Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* Otton Martin Nikodým, The mathematical apparatus for Quantum-theories, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1966 (Antonio Pignedoli)
* H. Rund, The Hamilton-Jacobi theory in the Calculus of variations, Van Nostrand Company LTD, London, 1966 (Antonio Pignedoli)
* Michel Carvallo, Principes et applications de l'Analyse booléenne, Gauthier-Villars, Paris, 1965 (A. Pignedoli)
* M. D. Dumas De Rauly, Problémes de Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1963 (A. Pignedoli)
* A. L. Rabenstein, Introduction to ordinary differential equations, Academic Press, New York London, 1966 (Antonio Pignedoli)
* J. N. Butler, D. G: Borrow, The calculus of chemistry, with an introduction to computer programming, W. A. Benjamin Inc., New York Amsterdam (G. C. Barozzi)
* F. Brauer, J. Nohel, Ordinary Differential Equations, W. A. Benjamin Inc., New York Amsterdam (Roberto Conti)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 383–389.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_383_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

RECENSIONI

OTTON MARTIN NIKODÝM, *The mathematical apparatus for Quantum-theories*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1966, pp. 952, DM 144.

Il volume prende le mosse da una Memoria, dello stesso autore, pubblicata sugli Annali dell'Istituto H. Poincaré di Parigi e corrispondente a quattro conferenze tenute presso lo stesso Istituto. La Memoria si intitola: « Un nouvel appareil mathématique pour la théorie des quanta ». I metodi esposti in tale lavoro sono stati successivamente messi in rilievo, dal punto di vista fisico, da *G. Ludwig* ed applicati nel volume, di quest'ultimo, intitolato: « Die Grundlagen der Quantenmechanik ».

Il volume al quale si riferisce la presente recensione è costituito da ventinove capitoli. Va fatta, per il lettore, una osservazione circa le notazioni, osservazione che l'autore stesso raccomanda. L'autore stesso usa le notazioni usuali. Però occorre avvertire che egli sovrappone talvolta un punto ad una lettera per indicare che essa è variabile. Così, per esempio, l'autore indica con $f(\dot{x})$ una funzione della variabile x e con $f(a)$ il valore di tale funzione nel punto a. Inoltre usa il simbolo $A_{\dot{n}}$ per indicare la sequenza $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \ldots\}$ ed n per indicare quella $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ dei numeri naturali.

Il primo capitolo del volume, partendo da impostazioni largamente intuitive, riguarda la teoria dei reticoli booleani ed in ciò si vede già la novità della impostazione meccanico-quantica dell'opera: poichè i reticoli booleani, a parte la loro grande importanza nella moderna Analisi funzionale, non costituivano finora certamente mezzo matematico abituale per la Meccanica quantica.

Il capitolo successivo è dedicato alla esposizione di teoremi speciali sui reticoli booleani, in particolare proposizioni aventi carattere di estensione, relative alla teoria della misura; così il terzo capitolo contiene proposizioni « ausiliarie ».

Il capitolo quarto è dedicato alla teoria generale delle « tracce », che costituisce un importante ausilio per la teoria degli operatori normali nello spazio hilbertiano.

Il quinto capitolo riguarda uno studio dettagliato di speciali « tribes » (la parola « trible » ha per equivalente « algebra booleana ») di figure sul piano. Ciò per studiare poi la rappresentazione di operatori normali mediante operatori agenti su funzioni $f(Z)$ della variabile complessa Z.

Nel sesto capitolo ci si occupa di un importante teorema che occorre nella teoria della rappresentazione degli operatori massimali normali nello spazio di Hilbert. Il teorema viene raggiunto come conclusione del capitolo stesso e si chiama, appunto « teorema di traccia ».

Il settimo capitolo concerne il reticolo di sottospazi dello spazio di Hilbert-Hermite.

L'ottavo è dedicato alle « tribes » di spazi.

Nel successivo capitolo nono viene studiata una variazione della cosiddetta « decomposizione di identità ». In sostanza, il capitolo si suddivide in tre parti. La prima prende le mosse dalla nozione di « scala di spazi », la seconda riguarda « tracce » connesse con quella; la terza concerne la rappresentazione di vettori mediante funzioni. La materia è connessa con relazioni fra sottoinsiemi del piano complesso e con sottospazi chiusi dello spazio di Hilbert.

Il decimo capitolo riguarda gli operatori lineari permutabili con un « proiettore ». Vi si stabiliscono certi teoremi ausiliari, appunto, sui cosiddetti « proiettori », cioè su operatori che proiettano ortogonalmente l'intero spazio di Hilbert-Hermite su un dato sottospazio chiuso a.

Il capitolo decimoprimo è dedicato alla esposizione di alcune proposizioni riguardanti integrali doppi di Stieltjes e di Radon; il decimosecondo concerne gli operatori massimali normali, e la relativa rappresentazione canonica. (Gli operatori massimali normali costituiscono una generalizzazione degli operatori autoaggiunti (hermitiani)).

Lo scopo del capitolo successivo, il decimoterzo, è quello di preparare una nuova teoria delle funzioni $f(N)$, dove N è un operatore normale. Tali funzioni non sono ordinarie funzioni composte, ma possono essere pensate come una conveniente generalizzazione di iterazioni dell'operatore N, come $N^2 = NN$, $N^3 = NN^2$ etc.

Il decimoquarto capitolo concerne il Calcolo operatorio sugli operatori generali, massimali, normali; il decimoquinto è dedicato alla esposizione di teoremi sugli operatori normali e sulle rappresentazioni canoniche connesse.

Si passa poi — nel capitolo decimosesto — alla dimostrazione di alcuni teoremi classici sugli operatori normali ed autoaggiunti, come, per esempio, a quella del teorema integrale di Radon sulla rappresentazione di $f(N)$ per funzioni boreliane $f(z)$. Le dimostrazioni sono conseguite per via diversa rispetto a quella seguita da Stone sull'argomento.

Il capitolo decimosettimo è relativo alla molteplicità dello spettro degli operatori massimali normali. Se l'operatore normale ha spettro discontinuo, è facile definire la molteplicità di un autovalore. Molto più difficile è il caso dello spettro continuo, ma è utile la rappresentazione canonica multiplanare dell'operatore. La teoria esposta nel libro che stiamo recensendo appare dotata di una sua semplicità e, per così dire, di un suo carattere « visivo ».

Il capitolo decimottavo concerne nozioni di calcolo operatorio, con applicazione al risolvente ed allo spettro degli operatori normali. Si tratta di complementi alla teoria dell'operatore $\varphi(N)$, dove $\varphi(z)$ è una funzione complessa N-misurabile della variabile complessa z, definita in un sottoinsieme N-misurabile del piano complesso e dove N è un operatore massimale normale in uno spazio di Hilbert-Hermite.

Il capitolo decimonono è dedicato allo studio di una speciale « tribe » di sottoinsiemi del rango di una funzione $f(x)$, in relazione alle funzioni composte $f(g(x))$. Questa materia viene poi applicata agli operatori permutabili normali nello spazio di Hilbert-Hermite, insieme con le loro rappresentazioni canoniche.

Il ventesimo capitolo concerne gli operatori normali permutabili; il ventunesimo la nozione di « complessi » e la approssimazione di « somata », cioè di elementi di un reticolo, mediante complessi.

Il capitolo ventesimoprimo concerne i campi vettoriali e la sommazione dei medesimi, mentre il successivo concerne la sommazione dei quasi-vettori, (qui opportunamente definiti). Gli insiemi di quasi-vettori hanno un ruolo importante nella teoria di uno speciale sistema di coordinate nello spazio hilbertiano.

Il ventitreesimo capitolo e il ventiquattresimo sono dedicati alla sommazione di quasi-vettori; il ventiquattresimo, in particolare, alla sommazione nello spazio di Hilbert-Hermite separabile e completo. Si prosegue, nel venticinquesimo, con la considerazione di sistemi generali, ortogonali di coordinate nello spazio di Hilbert-Hermite, separabile e completo.

Nel capitolo ventesimosesto viene trattata la funzione « delta » di Dirac, vista rigorosamente dal punto di vista analitico (è superfluo sottolineare l'importanza di tale funzione nell'ambito della Meccanica quantica e della Fisica teorica in generale).

Nel capitolo ventesimosettimo vengono date proposizioni per uno studio più approfondito della sommazione dei campi scalari; nel successivo ci si occupa della sommazione superiore ed inferiore di campi reali in una algebra booleana, in assenza di atomi. La nozione di sommazione superiore ed inferiore viene considerata più in generale nel capitolo ventesimonono, che si può, quindi, considerare come una continuazione dei due precedenti. Segue una vasta bibliografia.

Lo scopo generale del volume è quello di fornire al fisico teorico un apparato matematico rigoroso, geometricamente efficace ed adattabile anche con una certa possibilità intuitiva alle questioni della Meccanica quantica. Lo scopo è raggiunto pienamente e l'opera costituisce certamente un contributo nuovo ed importante alla letteratura matematica concernente la Fisica teorica. Superflua ogni considerazione nell'edizione, curata da Springer.

ANTONIO PIGNEDOLI

H. RUND, *The Hamilton-Jacobi theory in the Calculus of variations*, Van Nostrand Company LTD, London, 1966, pp. 404, s. 85.

L'Autore, che è professore di Matematica applicata nell'Università di Pretoria, autore di numerose pubblicazioni e di un volume sulla Geometria differenziale degli spazi di Finsler, si propone, nel presente volume, di far vedere rigorosamente il ruolo esercitato dal Calcolo delle variazioni in quella che si può chiamare la « unificazione » di molte branche di fondamentale importanza della Matematica pura e della Fisica teorica.

Il libro consta essenzialmente di cinque capitoli. Il primo, dopo una introduzione generale, è dedicato ad una determinazione che l'autore chiama « provvisoria » delle equazioni di Eulero-Lagrange.

Il secondo capitolo, articolato su quindici paragrafi, si riferisce al « problema più semplice nel dominio del Calcolo delle variazioni: al caso non-omogeneo » (ottica geometrica e meccanica classica, nel senso di meccanica non relativistica). Dal punto di vista fisico-matematico, richiamano particolare attenzione l'undicesimo paragrafo ed i successivi. Dai principi di Fermat e di Huygens dell'Ottica geometrica, si passa alle trasformazioni canoniche, indi alla transizione dalla Meccanica classica alla Meccanica quantica non-relativistica. Sono trattate: la transizione allo schema di Erwin Schrödinger, quella allo schema di Werner Heisenberg e viene discussa l'equivalenza dei due schemi. Il paragrafo decimoquarto è dedicato agli invarianti integrali; il paragrafo decimoquinto alla condizione di Jacobi.

Il terzo capitolo concerne la Geometria metrica differenziale e la Meccanica relativistica. Consta di otto paragrafi. Il quarto di essi è dedicato all'equazione di Hamilton-Jacobi; il quinto alle proprietà delle curve estremali; il sesto alla Meccanica relativistica della particella; il settimo alla Meccanica quantica relativistica; l'ottavo alle « lagrangiane » dipendenti da derivate di ordine più alto.

Il quarto capitolo riguarda i problemi con integrali multipli, cioè le teorie relative ai campi. Consta di otto paragrafi, nel primo dei quali si tratta della formula generale variazionale, per passare poi, nei successivi, alla teoria di Weyl, alla teoria di Caratheodory, alla teoria generale etc. Il settimo paragrafo concerne la teoria dei campi fisici in particolare, mentre l'ottavo è dedicato ai problemi con integrali multipli dotati di integrandi quadratici e alle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine. Vi si considerano: la forma tensoriale delle equazioni di Eulero-Lagrange, le equazioni ellittiche (con l'integrale di Dirichlet), le equazioni iperboliche (con le bi-caratteristiche). Il quinto capitolo concerne il problema di Lagrange (teoria dei sistemi dinamici soggetti a vincoli). Dei sei paragrafi, che costituiscono il capitolo, il primo riguarda la formulazione del problema, il secondo quello che si può chiamare il « formalismo canonico », il terzo le equazioni canoniche, il quarto i problemi isoperimetrici, il quinto i sistemi dinamici non-olonomi. Il sesto paragrafo è dedicato alla considerazione delle proprietà geometrico-differenziali delle traiettorie dei sistemi dinamici.

Seguono una appendice — su quattro paragrafi — con opportuni richiami analitici e geometrici ed una ampia bibliografia. Molto bella la veste tipografica.

La linea generale matematica sulla quale la interessante trattazione si muove è quella dell'indirizzo di Caratheodory nel calcolo delle variazioni, con risultati e sviluppi originali. Dal punto di vista fisico-matematico, appaiono particolarmente notevoli le trattazioni dedicate ai problemi di integrali multipli ed alla moderna teoria dei campi, alla discussione del problema di Lagrange, ai metodi di quantizzazione, alla deduzione, particolarmente elegante, delle equazioni d'onda relativistiche.

ANTONIO PIGNEDOLI

MICHEL CARVALLO, *Principes et applications de l'Analyse booléenne*, Gauthier-Villars, Paris, 1965, pp. 131, s.i.p.

Il volume richiama, anzitutto, i principî dell'Algebra booleana ed esamina le applicazioni della medesima alla Logica delle proposizioni ed alla Logica simbolica. La parte essenziale del volume è, però, quella concernente la teoria algebrica delle equazioni di Boole (risoluzione, parametrizzazione, eliminazione etc.) e delle funzioni di Boole (funzioni crescenti, linearmente separabili etc.).

Il volume è costituito da quattro parti. La prima concerne i principî della Analisi booleana ed è articolata su quattro capitoli. Il primo riguarda i fondamenti dell'Algebra di Boole; il secondo gli insiemi, le funzioni caratteristiche, i grafi; il terzo la logica delle proposizioni; il quarto la logica simbolica.

La seconda parte del volume è dedicata all'Algebra di Boole ed è su tre capitoli (Calcolo binario, equazioni di Boole, funzioni crescenti, funzioni linearmente separabili).

La terza parte concerne le applicazioni (logica di decisione maggioritaria, reticoli, sistemi booleani, programmi booleani). Nel capitolo dedicato ai reticoli appare il teorema di Shannon, così come appaiono la costruzione di Shannon e quella di Povarov.

Particolarmente notevole, nell'opera che stiamo recensendo, è la parte riservata alla programmazione economica booleana, che non risulta trattata altrove, alla data in cui il libro è uscito.

Inoltre, il volume si conclude con una felice scelta di problemi con soluzioni. Chi si occupa di Calcolo elettronico, così come di Logica matematica, con applicazione ai circuiti e di Teoria matematica della informazione non potrà che rallegrarsi vivamente del fatto che un volume come questo di Carvallo abbia visto la luce.

A. PIGNEDOLI

M. D. Dumas De Rauly, *Problèmes de Mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1963, pp. 223, F 16.

Si tratta di una ottima raccolta di problemi di matematica al « livello » della « licence » e che può anche essere pensata come una efficace introduzione ai corsi matematici che vengono dettati dopo quelli di « Matematiche speciali ». La raccolta prescinde, perciò, volutamente da esercizi concernenti le equazioni differenziali in senso classico. Anzi carattere essenziale della raccolta è quello di insistere su alcuni aspetti delle Matematiche moderne. Le soluzioni dei problemi sono indicate, non completamente esposte: ne risulta lo stimolo per il lettore ad affrontare il problema. La materia è suddivisa in quattordici capitoli (Analisi combinatoria, Calcolo delle probabilità, Algebra lineare, Calcolo matriciale, Calcolo integrale, Calcolo di integrali per mezzo di funzioni analitiche, Studio della funzione Γ, Studio della funzione « Beta », Studio dei polinomî ortogonali, Studio delle successioni, Serie numeriche, Serie trigonometriche, Funzioni di più variabili).

A. Pignedoli

A. L. Rabenstein, *Introduction to ordinary differential equation*, Academic Press, New York, London, 1966, di pag. 431, $ 9.95.

Il volume consta di dodici capitoli, il primo dei quali concerne le equazioni differenziali lineari in senso classico. Vanno subito notate: una esplicita attenzione agli esempi forniti dalle applicazioni, tanto meccaniche quanto elettriche e la presenza di numerosi esercizi proposti al lettore. Il secondo capitolo è dedicato a proprietà delle equazioni differenziali ordinarie, dalla riduzione dell'ordine, alla fattorizzazione degli operatori, a certi cambiamenti di variabili, agli zeri delle soluzioni.

Nel terzo capitolo, l'autore fornisce al lettore gli elementi fondamentali della teoria delle funzioni di una variabile complessa e, nel quarto, passa alla teoria della risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie mediante serie.

Il quinto capitolo prende le mosse dalla considerazione della « funzione gamma » euleriana ed è dedicato alle funzioni di Bessel.

Il sesto capitolo riguarda i polinomi ortogonali, con particolare riguardo ai polinomi di Legendre ed a quelli di Tchebycheff.

Il settimo capitolo, articolato su otto paragrafi, concerne i problemi di autovalori. Il settimo e l'ottavo paragrafo di tale capitolo riguardano i problemi singolari. Nell'ottavo capitolo vengono esposte le nozioni fondamentali sulle serie di Fourier. Il nono è dedicato ai sistemi di equazioni differenziali del primo ordine ed ai sistemi differenziali con coefficienti costanti. Il terzo paragrafo — con cui il capitolo si conclude — riguarda applicazioni nel campo meccanico ed elettrico ed è seguito da esercizi. Nel decimo capitolo si tratta della trasformazione di Laplace e delle sue applicazioni alle equazioni differenziali.

Il capitolo decimoprimo è dedicato alle equazioni differenziali alle derivate parziali ed ai problemi di valori al contorno. Consta di dieci paragrafi. Vi sono particolarmente trattati il problema della conduzione del calore ed il problema delle vibrazioni delle corde. Il capitolo si conclude con le serie doppie di Fourier.

Il capitolo decimosecondo riguarda le equazioni differenziali non-lineari di primo ordine e di alcuni tipi del secondo ordine. Ci si occupa della esistenza ed unicità delle soluzioni per le equazioni e per i sistemi. S svolge la teoria del piano delle fasi e dei punti critici e si passa alla questione della stabilità pei sistemi non-lineari (nel senso di Liapounov); indi ai sistemi lineari perturbati; infine alle soluzioni periodiche.

Il volume è dotato di ampi riferimenti bibliografici e di un fascicoletto di risposte ad esercizi proposti. Bella la veste tipografica.

Carattere fondamentale dell'opera è quello di servire in vista delle applicazioni fisico-matematiche, senza perdere di vista alcuni aspetti assai importanti dal punto di vista puro. Volendo, tuttavia, che il pubblico dei lettori non si restringa di fronte alla elevatezza dei mezzi usati (cioè perseguendo una esposizione il più possibile semplice) alcune proposizioni sono enunciate senza dimostrazione.

ANTONIO PIGNEDOLI

J. N. BUTLER - D. G. BOBROW, *The calculus of chemistry, with an introduction to computer programming*, pp. VII+150, W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam.

Scopo di questo libro è facilitare l'apprendimento e l'uso di quegli strumenti dell'analisi matematica che sono di impiego più frequente nella soluzione dei problemi di chimica e chimica fisica.

Il metodo impiegato è prevalentemente euristico: l'introduzione di un concetto matematico è sempre preceduta dall'analisi di un problema che si pone concretamente in chimica, e si mostra come la formulazione rigorosa e la successiva soluzione di tale problema richieda l'uso di quel determinato concetto.

Gli argomenti toccati sono: funzioni trigonometriche ed esponenziali, logaritmi, derivate, integrali, equazioni differenziali lineari. L'opportunità di eseguire i calcoli mediante un calcolatore elettronico è tenuta costantemente presente nella scelta dei simboli e nella presentazione stessa delle operazioni.

Nel complesso l'opera si presenta di piacevole lettura, grazie anche all'eccellente veste tipografica. Non v'è dubbio ch'essa possa fornire interessanti spunti in vista di un corso di matematica per studenti di chimica.

G. C. BAROZZI

F. BRAUER - J. NOHEL, *Ordinary Differential Equations*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (Preliminary Edition), pp. IV+555.

Il carattere didattico-applicativo di questo volume è messo in evidenza dal sottotitolo (Elementary and intermediate topics with applications) e più ancora dalla prefazione dove il contenuto del volume viene dettagliatamente analizzato in relazione alle esigenze che si presentano in diversi tipi di corso universitario (americano) ed alle cognizioni che si presuppongono nello studente per la comprensione dei vari argomenti. I problemi della teoria vengono presentati come problemi posti dalla fisica e i metodi risolutivi sono trattati avendo sempre in vista la loro concreta applicazione.

Il libro si inizia con la discussione di una quantità di problemi fisici che conducono a formulare il problema iniziale per le equazioni differenziali ordinarie. I relativi teoremi di esistenza, unicità. dipendenza dai dati sono rinviati al Cap. 7 e preceduti dall'esame di metodi particolari per la risoluzione di equazioni e sistemi particolari: a variabili separate, lineari del 1° ordine, lineari del 2° ordine nel campo complesso, lineari di ordine qualunque, ecc. Tutto ciò occupa la parte centrale del volume (Capitoli dal 2° al 6°). La parte conclusiva, oltre al Cap. 7 già ricordato, comprende i metodi numerici di risoluzione (Cap. 8), la stabilità dei sistemi lineari e quasi lineari (Cap. 9) e il 2° metodo di Liapunov per lo studio della stabilità (Cap. 10). Il tutto è inframmezzato ed arricchito da numerosi esempi ed esercizi.

L'edizione finale dovrebbe poi includere ampliamenti della parte riguardante la stabilità, un capitolo sulle soluzioni periodiche ed uno sui problemi ai limiti e di autovalori.

Tuttavia, già con questa edizione preliminare (di ottima veste tipografica) i due Autori, notissimi cultori della teoria delle equazioni differenziali, hanno certamente fatto un ottimo lavoro di « divulgazione rigorosa » ed è facile prevedere che il volume avrà larga e meritata diffusione anche aldifuori dell'ambiente strettamente universitario.

ROBERTO CONTI