BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Carlo Banfi

Sull'approssimazione di processi non stazionari in meccanica non lineare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 442–450.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_442_0>

Sull'approssimazione di processi non stazionari in meccanica non lineare

CARLO BANFI (Bologna) (*)

Summary. - *A system of differential equations of the type* $\dot{x} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon)$ *is considered* ($x, X \in R^n$, ε *real and positive*) *together with the corresponding averaged system* $\dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi, \varepsilon)$, *where*:

$$X_0(x, \varepsilon) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(\theta, x, \varepsilon) d\theta$$

If ε *is small enough, a result of Bogoliubov assures that the solutions of the averaged system approach those of the first one throughout the so-called long intervals* $\left(\text{namely } 0 \leq t \leq \frac{\bar{\tau}}{\varepsilon}\right)$.

In this paper the above mentioned result is extended to unbounded intervals under some stability assumptions for the solutions of the averaged system. Some examples are also given.

1. - I problemi della meccanica non lineare con debole non linearità si riducono in molti casi allo studio del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \tag{1}$$

dove x ed X sono vettori in R^n di componenti $x_1, x_2, \ldots x_n$ e $X_1, X_2, \ldots X_n$, ed ε un parametro reale e positivo.

Come è noto, soluzioni approssimate del sistema (1), valide per piccoli valori di ε, possono ottenersi con il cosidetto metodo di media, cioè, supposto che esista il limite:

$$X_0(x, \varepsilon) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(\theta, x, \varepsilon) d\theta, \tag{2}$$

risolvendo opportunamente il sistema:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi, \varepsilon), \tag{3}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo N. 4 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno 1966-67.

detto sistema mediato. Accanto al sistema precedente occorrerà tener presente il sistema ottenuto con la sostituzione $\tau = \varepsilon t$:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = X_0(\xi, \varepsilon). \tag{3'}$$

I fondamenti di questo procedimento sono stati dati da N. N. BOGOLIUBOV in [1], comunque sono stati ampiamente esposti anche nel noto volume [2]. Questi procedimenti sono stati ripresi, in più punti estesi e chiaramente esposti da J. K. HALE ([3], [4]). Contributi notevoli anche se spesso poco chiari sono stati dati anche da V. M. VOSOLOV; un'ampia rassegna degli studi fatti da questo autore è stata data in un suo lungo resoconto [5].

In [2] fondamentalmente è dimostrato che se il secondo membro della (1) è funzione quasiperiodica di t soddisfacente a certe opportune condizioni di regolarità, in corrispondenza alle soluzioni costanti o quasiperiodiche del sistema (3) esiste sempre una soluzione quasiperiodica o una varietà integrale della (1) vicina alla corrispondente soluzione del sistema mediato e con le medesime caratteristiche di stabilità.

Nello stesso volume ([2] Cap. VI pag. 429-435) viene dato un teorema che affronta lo studio del metodo di media per sistemi a cui non si richiede per la dipendenza da t la quasiperiodicità e per processi in generale non stazionari. In tale teorema sotto opportune condizioni di regolarità che verranno riprese più avanti, si dimostra che data una soluzione $x(t)$ di (1), fissati arbitrariamente η e τ_0 reali e positivi, per ε sufficientemente piccolo la soluzione $\xi(t)$ di (3) con $\xi(0) = x(0)$ soddisfa la relazione:

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta, \text{ (}^1\text{)} \tag{4}$$

per ogni t dell'intervallo $0 \leq t \leq \frac{\tau_0}{\varepsilon}$.

V. M. VOLOSOV in [5], [6], [7] e [8] considera anche l'estensione del risultato precedente ad intervalli infiniti ma sembra sostanzialmente riferirsi, anche se per sistemi più generali di (1), cioè con alcune incognite rapidamente variabili, a soluzioni abbastanza vicine alle soluzioni stazionarie.

In effetti il risultato di BOGOLIUBOV citato non si può estendere in generale ad un intervallo illimitato. Si darà in proposito un controesempio dal quale risultano chiaramente i limiti

(1) Con $|x|$ si indicherà una norma per il vettore x in R^n, potrebbe indifferentemente assumersi o la norma euclidea o un'altra equivalente.

del procedimento soprattutto dal punto di vista del confronto del comportamento qualitativo delle soluzioni di (1) e di (3). In questo lavoro si dimostrerà la possibilità di estendere il risultato citato ad intervalli illimitati, in generale per processi non stazionari, sotto opportune condizioni di stabilità delle soluzioni del sistema mediato. Quello che si vuole tra l'altro sottolineare è come in questi casi risultino effettivamente confrontabili i comportamenti qualitativi delle soluzioni dei sistemi (1) e (3). I risultati che si otterranno non sembrano coincidere o rientrare in quelli di VOLOSOV. D'altra parte il risultato che si darà è suscettibile di interessanti applicazioni nello studio dei processi non stazionari, applicazioni di cui si daranno alcuni cenni eventualmente suscettibili di ulteriori sviluppi.

2. - Cominciamo con il dare un esempio banale ma in cui si veda in modo semplice e chiaro come il risultato di BOGOLIUBOV citato non è estendibile in generale ad un intervallo illimitato.

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon[x - e^{-t}], \tag{5}$$

con x funzione reale di t. L'equazione mediata, come facilmente si verifica, risulta essere:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\xi. \tag{6}$$

Se si considerano le soluzioni di (5) e di (6) per $x(0) = \xi(0) = 0$ si ha:

$$x(t) = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}e^{\varepsilon t} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}e^{-t}, \qquad \xi(t) = 0. \tag{7}$$

Fissato τ_0 per $0 \leq t \leq \frac{\tau_0}{\varepsilon}$ si ha:

$$|x(t) - \xi(t)| = |x(t)| \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}e^{\tau_0},$$

e si può quindi sempre determinare ε in modo che risulti:

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta.$$

Ma se si considera $t \to +\infty$, comunque si prenda ε positivo $|x(t)| \to +\infty$ e quindi evidentemente per la particolare soluzione presa in considerazione l'approssimazione data dalla (6) non ha alcun senso dal punto di vista qualitativo.

3. – Dopo questa semplice illustrazione passiamo ora ad enunciare il risultato che si vuole ottenere.

Dato il sistema (1), detto D un certo insieme in R^n ed E lo intervallo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, per $x \in D$, $\varepsilon \in E$ e $t \geq 0$ valgano le seguenti condizioni:

i) $X(t, x, \varepsilon)$ sia continua in x, ε e t;

ii) esista uniformemente rispetto a x, ε e t il valore medio (2);

iii) vi siano due costanti positive M ed L tali che:

$$|X(t, x, \varepsilon)| \leq M, \quad |X(t, x', \varepsilon) - X(t, x'', \varepsilon)| \leq L\,|x' - x''|. \tag{8}$$

Occorre notare che per l'uniformità supposta per il limite, $X_0(x, \varepsilon)$ risulterà continuo in x ed ε ed inoltre varranno anche per esso le (8).

Sotto le condizioni suddette vale il seguente:

TEOREMA. – Data una soluzione $x^*(t, \varepsilon)$ del sistema (1) con condizioni iniziali $x^*(0, \varepsilon) = x_0$, il sistema (3') per ogni $\varepsilon \in E$ e $t \geq 0$ abbia una soluzione $\xi^*(\tau, \varepsilon) = \xi^*(\varepsilon t, \varepsilon) \in D$ con $\xi^*(0, \varepsilon) = x^*(0, \varepsilon) = x_0$, asintoticamente stabile in τ, uniformemente rispetto ad ε in E ed esista un numero reale positivo ρ tale che la distanza di ξ^* da ∂D frontiera di D sia maggiore di ρ. Fissato allora un numero reale η con $0 < \eta < \rho$, è possibile determinare ε_1, con $\varepsilon_1 \in E$, tale che per ogni ε con $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ e per ogni $t \geq 0$ si abbia:

$$|x^*(t, \varepsilon) - \xi^*(\varepsilon t, \varepsilon)| < \eta. \tag{9}$$

Dobbiamo prima di tutto enunciare il risultato di BOGOLIUBOV in una forma leggermente più generale, assumendo come istante iniziale un generico istante $t_0 \geq 0$. (2)

(2) Sostanzialmente per estendere a questo caso più generale il risultato di BOGOLIUBOV con l'uniformità della (10) rispetto a t_0 è sufficiente ammettere, come si è fatto in (ii), l'uniformità del limite (2) rispetto a t per $t \geq 0$. Si potrebbe sospettare che tale condizione sia tanto forte da limitare eccessivamente l'applicabilitá del procedimento. Vogliamo allora segnalare prima di tutto che essa è verificata dalle funzioni uniformemente quasi periodiche [9], ed inoltre che è abbastanza facile far vedere che condizione sufficiente per la validità della suddetta uniformità è che risulti:

$$\sup_{t \geq 0} \left| \int_0^t [X(\theta, x, \varepsilon) - X_0(x, \varepsilon)]\, d\theta \right| < +\infty,$$

relazione soddisfatta in particolare nei casi in cui lo scarto tra funzione e relativo valore medio sia integrabile in senso generalizzato in $0 \leq t < +\infty$.

Fissato ω con $0 < \omega < \eta$ e fissato $\bar{\tau}$, si può determinare $\varepsilon_1 \in E$ tale che per $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, se $x(t_0, \varepsilon) = \xi(\varepsilon t_0, \varepsilon)$, si abbia:

$$(10) \qquad |x(t, \varepsilon) - \xi(\varepsilon t, \varepsilon)| < \omega,$$

per ogni t dell'intervallo $t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\bar{\tau}}{\varepsilon}$.

Posto ciò, teniamo presente che ξ^* è per ipotesi asintoticamente stabile in τ uniformemente rispetto ad ε in E, ma essendo la (3') autonoma è anche asintoticamente stabile uniformemente rispetto ad ogni $\tau_0 = \varepsilon t_0$ e quindi per un fissato $\chi > 0$ si può determinare $\delta > 0$ tale che per ogni $\xi(\tau, \varepsilon)$ con:

$$(11) \qquad |\xi(\tau_0, \varepsilon) - \xi^*(\tau_0, \varepsilon)| < \delta,$$

per $\tau \geq \tau_0$ si abbia:

$$(12) \qquad |\xi(\tau, \varepsilon) - \xi^*(\tau, \varepsilon)| < \chi,$$

e

$$(13) \qquad \lim_{\tau \to +\infty} |\xi(\tau, \varepsilon) - \xi^*(\tau, \varepsilon)| = 0,$$

uniformemente in $\varepsilon \in E$.

Per quest'ultima condizione, fissato μ con $0 < \mu < \chi$, si può determimare $\widehat{\tau} > 0$, tale che per $\tau - \tau_0 > \widehat{\tau}$ e sempre per ogni $\varepsilon \in E$ sia:

$$(14) \qquad |\xi(\tau, \varepsilon) - \xi^*(\tau, \varepsilon)| < \mu.$$

Fissato inizialmente $\eta < \rho$, si assumano ω e χ in modo che valgano contemporaneamente le relazioni:

$$(15) \qquad \omega + \chi < \eta, \qquad \omega < \delta;$$

inoltre si prenda μ in modo che sia:

$$(16) \qquad \omega + \mu < \delta.$$

Per la prima delle (15), tenendo presente che $\mu < \chi$, varrà anche:

$$(17) \qquad \omega + \mu < \eta.$$

In corrispondenza a μ resta determinato $\widehat{\tau}$. Per l'arbitrarietà di $\bar{\tau}$, si prenda:

$$\bar{\tau} > \widehat{\tau}. \tag{18}$$

In corrispondenza a ω e a $\bar{\tau}$ si determina infine ε_1 per cui risulta verificata la (10) secondo il risultato di BOGOLIUBOV enunciato.

Fissato ora $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, posto $t_0 = 0$ per la (10) e per la prima delle (15) la (9) risulterà verificata nell'intervallo $0 \leq t \leq \frac{\bar{\tau}}{\varepsilon}$.

Per verificare la validità della (9) anche per $t > \frac{\bar{\tau}}{\varepsilon}$ si supponga che esista un istante finito $t'' > \frac{\bar{\tau}}{\varepsilon}$ per cui sia:

$$|x^*(t'', \varepsilon) - \xi^*(\varepsilon t'', \varepsilon)| = \eta. \tag{19}$$

Essendo per $t = \frac{\bar{\tau}}{\varepsilon}$: $\left| x^*\left(\frac{\bar{\tau}}{\varepsilon}, \varepsilon\right) - \xi^*(\bar{\tau}, \varepsilon)\right| < \omega < \omega + \mu < \eta$, esisteranno nell'intervallo $\frac{\bar{\tau}}{\varepsilon} \leq t \leq t''$ degli istanti t_k per cui:

$$|x^*(t_k, \varepsilon) - \xi^*(\varepsilon t_k, \varepsilon)| = \mu + \omega < \eta. \tag{20}$$

Sia t_m il più grande dei t_k, evidentemente esisterà finito essendo $t_k < t''$.

Si consideri la nuova soluzione ξ_m della (3') con la condizione $\xi_m(\varepsilon t_m, \varepsilon) = x^*(t_m, \varepsilon)$. Per la (20) e la (16) si avrà:

$$|\xi^*(\varepsilon t_m, \varepsilon) - \xi_m(\varepsilon t_m, \varepsilon)| < \delta, \tag{21}$$

e pertanto per $t > t_m$, per la (12) varrà:

$$|\xi^*(\varepsilon t, \varepsilon) - \xi_m(\varepsilon t, \varepsilon)| < \chi; \tag{22}$$

e per la (14) per $t > t_m + \frac{\widehat{\tau}}{\varepsilon}$:

$$|\xi^*(\varepsilon t, \varepsilon) - \xi_m(\varepsilon t, \varepsilon)| < \mu. \tag{23}$$

D'altra parte per la (10) nell'intervallo $t_m \leq t \leq t_m + \frac{\bar{\tau}}{\varepsilon}$ si ha:

$$|\xi_m(\varepsilon t, \varepsilon) - x^*(t, \varepsilon)| < \omega, \tag{24}$$

e quindi per la (24), (22) e (15) nell'intervallo suddetto vale la (9), di conseguenza la relazione:

$$t_m + \frac{\bar{\tau}}{\varepsilon} < t''. \tag{25}$$

Ora per la (18) possiamo prendere in considerazione l'intervallo:

$$t_m + \frac{\overset{\frown}{\tau}}{\varepsilon} \leq t \leq t_m + \frac{\bar{\tau}}{\varepsilon}. \tag{26}$$

Per la (25) tale intervallo risulta interno all'intervallo $t_m \leq t \leq t''$. Inoltre in esso per la (24) e la (23) si ha:

$$\begin{aligned} |\xi^*(\varepsilon t, \varepsilon) - x^*(t, \varepsilon)| &\leq |\xi^*(\varepsilon t, \varepsilon) - \xi_m(\varepsilon t, \varepsilon)| + \\ &+ |\xi_m(\varepsilon t, \varepsilon) - x^*(t, \varepsilon)| < \mu + \omega, \end{aligned} \tag{27}$$

quindi se esistesse effettivamente finito t'', t_m non sarebbe il più grande dei t_k. Da questa contraddizione resta dimostrata la validità della (9) per $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, e per ogni $t \geq 0$.

4. – A titolo di esemplificazione delle possibili applicazioni dei risultati precedenti accenneremo a due casi particolari molto semplici.

Si consideri l'equazione nell'incognita x reale:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon[x - x^3 + e^{-t}]. \tag{28}$$

Il sistema mediato corrispondente è:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon[\xi - \xi^3]. \tag{29}$$

Per quest'ultima equazione tutte le soluzioni sono asintoticamente stabili esclusa la soluzione $\xi = 0$ e del resto si può facilmente verificare la validità delle altre condizioni richieste. Risulta allora chiaro come l'applicabilità dei risultati trovati viene meno solo in un punto e ciò evidentemente non disturba lo studio dell'andamento qualitativo delle soluzioni della (28); si può pertanto dire che dal punto di vista qualitativo per ε abbastanza piccolo l'andamento delle soluzioni della (28) è equivalente a quello della (29).

Passiamo ora a trattare rapidamente in un caso particolare i metodi che si applicano nella teoria della sincronizzazione.

Si consideri l'equazione ([11] pag. 155 e seg):

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \varepsilon(1 - z^2)\frac{dz}{dt} + z = \varepsilon\rho \cos(\omega t + \alpha), \tag{30}$$

$$\text{con} \quad \omega^2 = 1 + \varepsilon\beta.$$

Posto:

$$\begin{aligned} z &= x_1 \operatorname{sen} \omega t + x_2 \cos \omega t, \\ \frac{dz}{dt} &= \omega(x_1 \cos \omega t - x_2 \operatorname{sen} \omega t); \end{aligned} \tag{31}$$

si ottiene il sistema seguente del tipo di (1):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\omega}\left[\beta z + (1 - z^2)\frac{dz}{dt} + \rho \cos(\omega t + \alpha)\right]\cos \omega t, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega}\left[\beta z + (1 - z^2)\frac{dz}{dt} + \rho \cos(\omega t + \alpha)\right]\operatorname{sen} \omega t. \end{aligned} \tag{32}$$

Il sistema mediato corrispondente risulta essere:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\omega}\left[\beta\xi_2 + \omega\left(1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{4}\right)\xi_1 + \rho \cos \alpha\right], \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\omega}\left[-\beta\xi_1 + \omega\left(1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{4}\right)\xi_2 + \rho \operatorname{sen} \alpha\right]. \end{aligned} \tag{33}$$

Questo sistema sotto condizioni per cui rimandiamo a [11] ammette punti singolari stabili. Le oscillazioni armoniche approssimate dell'equazione (30) si ottengono sostituendo nelle (31) in luogo di x_1 ed x_2 le coordinate di tali punti singolari. Le soluzioni della (32) che partono dalla regione di attrazione di questi punti singolari stabili sono soluzioni limitate e asintoticamente stabili, del resto si potrebbe verificare che valgono le diverse condizioni di regolarità richieste, pertanto se si vogliono cercare soluzioni non stazionarie della (30), a cui corrispondono condizioni iniziali del sistema (32) in tali regioni, si ha che le soluzioni corrispondenti dei due sistemi (32) e (33) risultano prossime per ogni $t \geq 0$. Si potrà così determinare una approssimazione delle soluzioni non stazionarie cercate della (30) sostituendo nelle (31) al posto di x_1 e x_2 le $\xi_1(t)$ e $\xi_2(t)$ corrispondenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. N. Bogoliubov, ***Su alcuni metodi statistici in fisica-matematica (russo)***, « Akademiya Nauk Ukrainski S.S.S.R. (1945).

[2] N. N. Bogoliubov, Y. A. Mitropolsky, ***Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations***, Gordon and Breach 1961. Traduzione inglese della II edizione russa del (1958).

[3] J. K. Hale, ***Integral manifolds of perturbed differential systems***, « Ann. Math. 73 » (1961).

[4] — —, ***Oscillations in non linear systems***, McGraw-Hill (1963).

[5] V. M, Volosov, ***Averaging in systems of ordinary differential equations***. « Russian Mathematical Survey » vol. 17 n. 6 nov. - dic. (1962).

[6] A. N. Tychonov, A.B. Vasilyeva, V. M. Volosov, ***Differential equations containing a small parameter***, Symposium on non linear vibrations. Kiev, settembre (1961).

[7] V. M. Volosov, ***The method of averaging***, « Soviet Mathematics, » Translation of Doklady, Vol. II, parte I, (1961).
Originale: Doklady Akademii Nauk S.S.S.R , 137, (1961).

[8] — —, ***Averaging on an unbounded interval***, « Soviet Mathematics », Translation of Doklady, Vol. III, parte II, (1962).
Originale: Doklady Akademii Nauk S.S.S.R., 145, (1962).

[9] A. S. Besicovitch, ***Almost periodic functions***, Dover (1954).

[10] D. Graffi, ***Considerazioni sui metodi approssimati della meccanica non lineare***, « Annali di Matematica Pura e applicata » S. IV, T. XLIX, (1960).

[11] J. J. Stoker, ***Nonlinear vibrations***, Intersience pub. (1950).

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U.M.I.
il 3 giugno 1967