G. Da Prato, E. Giusti

Una caratterizzazione dei generatori di funzioni coseno astratte.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 357–362.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_357_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Una caratterizzazione dei generatori di funzioni coseno astratte.

G. Da Prato – E. Giusti (Pisa) (*)

Sunto. - *Si dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè un operatore generi una funzione coseno in spazi di Banach.*

1. Sia X uno spazio di Banach con norma $\|\cdot\|$. Un'applicazione $C: t \longrightarrow C(t)$ della retta reale $\boldsymbol{R}$ nell'algebra $\mathcal{L}(X, X)$ (1) degli operatori lineari e continui su X è una «funzione coseno» [3] se sono verificate le seguenti condizioni:

(1) $\qquad C$ è fortemente continua

(2) $$C(t+t') + C(t-t') = 2C(t)C(t') \qquad \forall\, t,\ t' \in \boldsymbol{R}$$

(3) $$C(0) = I.$$

Si dimostra [4] [1] che una tale C cresce al più esponenzialmente; cioè che esiste una costante $\omega \geq 0$ tale che

(4) $$\| C(t) \| \leq M e^{\omega |t|} .$$

Il generatore infinitesimale A di C è

(5) $$Ax = C''(0)x$$

ed ha dominio

(6) $$D(A) = \{ x \in X : C(\cdot)x \in C^2(\boldsymbol{R}; X) \} \ (2)$$

A è un operatore chiuso con dominio denso in X.

La funzione coseno è connessa allo studio del problema di

(*) Lavoro svolto nell'ambito del gruppo di ricerca n° 46 del C.N.R.

(1) Salvo contrario avviso $\mathcal{L}(X, X)$ si supporrà munito della topologia forte.

(2) $C^2(\boldsymbol{R}; X)$ è lo spazio delle funzioni su $\boldsymbol{R}$ a valori in X due volte differenziabili con continuità nella topologia di X.

CAUCHY per l'equazione delle onde astratta [1]:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dt^2} = Au \\ u(0) = u_0 \qquad u'(0) = v_0 . \end{array}\right. \tag{7}$$

Detta F la trasformata di LAPLACE di C:

$$F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t) dt \qquad Re\,\lambda > \omega$$

si ha

$$F(\lambda) = \lambda R(\lambda^2, A) \tag{9}$$

dove R è il risolvente di A.

In questa nota daremo una caratterizzazione del generatore infinitesimale A di C, dimostrando il seguente teorema:

TEOREMA. - *Sia A un operatore lineare chiuso in uno spazio di Banach X con dominio D_A denso in X. Condizione necessaria e sufficiente affinchè A sia generatore infinitesimale di una funzione coseno è che, posto $F(\lambda) = \lambda R(\lambda^2, A)$, esistano due costanti $M > 0$ ed $\omega \geq 0$ tali che per ogni λ con $Re\lambda > \omega$ si abbiano le maggiorazioni*:

$$\| F^{(k)}(\lambda) \| \leq \frac{M\,k!}{(Re\,\lambda - \omega)^{k+1}} . \tag{10}$$

Il seguito del lavoro sarà dedicato alla dimostrazione del teorema.

2. Si vede subito che le condizioni (10) sono necessarie. Basta infatti derivare sotto il segno di integrale la (8) e usare la (4). Si tratta quindi di dimostrare la sufficienza. Sia allora A un operatore lineare chiuso con dominio $D(A)$ denso in X e tale che $F(\lambda) = \lambda R(\lambda^2, A)$ verifichi le (10).

Osserviamo innanzitutto che A è generatore infinitesimale di un semigruppo G di classe $H\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ [2]. Si ha infatti

$$R(\lambda, A) = \frac{F(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} \quad (^3) \tag{11}$$

(3) Si sceglie la determinazione della radice in modo tale che $Re\,\lambda > 0 \Rightarrow Re\sqrt{\lambda} > 0$.

e, posto $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$ $(|\theta| < \pi)$:

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} |\lambda| \, \| R(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{\cos \theta/2}. \tag{12}$$

Poniamo ora

$$\Gamma_{\pm} = \{ \lambda \in C : \lambda = \varepsilon + \tau e^{\pm i\theta} ; \; 0 \leq \tau \leq +\infty \} \tag{13}$$

dove θ ed ε sono due numeri verificanti le relazioni $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ed $\varepsilon > \frac{\omega}{\operatorname{sen}^2 \theta}$.

Sia Γ il cammino $\Gamma_+ \bigcup \Gamma_-$ percorso in modo da lasciare a sinistra l'origine; introduciamo le funzioni ausiliare:

$$C(t, s) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \cos \sqrt{-\lambda} \, t \, e^{\lambda s} R(\lambda, A) d\lambda \qquad (t \in \boldsymbol{R}, \; s > 0) \tag{14}$$

$$C_n(t, s) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{\frac{n\lambda t}{n^2 - \lambda}} \cos \left(\frac{n^2 \sqrt{-\lambda t}}{n^2 - \lambda} \right) e^{\lambda s} R(\lambda, A) d\lambda \quad (t \geq 0, \, s > 0). \tag{15}$$

Ricordando la (12) si prova facilmente che

$$\lim_{n \to \infty} C_n(t, s) = C(t, s). \tag{16}$$

Definiamo infine le seguenti «funzioni approssimanti»:

$$C_n(t) = e^{-nt} \left\{ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n^2 t)^{k+1}}{k! \, (k+1)!} F^{(k)}(n) \right\} (t \geq 0, \quad n > \omega) \tag{17}$$

ed osserviamo che, in virtù delle (10), si ha:

$$\| C_n(t) \| \leq M e^{\omega t}. \tag{18}$$

Lemma 1. - *Si ha l'identità*:

$$C_n(t) G(s) = C_n(t, s) \qquad t \geq 0, \; s > 0. \tag{19}$$

Dim. - Poichè G è analitico, si ha:

$$G(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{\lambda s} R(\lambda, A) d\lambda \tag{20}$$

e quindi

$$F(n) G(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma n e^{\lambda s} R(n^2, A) R(\lambda, A) d\lambda \tag{21}$$

Usando l'identità del risolvente:

$$F(n)G(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{ne^{\lambda s}}{n^2-\lambda}[R(\lambda,\ A)-R(n,\ A)]d\lambda = \tag{22}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{ne^{\lambda s}}{n^2-\lambda}R(\lambda,\ A)d\lambda$$

essendo

$$\int_\Gamma \frac{e^{\lambda s}}{n^2-\lambda}d\lambda=0.$$

Posto

$$F_{\pm}(n,\ s)=\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda s}}{n\pm\sqrt{\lambda}}R(\lambda,\ A)d\lambda \tag{23}$$

si ha

$$F_{\pm}^{(k)}(n,\ s)=\frac{k\,!\,(-1)^k}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda s}}{(n\pm\sqrt{\lambda})^{k+1}}R(\lambda,\ A)d\lambda \ \text{[4]} \tag{24}$$

$$F^{(k)}(n)G(s)=F_{+}^{(k)}(n,\ s)+F_{-}^{(k)}(n,\ s). \tag{25}$$

Dalle (17) e (25) si ottiene

$$C_n(t)G(s)=L_n^{+}(t,\ s)+L_n^{-}(t,\ s) \tag{26}$$

dove si è posto

$$L_n^{\pm}(t,\ s)=e^{-nt}\left\{\frac{G(s)}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n^2t)^{k+1}}{k\,!\,(k+1)\,!}F_{\pm}^{(k)}(n,\ s)\right\} \tag{27}$$

e, introducendo la (20) e la (24):

$$L_n^{\pm}(t,s)=\frac{e^{-nt}}{4\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n^2t)^k}{k\,!}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda s}}{(n\pm\sqrt{\lambda})^k}R(\lambda,\ A)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma e^{\pm\frac{n\sqrt{\lambda}t}{n\pm\sqrt{\lambda}}+s\lambda}R(\lambda,\ A)d\lambda.$$

La tesi segue allora dalla (26).

PROPOSIZIONE 1. - *Esiste* $C(t)=\lim\limits_{n\to\infty}C_n(t)$ *e* $C(\cdot)$ *è una funzione continua.*

DIM. - Posto

$$Y=\bigcup_{s>0}G(s)X$$

Y è denso in X.

[4] Le derivate sono intese rispetto alla prima variabile.

Se $y \in Y$ poniamo

$$C(t)y = \lim_{n \to \infty} C_n(t)y.$$

Tale limite esiste: infatti $y = G(s)x$ per qualche $s > 0$ e per qualche $x \in X$, per cui

$$C_n(t)y = C_n(t, s)x \longrightarrow C(t, s)x.$$

D'altra parte $\| C_n(t) \| \leq Me^{\frac{\omega n t}{n-\omega}} \leq Me^{\omega_1 t}$ per $\omega_1 > \omega$ non appena n è abbastanza grande e quindi si può porre:

$$C(t)x = \lim_{n \to \infty} C_n(t)x \qquad \forall x \in X. \tag{28}$$

Per il teorema di Banach-Steinhaus $C(t) \in \mathcal{L}(X, X)$ per ogni $t \geq 0$ e $\| C(t) \| \leq Me^{\omega t}$ (5).

La funzione $C(t)x$ è continua per ogni $x \in X$; infatti ciò è evidente se $x \in Y$, e segue per tutti gli $x \in X$ dalla equilimitatezza sui compatti di $\| C(t) \|$.

Abbiamo così costruito una funzione $C(t)$ per $t \geq 0$. Osserviamo che $C(0) = I$. Infatti è chiaro dalla dimostrazione precedente che vale l'identità

$$C(t)G(s) = C(t, s) \tag{29}$$

da cui ricordando la (14) si ottiene $C(0) = I$ su Y e quindi su X.

Per $t < 0$ poniamo

$$C(t) = C(-t). \tag{30}$$

Proposizione 2. - *Si ha l'identità:*

$$C(t + t') + C(t - t') = 2C(t)C(t') \tag{31}$$

Dim. - In virtù della (29) basterà dimostrare che

$$C(t + t', s + s') + C(t - t', s + s') = 2C(t, s)C(t', s'). \tag{32}$$

Si ha

$$C(t, s)C(t', s') = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} d\mu \int_{\Gamma} \cos \sqrt{-\lambda}\, t \cos \sqrt{-\mu}\, t' e^{\lambda s + \mu s'} \times$$
$$\times R(\lambda, A) R(\mu, A) d\lambda \text{ (6)}$$

(5) Infatti $\| C(t) \| \leq Me^{\omega_1 t}$ per ogni $\omega_1 > \omega$.

(6) Osserviamo che per θ fissato la funzione $C(t, s)$ non dipende da ε.

dove

$$\Gamma' = \Gamma + 1 = \{\mu \in C : \mu = \lambda + 1, \ \lambda \in \Gamma\}.$$

In virtù dell'identità del risolvente

$$C(t, s)C(t', s') = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \cos \sqrt{-\mu}\, t' e^{\mu s'} d\mu \int_{\Gamma} \cos \sqrt{-\lambda}\, t e^{\lambda s} \times$$
$$\times \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\mu - \lambda} d\lambda =$$
$$= \int_{\Gamma} \cos \sqrt{-\lambda}\, t \cos \sqrt{-\lambda}\, t' e^{\lambda(s+s')} R(\lambda, A) d\lambda$$

e la tesi segue dalle proprietà delle funzioni $\cos \sqrt{-\lambda}\, t$.

Resta ora da dimostrare che la «funzione coseno» $C(t)$ così costruita ha per generatore A.

Basterà per questo dimostrare che la trasformata di LAPLACE di $C(t)$ è $F(\lambda)$.

PROPOSIZIONE 3. - *Per tutti i* $\mu \in \mathbf{C}$ *con* $Re\, \mu > \omega$ *si ha*:

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} C(t) dt = F(\mu). \tag{33}$$

DIM. - Segue, passando al limite, dall'identità

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} C_n(t) dt = \frac{1}{\mu + n} + \frac{n^2}{(\mu + n)^2} F\left(\frac{\mu n}{\mu + n}\right) \tag{34}$$

valida per tutti i μ con $Re \frac{\mu n}{\mu + n} > \omega$.

La (34) deriva immediatamente dalla (17) integrando per serie ed osservando che $F(\lambda)$ è analitica per $Re\, \lambda > \omega$.

Dopo l'invio del lavoro siamo venuti a conoscenza di un lavoro di M. SOVA (*Cosine operator functions*, «Rozprawy Matematyczne» (1966)) in cui i nostri risultati sono provati con metodo diverso.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. C. FATTORINI, *The Cauchy problem for differential equation of any order in linear topological spaces*, preprint.

[2] E. HILLE, R. S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semi-Groups*, «Colloq. Publ. Amer. Math. Soc.», *31* (1957).

[3] S. KUREPA, *A cosine functional equation in Banach algebras* «Acta Sc. Math.» (Szeyed) *23* (1962).

[4] S. KUREPA, *A cosine functional equation in Hilbert spaces*, «Com. J. Math.», *12* (1960).

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 20 maggio 1967