T[(\overline{V} - K_0) \times U] \subset W'$.

L'insieme $W = W' \cup [\omega^{-1}U - \Im m T]$ è relativamente compatto ed essendo $\omega W = \omega W' = U$, esso soddisfa tutte le condizioni richieste.

TEOREMA 1. - *Ogni famiglia differenziabile di deformazioni, triviale all'infinito, di una varietà riemanniana o a connessione lineare completa ammette una restrizione le cui fibre sono varietà complete.*

DIMOSTRAZIONE. - Siano U, V, W gli insiemi costruiti nel lemma 2, proviamo che (M_t, g_t) è completa per ogni $t \in U$. Sia infatti $\gamma_t(s_i)$ una successione di CAUCHY geodetica in M_t.

Se l'insieme $\overline{W} \cap (\bigcup_i \{\gamma_t(s_i)\})$ è infinito, la successione converge per la compattezza di $\overline{W}$. Possiamo dunque supporre $\{\gamma_t(s_i)\} \subset M_t - \overline{W} \subset T[(M_0 - \overline{V}) \times \{t\}]$.

Sia $l = \lim \{s_i\}$. È lecito supporre $0 \leq s_i < l$ e $\{s_i\}$ crescente. Possono darsi due casi:

I. - Esiste un numero l', $0 \leq l' < l$, tale che $\gamma_t(s) \notin \overline{W}$ se $l' \leq s < l$.

II. - Esiste una successione $\{l_h\} \to l$, $0 \leq l_h < l$ con $\gamma_t(l_h) \in \overline{W}$.

Nel caso II deve esistere $p = \lim \{\gamma_t(l_h)\} \in \overline{W}$. La successione ottenuta alternando le $\gamma_t(s_i)$ e le $\gamma_t(l_h)$ è di CAUCHY ed ha limite p come pure la sua sottosuccessione $\gamma_t(s_i)$.

Nel caso I i punti $\gamma_t(s_i)$ sono definitivamente in $M_t - \overline{W}$. Sia allora $\gamma_t(s_i) = T[\gamma_0(s_i), \{t\}]$; la successione $\{\gamma_t(s_i)\}$ è geodetica anche in $M_t \cap \Im m T$ perchè i suoi elementi sono definitivamente appartenenti alla restrizione di γ_t all'intervallo $l' \leq s \leq l$ la cui immagine è in $M_t \cap \Im m T$ (se invece fosse semplicemente di CAUCHY in M_t non sarebbe a priori tale in $M_t \cap \Im m T$). La successione $\{\gamma_0(s_i)\} \subset \subset M_0 - \overline{V}$ è dunque di CAUCHY e geodetica in $M_0 - K_0$ e in M_0. Si ha $\gamma_0(l) = \lim \gamma_0(s_i) \in M_0 - V \subset M_0 - K_0$.

Per la continuità di T_t in $M_0 - K_0$ esiste dunque $\lim \gamma_t(s_i)$ ed esso coincide con $T[\gamma_0(l) \times \{t\}]$.

LEMMA 3. – *Sia $g(x,t)$ una funzione C^∞ positiva, definita sul piano $\mathcal{W}$ delle variabili x e t. Posto $M_t = pr_2^{-1}t$, le coppie $(M_t,\ g(x,\ t))$ costituiscono una deformazione $\mathcal{W} \xrightarrow{pr_2} \boldsymbol{R}$ della varietà riemanniana $(M_0,\ g(x,\ 0))$.*

DIMOSTRAZIONE. – Si ponga $F(x,\ t) = \int_0^x g(\xi,\ t)d\xi$, $\mathcal{F}(x,\ t) = (F(x,\ t),\ t)$, $\mathcal{F}_0(x,\ t) = (F(x,\ 0),\ t)$; si sono così ottenute due applicazioni $\mathcal{F}: \mathcal{W} \longrightarrow \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ e $\mathcal{F}_0 : M_0 \times \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, entrambe differenziabili. Tenuto conto che $F_x(x,\ t) = g(x,\ t)$, le matrici jacobiane di queste due applicazioni sono rispettivamente $\begin{pmatrix} g(x,\ t) & F_t(x,\ t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} g(x,\ 0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pertanto entrambe non degeneri.

Si fissi ora $(\bar{x},\ \bar{t}) \in \mathcal{W}$, è possibile trovare gli intorni: W di $(\bar{x},\ \bar{t})$ in $\mathcal{W}$ e N di $\mathcal{F}(\bar{x},\ \bar{t})$ in $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$, un punto $(x_0,\ \bar{t})$ di $M_0 \times \bar{t}$, un suo intorno U in modo che $\mathcal{F}: W \longrightarrow N$ e $\mathcal{F}_0 : U \longrightarrow N$ siano omeomorfismi differenziabili (i.e. C^∞) assieme ai lori inversi.

Posto $\varphi = (\mathcal{F}_0^{-1}/N) \circ (\mathcal{F}/W) : W \longrightarrow U$, deve aversi $pr_2 \circ \varphi = pr_2$, perchè questa condizione è già soddisfatta da $\mathcal{F}_0$ (quindi da $\mathcal{F}_0^{-1}/N$) e da $\mathcal{F}$.

Pertanto la φ può scriversi in termini di coordinate $\varphi(x,\ t) = (f(x,\ t),\ t)$ e si ha $\mathcal{F}_0[f(x,\ t),\ t] = \mathcal{F}(x,\ t)$.

Si noti ora che, indicata con d_t la funzione distanza in M_t, e posto per semplicità $d_t[(x,\ t),\ (y,\ t)] = d_t(x,\ y)$, si ha

$$d_t(x,\ y) = |\,F(x,\ t) - F(y,\ t)\,|.$$

Proviamo ora che φ è una carta di deformazione per $\mathcal{W}$. Siano infatti $(x,\ t),\ (y,\ t) \in W$.

$$\begin{aligned} d_0(\varphi(x,\ t),\ \varphi(y,\ t)) &= |\,F[f(x,\ t),\ 0] - F[f(y,\ t),\ 0]\,| = \\ &= |\,pr_1\mathcal{F}_0[f(x,\ t),\ t] - pr_1\mathcal{F}_0[f(y,\ t),\ t]\,| = \\ &= |\,pr_1\mathcal{F}(x,\ t) - pr_1\mathcal{F}(y,\ t)\,| = |\,F(x,\ t) - F(y,\ t)\,| = d_t(x,\ y). \end{aligned}$$

CONTRESEMPIO. – Sia $\mu(x)$ una funzione differenziabile su $\boldsymbol{R}$ soddisfacente le condizioni $\mu(x)=0$ per $|x| \leq 1/2$, $\mu(x)=1$ per $|x| \geq 1$, e $\dfrac{d\mu}{d\,|x|} \geq 0$.

Consideriamo la famiglia differenziabile di deformazioni individuata sul piano dalla funzione C^∞

$$g(x,\ t) = \frac{\mu(x)}{|\,x\,|^{1+t^2}} + 1 - \mu(x), \qquad g(0,\ t) = 1.$$

Usando le notazioni del lemma precedente notiamo che, indicati con a_t e b_t il massimo e il minimo di $g(x,\ t)$ per $-1 \leq x \leq 1$, è $0 < b_t < a_t$ e si ha $b_t \leq d_t(0,\ 1) = d_t(-1,\ 0) \leq a_t$.

La varietà M_0 è completa perchè le lunghezze dei suoi raggi massimali uscenti da 0 sono date da

$$\int_0^\infty g(\xi,\ 0)d\xi \geq b_0 + \lim_{p\to\infty}\int_1^p \frac{d\xi}{\xi} = \infty.$$

Le varietà M_t $(t \neq 0)$ non sono complete perchè la lunghezza dei loro due raggi massimali uscenti da 0 è data da

$$\int_0^\infty g(\xi,\ t)d\xi \leq a_t + \lim_{p\to\infty}\int_1^p \frac{d\xi}{|\,\xi\,|^{1+t^2}} = a_t + \frac{1}{t^2}\cdot$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI-E. VESENTINI, *On deformation of discontinuous groups*, Acta Mathematica 112, (1964), pp. 249-298.

[2] H. GARLAND, *On deformation of discrete groups in the non-compact case.* Proc. of. Symp. on pure and Applied Math. A.M.S. Vol. 9, (1966), pp. 129-136.

[3] M. S. RAGHUNATHAN, *Deformations of linear connections and Riemannian manifolds*, Jour. of. Math. and Mech. 13, (1964), pp. 97-123.

[4] — —, *A vanishing theorem for the cohomology of arithmetic subgroups of algebraic groups*, (deve uscire).

[5] A. WEIL, *On discrete subgroups of Lie groups*, Ann. of Math. 72, (1960), pp. 369-384.

[6] — —, *On discrete subgroups of Lie groups* II, Ann. of Math. 75, (1962), pp. 578-602.

[7] — —, *Remarks on the cohomology of groups*, Ann. of Math. 80, (1964), pp. 149-157.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 3 maggio 1967