…
Bollettino Unione Matematica Italiana

Salvatore Coen

Sul rango dei fasci coerenti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 373–382.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_373_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Sul rango dei fasci coerenti.

SALVATORE COEN (Mantova)

Sunto. - *Si danno condizioni perchè tutte le spighe di un fascio coerente, su uno spazio analitico complesso a dimensione finita, siano generate da un numero finito di sezioni globali del fascio. Si trova, così, sotto certe condizioni, una formulazione forte del teorema A e si ritrovano, come casi particolari, alcuni teoremi di Grauert e di Sorani-Villani.*

Introduzione.

Sia X uno spazio analitico complesso di dimensione finita n, a base numerabile; sia $\mathcal{O}_X$ il suo fascio strutturale ed $\mathcal{F}$ sia un fascio analitico coerente su X.

Supponiamo che $\Gamma(X, \mathcal{F})$ generi per ogni $x \in X$ le spighe $\mathcal{F}_x$; tale è il caso in cui X è uno spazio di STEIN (Teorema A di H. CARTAN v. [1]). Sia $r(x)$ il minimo numero di generatori di $\mathcal{F}_x$ come $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo e supponiamo che $\sup_{x \in X} r(x) \leq q$, q intero opportuno.

Ci poniamo il seguente problema: è sufficiente un numero finito di sezioni globali per generare $\mathcal{F}_x$ per ogni x?

In questo lavoro si dimostra che in tali ipotesi (anzi in una situazione leggermente più generale v. (3.3)) la risposta è affermativa e bastano $q(n+1)$ elementi di $\Gamma(X, \mathcal{F})$ per generare $\mathcal{F}_x$ per ogni $x \in X$.

Questo teorema permette di ritrovare come casi partioolari alcuni teoremi già noti di GRAUERT e di SORANI-VILLANI.

Punto di partenza per la mia trattazione è stato proprio il Lemma 2.9 di SORANI e VILLANI [5]. Mi sono state di aiuto le lezioni tenute a Pisa nell'ambito dei Seminari E. Elia Levi, dai proff. Andreotti, Salmon, Villani negli anni accademici 1961-62 e 1963-64.

Ringrazio i proff. Andreotti e Villani, i quali nei numerosi colloqui concessimi, mi hanno dato vari utili consigli.

1. Sia X uno spazio analitico complesso [1] $\mathcal{O}_X$ il fascio strutturale di X, $\mathcal{F}$ un fascio coerente su X; indicheremo con $\mathcal{F}_x$ la spiga di $\mathcal{F}$ nel punto x e con $r_{\mathcal{F}}(x)$ o semplicemente con $r(x)$ quando

[1] Gli spazi analitici che considereremo saranno tutti ridotti ed a base numerabile.

ciò non dia luogo ad equivoci, il rango di $\mathcal{F}_x$; per rango di $\mathcal{F}_x$ si intende il minimo numero di generatori di $\mathcal{F}_x$ considerato come $\mathcal{O}_{X,x}$–modulo.

Chiamiamo $\mathfrak{M}_x$ l'ideale massimale dell'anello $\mathcal{O}_{X,x}$, allora $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x$ si identifica con il corpo $\boldsymbol{C}$; inoltre $r_{\mathcal{F}}(x)$ è la dimensione dell'$\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x$–spazio vettoriale $\mathcal{F}_x/\mathfrak{M}_x \cdot \mathcal{F}_x$. Questa osservazione è una nota conseguenza del lemma di NAKAYAMA.

Per ogni aperto V contenuto in X, dotiamo il $\boldsymbol{C}$–spazio vettoriale $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)^m = \overset{m}{\underset{1}{\oplus}} \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ della topologia della convergenza uniforme sui compatti. Tale topologia è definita, al variare del compatto H in V, delle seminorme seguenti

$$\|(\eta_1, \ldots, \eta_m)\|_H = \sup_{1 \leq i \leq m} (\sup_{x \in H} |\eta_i(x)|) \tag{1.1}$$

se $(\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)^m$.

Per ogni fascio coerente $\mathcal{F}$ su X e per ogni aperto $V \subset X$, si dota $\Gamma(V, \mathcal{F})$, di una struttura di $\boldsymbol{C}$-spazio vettoriale topologico la cui topologia è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

(1.2) $\Gamma(V, \mathcal{F})$ è uno spazio di FRÉCHET

(1.3) Se $\mathcal{S}$ è un fascio corrente su X ed è dato un morfismo di fasci $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S}$, allora la applicazione lineare indotta $\Gamma(V, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{S})$ è continua;

(1.4) le applicazioni di restrizione sono continue;

(1.5) se $\mathcal{F}$ è un sottofascio di $\mathcal{O}_X^m$, allora $\Gamma(V, \mathcal{F})$ ha la topologia della convergenza uniforme sui compatti.

L'esistenza di una topologia definita da queste proprietà discende da un teorema di H. CARTAN ([2], Appendice I); l'unicità è assicurata dalla (1.3).

2. Sia F, munito della sua topologia naturale, la somma diretta di q copie di $\Gamma(X, \mathcal{F})$ cioè $F = \Gamma(X, \mathcal{F})^q$.

Con $F^{(x)}$ intendiamo l'insieme delle q-uple di sezioni globali i cui germi generano $\mathcal{F}_x$ come $\mathcal{O}_{X,x}$–modulo.

(2.1) LEMMA. - *Sia $x \in X$ tale che $F^{(x)} \neq \emptyset$ allora $F - F^{(x)}$ è magro e chiuso in F.*

DIMOSTRAZIONE. - Vediamo, anzitutto, che $F^{(x)}$ è aperto.

Sia V un aperto di STEIN contenente x, allora si ha una successione esatta

$$0 \longrightarrow \Gamma(V, \mathfrak{N}) \longrightarrow \Gamma(V, \overset{s}{\mathcal{O}}_X) \xrightarrow{\sigma} \Gamma(V, \mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

dove $\mathfrak{N}$ è un opportuno fascio coerente su X ed s un opportuno intero positivo.

Chiamiamo ε_i l'i-esimo vettore unitario di $\Gamma(V, \overset{s}{\mathcal{O}}_X)$, cioè $\varepsilon_i = (0, \cdot \underset{(i)}{(1)}, \cdot 0)$.

La applicazione σ è aperta per il teorema di BANACH; quindi anche l'applicazione naturale

$$\sigma^q : \Gamma(V, \overset{s}{\mathcal{O}}_X)^q \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{F})^q$$

è surgettiva ed aperta.

Si ha il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V, \overset{s}{\mathcal{O}}_X)^q & \xrightarrow{\sigma^q} & \Gamma(V, \mathcal{F})^q \\ & & \uparrow r_V^X \\ & & F \end{array}$$

ove r_V^X è la applicazione di restrizione.

Sia K un sottoinsieme compatto di V, tale che $\overset{\circ}{K} \ni x$ e sia A una costante positiva.

$$W_A = \{ \{ \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ji}\varepsilon_i \}_{1 \leq j \leq q} \in \Gamma(V, \overset{s}{\mathcal{O}}_X)^q \mid \| (\alpha_{ji}) \|_K < A \}$$

è un intorno aperto dell'origine in $\Gamma(V, \overset{s}{\mathcal{O}}_X)^q$, quindi $\sigma^q(W_A)$ è un intorno aperto dell'origine in $\Gamma(V, \mathcal{F})^q$ e perciò

$$U_A = (r_V^X)^{-1} \cdot \sigma^q(W_A)$$

è un aperto di F contenente l'origine.

Fissiamo $h = (h_1, \ldots, h_q) \in F^{(x)}$, allora in un intorno aperto W di x sufficientemente piccolo, si ha

$$\sigma(\varepsilon_i) = \sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij} h_j \qquad \text{per } 1 \leq i \leq s \tag{2.2}$$

ove $(\gamma_{ij}) \in \Gamma(W, \overset{s}{\mathcal{O}}_X)^q$.

Possiamo scegliere W e il compatto K precedentemente introdotto in modo che $K \subset W \subset V$.

Per ogni $(f_1, \ldots, f_q) \in U_A$ abbiamo

$$f_j = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ji}\sigma(\varepsilon_i) \quad \text{con} \quad \|(\alpha_{ji})\|_K < A$$

e perciò su W si ottiene

$$\sum_{1\leq j\leq q} \gamma_{ij} f_j = \sum_{\substack{1\leq j\leq q\\ 1\leq k\leq s}} \gamma_{ij}\alpha_{jk}\sigma(\varepsilon_k) \qquad \text{per } 1\leq i\leq s.$$

Da cui, ricordando la (2.2) e sommando, ricaviamo su W

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij}\alpha_{jk} + \delta_{ik}\right)\sigma(\varepsilon_k) = \sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij}(f_j + h_j); \tag{2.3}$$

δ_{ik} è il simbolo di KRONECKER.

Indichiamo con $\bar{A}$ una costante positiva tanto piccola che si abbia

$$\det\left(\sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij}\alpha_{jk} + \delta_{ik}\right) \neq 0$$

su tutto K quando $\sup_{z\in K} |\alpha_{jk}(z)| = \|\alpha_{jk}\|_K < \bar{A}$; che un tale $\bar{A}$ esista si prova semplicemente sviluppando il determinante sopra indicato.

Scegliendo comunque le α_{jk} in $\Gamma(V, \overset{s}{\mathcal{O}_X})^q$ purchè $\|\alpha_{jk}\|_K < \bar{A}$, la matrice $(\sum_{j=1}^{q} \gamma_{ij}\alpha_{jk} + \delta_{ik})$ è invertibile su $\overset{\circ}{K}$.

Possiamo allora concludere, ricordando la (2.3), che se $(f_1, \ldots, f_q) \in U_{\bar{A}}$, allora $(h_1 + f_1, \ldots, h_q + f_q)$ genera, mediante combinazioni lineari a coefficienti olomorfi, le $\sigma(\varepsilon_k)$ per $1\leq k\leq s$, ma queste ultime generano $\mathcal{F}_x$. Così $F^{(x)} \supset (h_1, \ldots, h_q) + U_{\bar{A}}$ cioè $F^{(x)}$ è aperto.

Vogliamo ora dimostrare che $F^{(x)}$ è denso in F.

Sia sempre h un fissato elemento di $F^{(x)}$, sia g un elemento arbitrario di F e sia, infine, U un intorno di g.

Osserviamo, anzitutto, che esiste una costante $k > 0$, tale che per $|\lambda| < k$ sia $g + \lambda h \in U$ [2].

In un intorno I di x si ha

$$g_j = \sum_{t=1}^{q} \varphi_{jt} h_t$$

con $1 \leq j \leq q$ e con $\varphi_{jt} \in \Gamma(I, \mathcal{O}_X)$; ciò perchè $h \in F^{(x)}$.

(2) Esiste, infatti, $\varepsilon > 0$ per cui $U \supset \{f \in F \mid p(f - g) < \varepsilon\}$ per una certa seminorma fondamentale $p(\;)$. Basta, allora, scegliere $k = \dfrac{\varepsilon}{p(h)}$.

Quindi su I abbiamo

$$g_j + \lambda h_j = \sum_{t=1}^{q} (\varphi_{jt} + \lambda\delta_{jt}) h_t .$$

Ora, $\det(\varphi_{jt} + \lambda\delta_{jt})(x)$ è un polinomio in λ di grado q, perchè il coefficiente di λ^q è 1. Esiste, perciò, un $\tilde{\lambda} \in \boldsymbol{C}$ per cui $|\tilde{\lambda}| < k$ e $\det(\varphi_{jt} + \tilde{\lambda}\delta_{jt})(x) \neq 0$; allora, in tutto un intorno $N \subset I$ di x, la matrice $(\varphi_{jt} + \tilde{\lambda}\delta_{jt})$ è invertibile. Possiamo, quindi, esprimere localmente in x le $(h_1, \dots, h_q)$ come combinazioni lineari a coefficienti olomorfi delle $(g_1 + \tilde{\lambda}h_1, \dots, g_q + \tilde{\lambda}h_q)$ e quindi, poichè $h \in F^{(x)}$, otteniamo finalmente $g + \tilde{\lambda}h \in F^{(x)}$, quindi $U \cap F^{(x)} \neq \emptyset$.

3. (3.1) TEOREMA. - *Sia X uno spazio di Stein a dimensione finita ed $\mathcal{F}$ sia un fascio analitico coerente su X. Supponiamo che esista $q \in \boldsymbol{N}$, tale che $r_{\mathcal{F}}(x) \leq q$ per ogni $x \in X$. Esiste, allora, un numero finito di sezioni globali di $\mathcal{F}$ che generano $\mathcal{F}_x$ per ogni $x \in X$.*

DIMOSTRAZIONE. - Se $\mathcal{F}$ è il fascio nullo, non c'è niente da dimostrare; per il seguito, perciò, supporemo $\mathcal{F} \neq 0$.

Facciamo, dapprima, la seguente osservazione: da ogni sistema $(g_1, \dots, g_t)$ di generatori di $\mathcal{F}_x$ si può estrarre un sistema di $r = r_{\mathcal{F}}(x)$ generatori.

Sia, infatti, $\psi : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x / \mathfrak{M}_x \cdot \mathcal{F}_x$ la applicazione canonica; si è già visto che si ha un isomorfismo di $\boldsymbol{C}$-spazi vettoriali $\mathcal{F}_x / \mathfrak{M}_x \cdot \mathcal{F}_x \simeq \boldsymbol{C}^r$.

Dal sistema di generatori $(\psi(g_1), \dots, \psi(g_t))$ di $\mathcal{F}_x / \mathfrak{M}_x \cdot \mathcal{F}_x$ estraiamo una base; non è restrittivo supporre che questa sia $(\psi(g_1), \dots, \psi(g_r))$; usando ancora il lemma di NAKAYAMA si vede che $(g_1, \dots, g_r)$ è un sistema di generatori di $\mathcal{F}_x$ [3].

[3] L'osservazione può essere fatta anche senza l'uso del lemma di NAKAYAMA. Siano, infatti, $(a_1, \dots, a_r)$ generatori locali; su un intorno U di x si ha per opportune $\alpha_{ji}, \beta_{kj} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$,

$$a_j = \sum_{i=1}^{t} \alpha_{ji} g_i , \qquad g_k = \sum_{j=1}^{r} \beta_{kj} a_j$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{t} \Big(\sum_{j=1}^{r} \beta_{kj}\alpha_{ji} - \delta_{ki} \Big) g_i = 0 \tag{3.2}$$

Ora $\big(\sum_{j=1}^{r} \beta_{kj}\alpha_{ji}\big)$ è una matrice funzionale $t \times t$, prodotto delle due matrici rettangolari (β_{kj}) ed (α_{ji}), quindi essa ha determinante nullo. Esistono allora due indici $\bar{i}$ e $\bar{k}$ per cui $\sum_{j=1}^{r} \beta_{\bar{k}j}\alpha_{j\bar{i}} \neq \delta_{\bar{k}\bar{i}}$, (in tutti i punti di un intorno di x). Esaminando la $\bar{k}$ relazione del sistema (3.2) si deduce che le sezioni g_i per $i \neq \bar{i}$ generano $\mathcal{F}_x$, il chè è assurdo.

Il teorema A assicura la esistenza di un numero finito di sezioni globali generanti $\mathcal{F}_x$; allora, come conseguenza della osservazione precedente, considerando, al solito, F ed $F^{(x)}$ come in (2.1), si ha $F^{(x)} \neq \emptyset$ e quindi è applicabile il lemma (2.1).

La topologia di X, essendo a base numerabile, assicura la esistenza di un insieme N_0 numerabile di punti X, denso in X.

Di conseguenza, poichè F, come spazio di Fréchet, è di 2ª categoria in sè ed $F - \bigcap_{x \in N_0} = \bigcup_{x \in N_0} (F - F^{(x)})$ è di 1ª categoria per il lemma (2.1), abbiamo $\bigcap_{x \in N_0} F^{(x)} \neq \emptyset$.

Allora esiste $f_{(0)} = (f_{01}, \dots, f_{0q}) \in F$ che, per ogni $x \in N_0$ genera $\mathcal{F}_x$.

Sia $\mathcal{G}$ il fascio le cui spighe $\mathcal{G}_x$ sono l'$\mathcal{O}_{X,x}$-modulo generato dalla q-upla anzidetta nel punto x. La applicazione naturale $\mathcal{G}_x \to \mathcal{F}_x$ è iniettiva, quindi $\mathcal{G}$ è un sottospazio di $\mathcal{F}$.

Il fascio $\mathcal{G}$, essendo di tipo finito, è allora coerente. Di conseguenza, $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ è pure un fascio coerente su X e quindi $Y_1 = \{x \in X \mid (\mathcal{F}/\mathcal{G})_x \neq 0\} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x$ non è generato da $f_{(0)}\}$ è un sottoinsieme analitico chiuso di X (v. [4] pag. 87, Prop. 6).

Inoltre Y_1 ha dimensione strettamente minore di quella di X, poichè il suo complementare è un sottoinsieme ovunque denso.

Sia N_1 un sottoinsieme numerabile denso di Y_1; si ha $\bigcap_{x \in N_1} F^{(x)} \neq \emptyset$.

Sia $f_{(1)} = (f_{11}, \dots, f_{1q}) \in \bigcap_{x \in N_1} F^{(x)}$. Con gli stessi metodi usati per trovare Y_1, mostriamo la esistenza di un sottoinsieme analitico Y_2 magro in Y_1 e tale che per ogni $x \in Y_1 - Y_2$, la q-upla $f_{(1)}$ generi $\mathcal{F}_x$. Si ha $\dim_C Y_2 < \dim_C Y_1 < \dim_C X$.

Ripetendo il procedimento $((\dim_C X) + 1)$ volte, otteniamo un insieme finito di sezioni globali su X le quali generano $\mathcal{F}_x$ per ogni $x \in X$; il numero di tali sezioni non supera $((\dim_C X) + 1)q$.

Servendoci degli stessi ragionamenti usati ora nella dimostrazione della (3,1), abbiamo più precisamente:

(3.3) Teorema. – *Siano X uno spazio analitico complesso, $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su X, A un aperto di X ed Y un sottoinsieme analitico chiuso di A. Supponiamo che*

1) $\dim_C Y = n$

2) *esista $q \in \mathbf{N}$, tale che $r_{\mathcal{F}}(y) \leq q$ per ogni $y \in Y$*

3) *$\Gamma(X, \mathcal{F})$ generi $\mathcal{F}_y$ come $\mathcal{O}_{X,y}$-modulo, per ogni $y \in Y$*

allora esiste un numero finito ($\leq q(n+1)$) di elementi di $\Gamma(X, \mathcal{F})$ che generano $\mathcal{F}_y$ per ogni $y \in Y$.

4. (4.1) Corollario. - *Sia X uno spazio analitico complesso; $Z \subset X$ il luogo degli zeri di un insieme di funzioni olomorfe globali su X; si abbia* $\dim_{\mathbf{C}}(X - Z) = n$; *allora. esiste un numero finito* $(\leq (n+1))$ *di funzioni olomorfe su X le quali definiscono Z come loro luogo degli zeri.*

Dimostrazione. - Sia $\mathfrak{J}(Z)$ il fascio degli ideali di Z in X: allora, $r_{\mathfrak{J}(Z)}(x) = 1$ per $x \in X - Z$. Il fatto che Z sia luogo di zeri di funzioni olomorfe globali significa che $\Gamma(X, \mathfrak{J}(Z))$ genera $\mathfrak{J}(Z)_x$ per ogni $x \in X - Z$. Ritroviamo, così, le ipotesi di (3.3) con $A = Y = X - Z$, $\mathcal{F} = \mathfrak{J}(Z)$ e $q = 1$; le funzioni di cui (3.3) assicura l'esistenza, sono quelle cercate.

Come conseguenza di (4.1) e del teorema A applicato al fascio $\mathfrak{J}(Z)$, ritroviamo il seguente risultato (per cui v. Grauert Math. Ann. 131. Satz 2).

(4.2) Proposizione. - *Se X è uno spazio di Stein e Z un sottoinsieme analitico chiuso,* $\dim_{\mathbf{C}}(X - Z) = n$, *allora bastano* $(n+1)$ *funzioni olomorfe su X a definire Z come loro luogo degli zeri.*

Un'altra conseguenza è espressa dal

(4.3) Corollario. - *Stesse ipotesi che nella* (3.1), *allora* $\Gamma(X, \mathcal{F})$ *è un* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$*-modulo finitamente generato.*

Dimostrazione. - È una nota applicazione del teorema B. Siano $h_1, \ldots, h_p$ le sezioni di cui la (3.1) assicura l'esistenza. L'applicazione $\alpha : \mathcal{O}^p \to \mathcal{F}$ associ h_i all'i-esimo vettore unitario di $\mathcal{O}^p$. Allora α è surgettiva, perciò $\ker \alpha$ è un fascio analitico coerente su X e nella successione esatta

$$\to \Gamma(X, \mathcal{O}_X^p) \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \ker \alpha) \to$$

si ha $H^1(X, \ker \alpha) = 0$ per il teor. B.

5. Sia X una varietà analitica complessa; sia $Y \subset X$ un sottoinsieme analitico; sia $\mathfrak{J}(Y)$ il fascio di ideali dei germi di funzioni olomorfe di X nulle su Y.

Si dice che Y è regolarmente immerso in $y \in Y$ se esiste un intorno $U(y)$ di y e un sistema di coordinate locali $w = (w_1, \ldots, w_n)$ in $U(y)$ tale che

$$Y \cap U(y) = \{ w \in U(y) \mid w_1 = \ldots = w_q = 0 \}.$$

In queste condizioni, risulta subito che, in y,

$$\mathfrak{I}(Y)_y = \mathcal{O}_{X,y}(w_1, \ldots, w_q)$$

quindi $r_{\mathfrak{I}(Y)}(y) = q = \operatorname{codim}_y Y$.

(5.1) Osservazione. - *a*) Condizione necessaria e sufficiente perchè Y sia regolarmente immerso in y è che esistano $f_1, \ldots, f_s \in \mathfrak{I}(Y)_y$ tali che

$$\operatorname{rango}\left(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_s)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}\right)_y = r(y) \tag{5.2}$$

ove $z_1, \ldots, z_n$ sono coordinate locali in un intorno di y.

b) In tal caso vale la (5.2) se e solo se $(f_1, \ldots, f_s)$ è un sistema di generatori di $\mathfrak{I}(Y)_y$.

Dimostrazione. - La dimostrazione della *b*) è compresa in quella della *a*).

Consideriamo la *a*): la condizione è chiaramente necessaria; proviamo la sufficienza.

Sia $(g_1, \ldots, g_{r(y)})$ un sistema minimale di generatori di $\mathfrak{I}(Y)_y$.

Si ha, in un opportuno intorno $U(y)$,

$$f_i = \sum_{j=1}^{r(y)} \alpha_{ij} g_j$$

con $\alpha_{ij} \in \Gamma(U(y), \mathcal{O}_X)$; da cui

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_k}(y) = \sum_{j=1}^{r(y)} \alpha_{ij}(y) \frac{\partial g_j}{\partial z_k}(y)$$

onde

$$\left(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_s)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}\right)_y = (\alpha_{ij}(y)) \left(\frac{\partial(g_1, \ldots, g_{r(y)})}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}\right)_y .$$

Per l'ipotesi rango $(\alpha_{ij}(y)) = r(y)$, quindi in un intorno di y si ha rango $(\alpha_{ij}) = r(y)$ e perciò le (g_j) si esprimono come combinazioni lineari delle (f_i), i.e. le (f_i) sono generatori di $\mathfrak{I}(Y)_y$.

Poichè le (f_i) possono essere comprese in un sistema di coordinate locali che non è restrittivo supporre sia $(w_1 = f_1, \ldots, w_{r(y)} = f_{r(y)}, w_{r(y)+1} = z_{r(y)+1}, \ldots, w_n = z_n)$, risulta che, in un intorno sufficientemente piccolo $W(y)$ di y si ha

$$Y \cap W(y) = \{ w \in W(y) \mid w_1 = \ldots = w_{r(y)} = 0 \}$$

e cioè Y è regolarmente immerso.

Si dice che un sottoinsieme analitico chiuso è una *sottovarietà* di X di codimensione q, se è regolarmente immerso e di codimensione q in tutti i suoi punti ([4]).

Si dice che una sottovarietà Y di X di codimensione q è *regolarmente immersa per mezzo di un numero finito di funzioni* $f_1, \ldots, f_s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, quando

$$Y = \{ x \in X \mid f_1(x) = \ldots f_s(x) = 0 \} \quad \text{e}$$

$$\operatorname{rango}\left(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_s)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}\right)_y = q \qquad \text{per ogni } y \in Y.$$

Ritroviamo ora il già citato Lemma 2.9 di [5] pag. 440.

(5.6) COROLLARIO (SORANI–VILLANI). – *Sia Y una sottovarietà di codimensione q di una varietà di Stein X, $\dim_{\mathbf{C}} X = n$. Allora Y è regolarmente immerso in X per mezzo di un numero finito di funzioni di* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

DIMOSTRAZIONE. – Sappiamo che $r_{\mathfrak{J}(Y)}(y) = q$ se $y \in Y$ ed $r_{\mathfrak{J}(Y)}(y) = 1$ se $y \notin Y$. Dal teorema (3.1) segue che esistono $s = q(n+1)$ elementi $f_1, \ldots, f_s$ di $\Gamma(X, \mathfrak{J}(Y))$ che generano $\mathfrak{J}(Y)_y$ per ogni $y \in X$, quindi

$$Y = \{ x \in X \mid f_1(x) = \ldots = f_s(x) = 0 \}.$$

Inoltre dalla osservazione precedente segue che, per queste funzioni, si ha

$$\operatorname{rango}\left(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_s)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}\right)_y = r(y) \qquad \text{per ogni } y \in Y.$$

Ciò dimostra l'assunto.

(5.7) OSSERVAZIONE. – Procedendo in modo leggermente diverso, la stessa conclusione si può ottenere con $s = (n - q + 1)q + 1 + n$ funzioni, applicando la (3.3). Entrambi questi limiti non rappresentano il minimo valore possibile di s. Se indichiamo con $[m]$ la parte intera del numero reale m, si riconosce che si può prendere $s \leq \left[\frac{n+q}{2}\right]$ se $q \geq 2$ e $s \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ se $q = 1$ (v. [3] teor. 9 pag. 160).

6. La seguente osservazione, valida in un qualunque punto x di uno spazio analitico complesso X, applicata al fascio $\mathfrak{J}(Y)$ introdotto in (5.1)*b*), generalizza quel «criterio dello jacobiano» ai punti singolari.

([4]) In tali condizioni, alcuni Autori dicono che Y è una sottovarietà *regolarmente immersa* di codimensione q (v. [5]).

(6.1) OSSERVAZIONE. – Sia $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su X; siano $g_1, \dots, g_{r(x)} \in \mathcal{F}_x$ un minimo numero di elementi di $\mathcal{F}_x$ generanti $\mathcal{F}_x$ come $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo: siano poi $f_1, \dots, f_s$ sezioni locali di $\mathcal{F}$ in x e $f_i = \sum_{j=1}^{r(x)} \alpha_{ij} g_j$; allora $(f_1, \dots, f_s)$ è un sistema di generatori locali se e solo se

$$\text{rango}\,(\alpha_{ij}(x)) = r(x).$$

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\psi : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x / \mathfrak{M}_x \cdot \mathcal{F}_x$ l'applicazione canonica.

Sul $\boldsymbol{C}$-spazio vettoriale $\mathcal{F}_x / \mathfrak{M}_x \cdot \mathcal{F}_x$ risulta

$$\psi(f_i) = \sum_{j=1}^{r(x)} \alpha_{ij}(x) \psi(g_j) \qquad \text{per } 1 \leq i \leq s.$$

La necessità dell'asserto è, ora, ovvia; che la condizione sia sufficiente si deduce dal lemma di NAKAYAMA (oppure, semplicemente, notando che in tutto un intorno abbastanza piccolo di x si ha rango $(\alpha_{ij}) = r(x)$).

Si noti che i numeri $\alpha_{ij}(x)$ sono sempre univocamente determinati dalle (f_i) e dalle (g_j).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI - E. VESENTINI, *Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets*, Séminaire Ehresmann, 1962/63.

[2] H. CARTAN, *Idéaux de functions analytiques de n variables complexes*, « Ann. Sci. Ecole Normale Sup. Paris », *61* (1944), pagg. 149-197.

[3] O. FORSTER - K. J. RAMSPOTT, *Analytische Modulgarben und Endromisbündel*, « Inventiones Math. », *2* (1966), pagg. 145-170.

[4] R. NARASIMHAN, *Introduction to the Theory of Analytic Spaces*, (Lectures notes in Mathematics, n. 25). Springer, (1966).

[5] G. SORANI - V. VILLANI, *q-complete Spaces and Cohomology*, « Transactions of the Am. Math. Soc. », 125 (1966), pagg. 432-448.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 22 giugno 1967