Maria Teresa Bonardi

Un'osservazione sopra l'ideale di una varietà algebrica non singolare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 451–455.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_451_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Un'osservazione sopra l'ideale di una varietà algebrica non singolare.

MARIA TERESA BONARDI (Genova) (*)

Sunto. - *Sia K un'estensione algebricamente chiusa di un campo perfetto k e sia V una varietà algebrica dello spazio affine d-dimensionale A_d^K. Se $\mathfrak{J} \subset k[Y_1, \dots, Y_d]$ è l'ideale di V e $\mathfrak{D}$ è l'ideale di tutti i polinomi $F \in \mathfrak{J}$ tali che: $\frac{\partial F}{\partial Y_l} \in \mathfrak{J}$ $(l = 1, \dots, d)$, proveremo che: 1) $\mathfrak{D}$ è l'unico primario isolato di $\mathfrak{J}^2$; 2) se $\mathfrak{C}$ è un primario immerso di $\mathfrak{J}^2$, ogni zero di $\mathfrak{C}$ è singolare per $\mathfrak{J}$. Se V non è singolare si ha pertanto $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{D}$.*

1. - Sia k un campo perfetto, K una sua estensione algebricamente chiusa, V una varietà algebrica irriducibile definita su k e contenuta nello spazio affine d-dimensionale A_d^K. Siano, poi, $R = k[Y_1, \dots, Y_d]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in k, nelle indeterminate $Y_1, \dots, Y_d$, $\mathfrak{J} \subset R$ l'ideale (che supporremo proprio) di V e $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ un sistema di generatori di $\mathfrak{J}$. Se V è una completa intersezione, ossia se $\mathfrak{J}$ è di classe principale, è ben noto che le ipersuperficie di A_d^K che passano almeno doppiamente per V sono tutte e sole quelle che si ottengono annullando una forma quadratica nei polinomi φ_i (cfr. [2, 4] ove questo risultato è dimostrato nell'ipotesi che k sia il campo complesso ed $\mathfrak{J}$ ideale omogeneo; le stesse dimostrazioni restano valide anche se $\mathfrak{J}$ non è omogeneo e k è un campo qualunque di caratteristica zero). Tuttavia si può verificare su esempi che questa circostanza non si verifica per ogni varietà irriducibile (vedi [1], n. 1) ed ha quindi senso confrontare l'ideale $\mathfrak{J}^2$ con l'ideale $\mathfrak{D}$ costituito da tutti i polinomi F tali che V sia luogo di punti multipli per l'ipersupercie $F = 0$ (1).

È ovvio che risulta sempre $\mathfrak{J}^2 \subset \mathfrak{D}$; in [1] si è poi precisata la struttura di $\mathfrak{D}$ con il seguente:

TEOREMA 1. - *Se $\mathfrak{J} \subset R$ è ideale primo e proprio, esiste in R un polinomio $L \notin \mathfrak{J}$ tale che $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}^2 : (L)$.*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) Per la definizione di punto semplice di una varietà (o di zero semplice di un ideale) si veda [5], definizione 2.

Quindi il prodotto di L per un qualsiasi elemento di $\mathfrak{D}$ è una forma quadratica nei polinomi φ_i.

In questa Nota ritornerò sull'argomento allo scopo di dimostrare che *se V è priva di punti multipli risulta sempre $\mathfrak{D} = \mathfrak{I}^2$.*

Il risultato – al pari di quello già citato relativo agli ideali di classe principale – non si inverte. Anzi esistono varietà non complete intersezioni ed inoltre dotate di singolarità per il cui ideale si ha $\mathfrak{D} = \mathfrak{I}^2$. Ad esempio questo è il caso, come non è difficile verificare, del cono cubico di A_4^K, luogo degli zeri dell'ideale $(Y_1Y_3 - Y_2^2,\ Y_1Y_4 - Y_2Y_3,\ Y_2Y_4 - Y_3^2)$.

Nel n. 3 dimostrerò poi che *l'ideale $\mathfrak{D}$ è in ogni caso l'unica componente primaria isolata di $\mathfrak{I}^2$ e che gli zeri di un qualunque primario immerso sono tutti singolari per $\mathfrak{I}$.*

2. – Siano c l'altezza di $\mathfrak{I}$ e $P \in A_d^K$ uno zero semplice di $\mathfrak{I}$.

Si può supporre (cfr. [1], lemma 1) che l'ideale $(\varphi_1, \ldots, \varphi_c)$ abbia anch'esso uno zero semplice in P ed abbia $\mathfrak{I}$ come componente primaria isolata. Modificando lievemente le argomentazioni che in [1] hanno condotto alla dimostrazione del teorema 1, proviamo che esso può precisarsi come segue:

TEOREMA 1'. – *Posto $(\varphi_1, \ldots, \varphi_c) = \mathfrak{I} \cap Q_1 \cap \ldots \cap Q_\mu$, ogni polinomio L contenuto in $\bigcap_{j=1}^{\mu} Q_j$ e non in $\mathfrak{I}$ è tale che $L\,\mathfrak{D} \subset \mathfrak{I}^2$.*

Siano C il campo quoziente di $R/\mathfrak{I}$, C^r – per ogni intero r – lo spazio vettoriale sopra C delle s-uple ordinate di elementi di C (²) – e per ogni $G \in R$ – sia $\bar{G}$ la classe definita da G in $R/\mathfrak{I}$. Si vede subito che $F = \sum_{j=1}^{q} A_i\varphi_i \in \mathfrak{D}$ se e solo se risulta:

$\sum_{i=1}^{q} A_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y_l} \in \mathfrak{I} \ (l = 1, \ldots, d)$ ossia se $(A_1, \ldots, A_q)$ appartiene al nucleo della trasformazione lineare ω: $C^q \to C^d$ definita ponendo:

$$\omega(a_1, \ldots, a_q) = \left(\sum_{i=1}^{q} a_i \overline{\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial Y_1}\right)}, \ldots, \sum_{i=1}^{q} a_i \overline{\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial Y_d}\right)} \right) (a_i \in C).$$

Se, poi L è un polinomio contenuto in $\bigcap_{j=1}^{\mu} Q_j$ e non in $\mathfrak{I}$ ed

(²) Con le operazioni

$$\begin{rcases} (a_1, \ldots, a_r) + (b_1, \ldots, b_r) = (a_1 + b_1, \ldots, a_r + b_r) \\ h(a_1, \ldots, a_r) = (ha_1, \ldots, ha_r) \end{rcases} (h, a_i, b_i \in C)$$

inoltre i polinomi $L_{i,j}$ $(1 \leq i \leq q-c;\ 1 \leq j \leq c)$ sono tali che risulti:

$$(1) \qquad L_{i,1}\varphi_1 + \dots + L_{i,c}\varphi_c + L\varphi_{c+i} = 0 \qquad (i = 1, \dots, q-c)\,[3]$$

si dimostra (cfr [1], prop. 2) che i vettori $\lambda_1 = (\bar{L}_{1,1}, \dots, \bar{L}_{1,c}, \bar{L}, \bar{0}, \dots, \bar{0}), \dots, \lambda_{q-c} = (\bar{L}_{q-c,1}, \dots, \bar{L}_{q-c,c}, \bar{0}, \dots, \bar{L})$ generano $ker\ \omega$ sopra C; pertanto si può porre $(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_q) = \sum_{i=1}^{q-c} a_i\lambda_i$ (con $a_i \in C$) Ne segue facilmente che $a_i = \bar{A}_{c+i}/\bar{L}$ $(i = 1, \dots, q-c)$ e quindi: $\bar{L}\bar{A}_j = \sum_{i=1}^{q-c} \bar{A}_{c+i}\bar{L}_{i,j}$ $(j = 1, \dots, c)$. Posto $\nu_j = LA_j - \sum_{i=1}^{q-c} A_{c+i}L_{i,j}$, $(j = 1, \dots, c)$, si ottiene: $LF = \sum_{i=1}^{q-c} (L_{i,1}\varphi_1 + L_{i,c}\varphi_c + L\varphi_{c+i})\,A_{c+i} + \sum_{j=1}^{c} \nu_j\varphi_j$, ossia - per le (1) - $LF \in \mathfrak{J}^2$, come si voleva.

Dimostriamo ora che:

Proposizione 1. - *Se $P \in A_d^K$ è uno zero semplice di $\mathfrak{J}$ ed $\mathfrak{M} \subset R$ è l'ideale di P, esiste almeno un polinomio $L \notin \mathfrak{M}$ tale che $L\mathfrak{D} \subset \mathfrak{J}^2$.*

Per il teorema 1' basta dimostrare che esiste un polinomio L contenuto in $\bigcap_{j=1}^{\mu} Q_j$ e non in $\mathfrak{M}$. Essendo P zero semplice di $(\varphi_1, \dots, \varphi_c)$, uno solo dei primi associati a $(\varphi_1, \dots, \varphi_c)$ è contenuto in $\mathfrak{M}$ (cfr. [5]. § 3, n. 4) e questo è necessariamente $\mathfrak{J}$. Pertanto posto $\mathfrak{P}_j = \sqrt{Q_j}(1 \leq j \leq \mu)$, si ha $\mathfrak{P}_j \notin \mathfrak{M}$ per ogni j e ciò implica, come è ben noto, che $\bigcap_{j=1}^{\mu} \mathfrak{P}_j \notin \mathfrak{M}$. Ne segue che esiste almeno un polinomio M contenuto in $\bigcap_{j=1}^{\mu} \mathfrak{P}_j$ e non in $\mathfrak{M}$ e quindi per qualche intero $r > 0$ si ha: $M^r \in \bigcap_{j=1}^{\mu} Q_j$, mentre - essendo $\mathfrak{M}$ primo - risulta certamente $M^r \notin \mathfrak{M}$. $L = M^r$ è quindi il polinomio cercato.

Proposizione 2. - *Se $\mathfrak{M}$ è l'ideale di uno zero semplice di $\mathfrak{J}$, risulta: $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}^2 R_{\mathfrak{M}} \cap R$* [4].

L'inclusione $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{J}^2 R_{\mathfrak{M}} \cap R$ è vera per ogni ideale primo $\mathfrak{M}$ di R, perchè $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{J}^2$ ed inoltre - $\mathfrak{D}$ essendo primario - si ha $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}R_{\mathfrak{M}} \cap R$ (cfr. [6], cap. IV, § 10, teor. 16). Dimostriamo quindi

[3] È possibile determinare gli $L_{i,j}$ in modo che valgano le (1) perchè - essendo $(\varphi_1, \dots, \varphi_c) = \mathfrak{J} \cap Q_1 \cap \dots \cap Q_\mu$ - risulta: $L\varphi_{c+i} \in (\varphi_1, \dots, \varphi_c)$ per ogni i.

[4] Con $R_{\mathfrak{M}}$ si indica l'anello quoziente di R rispetto all'ideale $\mathfrak{M}$ (per la definizione cfr. [6]. cap. IV, § 11).

che se $\mathfrak{M}$ è l'ideale di uno zero semplice di $\mathfrak{J}$ risulta anche $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{J}^2 R_{\mathfrak{M}} \cap R$. Infatti in questo caso se $F \in \mathfrak{D}$ esistono per la proposizione 1, un polinomio L, unità in $R_{\mathfrak{M}}$, ed un polinomio $F' \in \mathfrak{J}^2$ tali che $LF = F'$. Ne segue $F \in \mathfrak{J}^2 R_{\mathfrak{M}} \cap R$ e ciò è quanto si voleva.

Si può ora dimostrare subito che – come già detto al n. 1 – se V è non singolare ogni elemento di $\mathfrak{D}$ è una forma quadratica nei polinomi φ_i, ossia che:

TEOREMA 2. – *Se $\mathfrak{J} \subset R$ è ideale primo, proprio e privo di zeri multipli risulta $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}^2$.*

Poichè è sempre $\mathfrak{J}^2 \subset \mathfrak{D}$, basta provare che – nelle ipotesi fatte – è anche $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{J}^2$. Se $\mathfrak{T}$ è un primario contenente $\mathfrak{J}^2$, ed $\mathfrak{M}$ è un massimale contenente $\mathfrak{T}$, si ha $\mathfrak{J} \subset \sqrt{\mathfrak{T}} \subset \mathfrak{M}$; per l'ipotesi $\mathfrak{M}$ è allora l'ideale di uno zero semplice di $\mathfrak{J}$ e quindi – per la proposizione 2 – risulta $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}^2 R_{\mathfrak{M}} \cap R$. D'altra parte – essendo $\mathfrak{T}$ primario – si ha: $(\mathfrak{J}^2 R_{\mathfrak{M}} \cap R) \subset (\mathfrak{T} R_{\mathfrak{M}} \cap R) = \mathfrak{T}$ (cfr. ancora [6], cap. IV, § 10, teor. 16), ossia $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{T}$. L'ideale $\mathfrak{D}$ risulta pertanto contenuto in ogni primario di $\mathfrak{J}^2$ e quindi è $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{J}^2$ come si voleva.

3. – Il teorema 2 può pure ricavarsi come corollario dal risultato seguente, anch'esso conseguenza della proposizione 2 e relativo alla decomposizione primaria di $\mathfrak{J}^2$ nel caso in cui si abbandoni l'ipotesi che $\mathfrak{J}$ sia privo di zeri multipli:

TEOREMA 3. – *Se $\mathfrak{J} \subset R$ è ideale primo e proprio, $\mathfrak{D}$ è l'unico primario isolato dell'ideale $\mathfrak{J}^2$; inoltre gli zeri di un qualunque primario immerso di $\mathfrak{J}^2$ sono tutti singolari per $\mathfrak{J}$.*

Essendo $\mathfrak{J}$ primo è banale che se $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{T}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{T}_\nu$ è una decomposizione primaria ridotta di $\mathfrak{J}^2$, uno solo degli ideali $\mathfrak{T}_i$ – sia $\mathfrak{T}_1$ – è isolato ed $\mathfrak{J}$ è il suo radicale. Poichè, come si verifica facilmente, $\mathfrak{D}$ è $\mathfrak{J}$ – primario [5], posto $\mathfrak{T}'_1 = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{T}_1$, si può supporre che $\mathfrak{J}^2$ abbia la seguente decomposizione ridotta: $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{T}'_1 \cap \mathfrak{T}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{T}_\nu$ con i $\mathfrak{T}_i (2 \leq i \leq \nu)$ tutti primari immersi. Per provare la prima parte del teorema basta dimostrare che $\mathfrak{T}'_1 = \mathfrak{D}$. Intanto si ha: $\mathfrak{T}'_1 \subset \mathfrak{D}$. Se poi $G \in \mathfrak{D}$, per il teorema 1 esiste un polinomio $L \notin \mathfrak{J}$ tale che $LG \in \mathfrak{J}^2 \subset \mathfrak{T}'_1$ e ciò implica $G \in \mathfrak{T}'_1$ (perchè $\mathfrak{T}'_1$ è $\mathfrak{J}$ – primario). Dunque: $\mathfrak{D} = \mathfrak{T}'_1$, come si voleva. Sia ora $\mathfrak{T}$ un qualunque primario immerso di $\mathfrak{J}^2$ ed $\mathfrak{M} \in R$ l'ideale di uno zero P di $\mathfrak{T}$. Se P fosse semplice per $\mathfrak{J}$, per la proposizione 2 si avrebbe

[5] cfr. [1], n. 5.

$\mathfrak{D} = \mathfrak{J}^2 R_{\mathfrak{M}} \cap R \subset \mathfrak{T}$ e $\mathfrak{T}$ non potrebbe comparire in nessuna decomposizione ridotta di $\mathfrak{J}^2$. Dunque ogni zero di $\mathfrak{T}$ è singolare per $\mathfrak{J}$ ed il teorema è completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE. – È immediato ricavare che *gli ideali primi di R il cui quadrato è primario possono caratterizzarsi come ideali primi per i quali risulta* $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}^2$ (6).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. T. BONARDI, *Sulle ipersuperficie aventi una varietà algebrica assegnata come luogo di punti singolari*, Le Matematiche, vol. 22 (1967), pp. 10-18.

[2] G. Z GIAMBELLI, *Estensione del "Fundamentalsatz" alle varietà rappresentate coll'annullare tutti i determinanti di 2° ordine contenuti in una matrice generica di forme a due linee*, Atti R. Acc. di Torino, vol. 41 (1905-1906), pp. 197-220.

[3] D. G. NORTHCOTT, *Ideal Theory*, Cambridge University Press (1963).

[4] R. TORELLI, *Sopra certe estensioni del teorema $Af + Bg$*, Atti R. Acc. di Torino, vol 41 (1905-1906), pp. 186-196.

[5] O. ZARISKI, *The concept of a simple point of an abstract algebraic variety*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 62 (1967), pp. 1-52.

[6] O. ZARISKI - P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, vol. II, Van Nostrand (1959).

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 15 giugno 1967.

(6) Un'altra dimostrazione di questo risultato - indipendente dal teorema 3 - trovasi in [1], teorema 2.