Marina Arena

Su di una generalizzazione del sottogruppo di Hughes.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 456–460.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_456_0>

Su di una generalizzazione del sottogruppo di Hughes.

MARINA ARENA (Firenze) (*)

Sunto. - *Se π è un insieme di numeri naturali, tale che se un numero appartiene a π, anche ogni suo divisore vi appartiene, e se G è un gruppo non esaurito dagli elementi di periodo divisibile per qualche numero di π, il sottogruppo generato dagli elementi di G il cui periodo non appartiene a π, contiene ogni termine della serie centrale ascendente transfinita e quindi anche l'ipercentro di G.*

1. - In un recente lavoro ([1]) V. ZAMBELLI ha provato fra l'altro che, se p è un numero primo e G un gruppo contenente qualche elemento non identico di periodo $\neq p$ (eventualmente infinito), il sottogruppo generato dagli elementi di periodo $\neq p$ (sottogruppo di HUGHES) contiene ogni termine della serie centrale ascendente. Successivamente ([2]) essa ha provato che se G è un gruppo contenente qualche elemento di periodo infinito, il sottogruppo di G generato dagli elementi di periodo infinito contiene ogni termine della serie centrale ascendente. Nel presente lavoro, diamo un teorema generale, nel quale rientrano come casi particolari i due ora citati. Precisamente, si è provato che, se π è un insieme di numeri naturali tale che, se x appartiene a π, anche ogni suo divisore vi appartiene, e se G è un gruppo non esaurito dagli elementi il cui periodo sia divisibile per qualche numero di π, il sottogruppo generato dagli elementi di G il cui periodo non appartiene a π contiene ogni termine (non solo della ordinaria serie centrale ascendente, ma anche) della serie centrale ascendente transfinita, e quindi contiene l'ipercentro di G. Se π consta di un solo numero p (necessariamente primo) si ha un teorema in cui rientra quello provato nella ([1]); se π consta di tutti i numeri naturali, un teorema in cui rientra quello dato in ([2]).

2. - Sia π un insieme di numeri naturali tale che se $x \in \pi$ e y divide x, anche $y \in \pi$.

Sia G un gruppo il quale *non sia esaurito dai suoi elementi il cui periodo sia divisibile per qualche numero appartenente a* π, cioè

(*) Eseguita nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

G abbia qualche elemento o di periodo infinito o di periodo primo con ogni numero di π.

Sia *H il sottogruppo generato dagli elementi di G il cui periodo non appartiene a π*; H è quindi diverso dal sottogruppo identico.

Mostreremo che in queste ipotesi H contiene l'ipercentro di G.

Se H non coincide con G, tutti gli elementi di $G - H$ hanno periodo in π.

Vale il seguente

TEOREMA 1. - *H contiene il centro C_1 di G.*

Procediamo per assurdo, supponendo $C_1 \not\subseteq H$. Sia $c \in C_1$ e $c \notin H$. Poichè $c \in G - H$, il periodo di c è un numero di π

$$c^n = 1, \qquad n \in \pi.$$

Scelto $h \in H$ di periodo infinito o primo con ogni numero di π, deve aversi $c \cdot h \notin H$; allora esiste un $k \in \pi$, tale che

$$(ch)^k = 1.$$

Ma $1 = (ch)^{kn} = 1 \cdot h^{kn}$ da cui segue $h^{kn} = 1$ onde il periodo di h divide kn e quindi è prodotto di numeri primi che dividono k o n, cioè che appartengono a π, contro l'ipotesi; allora $C_1 \subseteq H$.

TEOREMA 2. - *Se H non coincide con G, gli elementi del centro C_1 di G hanno periodo finito i cui divisori primi sono numeri di π.*

Sia $c \in C_1$. In base al teor. 1, è $C_1 \subseteq H$, onde $c \in H$.

Se $g \in G - H$, allora $g^k = 1$, $k \in \pi$.

Essendo $c \in H$, $g \notin H$, si ha $cg \notin H$, onde esiste un $n \in \pi$ per cui $(cg)^n = 1$. Allora $1 = (cg)^{nk} = c^{nk} \cdot 1 = c^{nk}$.

Onde il periodo di c divide nk, cioè è prodotto di numeri primi appartenenti a π.

3. - TEOREMA 3. - *Per ogni ordinale α esiste un sottogruppo normale C_α di G tale che:*

a) *Se $\alpha = 1$, C_α é il centro di G.*

b) *Se α non è un numero limite, cioè se esiste un ordinale β tale che $\alpha = \beta + 1$, C_α è la retroimmagine del centro di G/C_β nell'omomorfismo naturale di G su G/C_β.*

c) *Se α è un numero limite, è $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$.*

Per $\alpha = 1$, $C_\alpha = C_1$ è il centro di G, e quindi è normale.

Procediamo allora per induzione transfinita e supponiamo pertanto che per ogni $\beta < \alpha$ esista un sottogruppo normale C_β che verifichi le condizioni del teorema.

Allora se esiste un β tale che $\alpha = \beta + 1$ si ha che per ipotesi esiste C_β ed è normale in G. La retroimmagine, nell'omomorfismo naturale di G su G/C_β, del centro C_1^β di G/C_β è un sottogruppo normale C_α di G verificante le condizioni del teorema.

Se invece α è un numero limite, per ogni $\beta < \alpha$ è definito un sottogruppo normale C_β. Allora il sottogruppo $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$ è normale in G, perchè unione di sottogruppi normali, e verifica le condizioni del teorema. I C_α costituiscono una catena principale detta *serie centrale ascendente transfinita*; il suo ultimo termine (cioè $\bigcup C_\alpha$ per ogni ordinale α) è detto *ipercentro* di G.

Premettiamo ora alcune osservazioni che ci saranno utili in seguito.

Poichè C_α, per ogni α, è un sottogruppo normale di G, possiamo considerare il gruppo fattoriale G/C_α.

Vale il seguente

LEMMA. – *Per un dato ordinale α, sia H^α il sottogruppo di G/C_α generato dall'unità e dai suoi elementi di periodo infinito o primo con ogni numero di π.*

Allora, se $I \neq H^\alpha = G/C_\alpha$ anche $H = G$.

Sia ω_α l'omorfismo naturale di G su G/C_α e $\overline{H}^\alpha$ la retroimmagine di H^α in ω_α.

(p) — $\overline{H}^\alpha$ é contenuto in H.

Infatti se un elemento di G ha periodo in π, il suo corrispondente in ω_α ha periodo in π. Allora gli elementi di G/C_α che non hanno periodo $\in \pi$, provengono da elementi che non hanno periodo in π.

Se ora $H^\alpha = G/C_\alpha$ anche $\overline{H}^\alpha = G$ onde, essendo $\overline{H}_\alpha \subseteq H$, $H = G$.

COROLLARIO 1. – *Se H^α non è il sottogruppo identico, il centro C_1^α di G/C_α è contenuto in H^α.*

Si applica il teorema 1 a G/C_α.

COROLLARIO 2. – *Se H non coincide con G e H^α non è il sottogruppo identico, il centro C_1^α di G/C_α ha elementi i cui periodi hanno divisori primi tutti in π.*

Da $H \subset G$ segue che anche $H^\alpha \subset G/C_\alpha$; basterà allora ripetere il procedimento del teorema 2.

4. - TEOREMA 4. – *Se H non coincide con G, e C_α è un termine nella serie centrale ascendente transfinita, si ha che*

(i) *Tutti i suoi elementi hanno periodo finito, i cui divisori primi sono numeri di π.*

(ii) *G/C_α ha qualche elemento di periodo infinito o primo con ogni numero di π.*

Proviamo anzitutto che se C_α, per ogni α, ha elementi tutti di periodo finito i cui divisori primi sono numeri di π, G/C_α ha qualche elemento di periodo infinito o primo con ogni numero di π.

G per ipotesi ha elementi di periodo infinito o primo con ogni numero di π.

Consideriamo l'omomorfismo naturale ω_α di G su G/C_α.

Sia a un elemento di G il cui periodo è infinito o primo con ogni numero di π e sia $\omega_\alpha : a \to \bar{a}$. Se $\bar{a}$ ha periodo finito m, si ha $a^m \in C_\alpha$ e poichè per C_α vale la (i), a^m ha periodo finito n, onde $a^{mn} = 1$ e anche a ha periodo finito; allora il periodo di $\bar{a}$ divide quello di a e quindi o vale 1 o è primo con ogni numero appartenente a π. Ma se $\bar{a}$ ha periodo 1, $a \in C_\alpha$ e quindi il suo periodo è divisibile solo per numeri primi appartenenti a π contro l'ipotesi. Ne segue che il periodo di $\bar{a}$ o è infinito, o è primo con ogni numero di π.

Quindi se vale la (i) per ogni C_α, vale anche la (ii).

Proviamo la (i) per induzione transfinita.

Per $\alpha = 1$, la (i) è verificata.

Supponiamo che la (i) valga per ogni $\beta < \alpha$ e proviamola per α.

1) Se α non è un numero limite, cioè esiste un ordinale β per cui $\alpha = \beta + 1$, allora $\omega_\beta : C_\alpha = C_{\beta+1} \to C_1^\beta = C_1(G/C_\beta)$ dove C_β gode della (i), quindi G/C_β ha qualche elemento di periodo infinito o primo con ogni numero di π, onde $H^\beta \neq 1$.

Allora per il corollario 2, il centro C_1^β di G/C_β verifica la (i); per ogni $c \in C_\alpha$ si ha $\omega_\beta : c \to \bar{c}$, $c^n \to \bar{c}^n = 1$ dove n indica il periodo di $\bar{c}$ e quindi ha divisori primi tutti in π.

$c^n \in C_\beta$; per l'ipotesi di induzione il periodo q di c^n ha divisori primi tutti in π.

Si ha allora $c^{nq} = 1$ con nq a divisori primi tutti in π.

Ne segue che il periodo di c è finito e divide nq, onde anch'esso ha divisori primi tutti in π e C_α verifica la (i).

2) Se α è un numero limite, è $C_\alpha \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} C_\gamma$.

Ogni elemento x di C_α è in almeno un C_γ. Ma per ipotesi C_γ verifica la (i), onde x, quale elemento di C_γ, ha periodo finito i cui divisori primi appartengono a π, onde C_α verifica la (i) (e quindi G/C_α verifica la (ii)).

Poichè tutti i termini della serie centrale ascendente transfinita di G verificano le proprietà (i) e (ii), si ha intanto:

COROLLARIO 3 - *Se H non coincide con G, l'ipercentro U di G ha elementi tutti di periodo finito, i cui divisori primi sono numeri di π. Il gruppo quoziente G/U ha qualche elemento di periodo infinito o primo con ogni numero di π.*

Siamo giunti infine a dimostrare il seguente

TEOREMA 5. - *L'ipercentro U di G è contenuto in H.*

Se ogni termine C_α della serie centrale ascendente transfinita di G è contenuto in H, anche $U \subseteq H$. Basterà quindi provare che, per ogni ordinale α, $C_\alpha \subseteq H$.

Procediamo per induzione transfinita.

C_1 è contenuto in H.

Sia $C_\beta \subseteq H$ per ogni $\beta < \alpha$.

1) Se α non è numero limite, $\alpha = \beta + 1$ e $\omega_\beta : C_{\beta+1} \to C_1^\beta$. G/C_β verifica la (ii). Per il corollario 1, $C_1^\beta \subseteq H^\beta$, onde $C_{\beta+1}$ è contenuto in $\bar{H}^\beta$.

D'altronde $\bar{H}^\beta \subseteq H$ (vedi Lemma (p)) da cui segue che $C_{\beta+1} \subseteq H$.

2) Se α è un numero limite, $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$.

Tutti i C_β con $\beta < \alpha$ sono per ipotesi di induzione contenuti in H.

Ogni elemento x di C_α appartiene ad almeno un C_β e poichè $C_\beta \subseteq H$ anche $x \in H$; quindi tutti gli elementi di C_α appartengono ad H, onde è $C_\alpha \subseteq H$.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. ZAMBELLI, *Il sottogruppo di Hughes e la serie centrale ascendente*, Boll. Un. Mat. It., 19 (1964), pp. 478-489.

[2] — —, *Gli elementi di periodo infinito di un gruppo e le serie centrali*, Boll. Un. Mat. It., 21 (1966), pp. 19-24.

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U.M.I.
il 19 giugno 1967