Bollettino
Unione Matematica Italiana

G. Vranceanu

Varietà differenziabili e trasformazioni puntuali. Nota II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 461–468.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_461_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Varietà differenziabili e trasformazioni puntuali.

G. VRANCEANU (Bucarest)

NOTA II

Sunto. - *Si considerano delle riduzioni alla forma canonica delle trasformazioni puntuali* (7).

2. – Forma canonica della trasformazione puntuale associata a V_n.

Vogliamo far vedere come si può dare alla trasformazione puntuale (7) una forma canonica intorno ad un punto O prefissato di V_n, ossia di un punto dell'intorno U di V_n utilizzando i metodi della teoria delle trasformazioni puntuali, considerata specialmente da MARIO VILLA e dalla scuola di Geometria di Bologna.

Possiamo sempre supporre che il punto O sia l'origine delle coordinate $x^1, \ldots, x^n$, cosicchè facendo una trasformazione lineare ed ortogonale conveniente delle coordinate y in E_N si può supporre che le formule (3) si scrivano

$$y^i = x^i + \ldots, \quad y^\alpha = 0 + \ldots \quad (i = 1, \ldots, n; \ \alpha = n + 1, \ldots, N)$$

i termini non scritti essendo del secondo ordine nelle variabili $x^1, \ldots, x^n$. Infatti questo significa supporre che lo spazio tangente in O di V_n è dato dalle equazioni $y^\alpha = 0$ $(\alpha = n + 1, \ldots, N)$.

Fatto questo prendiamo come vettori Y_α^a dello spazio normale a V_n in O quelli dati dalle formule

$$Y_\alpha^a = \delta_\alpha^a + q_{\alpha j}^a x^j + \ldots \tag{11}$$

dove $q_{\alpha j}^a$ sono delle costanti e dove i termini non scritti sono del secondo ordine nelle $x^1, \ldots, x^n$. Possiamo allora scrivere le formule (7) sotto la forma

$$\begin{aligned} y^i &= x^i - \frac{1}{2} p_{jk}^i x^j x^k + x^\lambda q_{\lambda j}^i x^j + \ldots \\ y^\alpha &= x^\alpha - \frac{1}{2} p_{jk}^\alpha x^j x^k + x^\lambda q_{\lambda j}^\alpha x^j + \ldots \end{aligned} \tag{11'}$$

dove p^i_{jk}, p^α_{jk} sono delle costanti e i termini non scritti sono del terzo ordine nelle variabili $x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^N$, ma sono evidentemente lineari nelle variabili $x^{n+1}, \ldots, x^N$.

Ora osserviamo che se si tiene conto delle formule (11) nelle formule (6) e (6'), otteniamo le condizioni

$$q^\alpha_{\beta j} + q^\beta_{\alpha j} = 0, \qquad p^\alpha_{jk} - q^k_{\alpha j} = 0.$$

Ne risulta dunque che la trasformazione puntuale (11') si può scrivere

$$\begin{aligned} y^i &= x^i - \frac{1}{2} p^i_{jk} x^j x^k + x^\lambda p^\lambda_{ij} x^j + \ldots \\ y^\alpha &= x^\alpha - \frac{1}{2} p^\alpha_{jk} x^j x^k + x^\lambda q^\alpha_{\lambda j} x^j + \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

dove $q^\alpha_{\lambda j}$ sono delle quantità emisimmetriche negli indici α, λ [1].

Tenendo conto adesso delle prime formule (8'), si trova che le seconde forme fondamentali e le torsioni nell'origine sono date, tenendo conto delle (12), dalle formule

$$\varphi_\alpha = p^\alpha_{jk} dx^j dx^k, \qquad \psi_{\alpha\beta} = q^\beta_{\alpha j} dx^j \tag{12'}$$

dunque si ha così una interpretazione geometrica dei coefficienti p^α_{jk}, $q^\beta_{\alpha j}$ delle formule (12).

Riguardo ai coefficienti p^i_{jk} essi diventano nulli in coordinate normali associate alla prima forma fondamentale nell'origine. Abbiamo così il teorema:

Utilizzando coordinate normali rispetto alla prima forma fondamentale di V_n, la trasformazione puntuale associata si scrive utilizzando i termini del secondo ordine

$$\begin{aligned} y^i &= x^i + x^\lambda p^\alpha_{ij} x^j + \ldots \\ y^\alpha &= x^\alpha - \frac{1}{2} p^\alpha_{jk} x^j x^k + x^\lambda q^\alpha_{\lambda j} x^j + \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

dove p^α_{jk} e $q^\alpha_{\beta j}$ sono i coefficienti delle forme fondamentali e delle torsioni nell'origine.

[1] Vedasi G. VRANCEANU, *Variétés différentiables et transformations ponctuelles*, C.R. t. 264, 1967, p. 65-66.

Possiamo utilizzare queste formule per vedere in che condizioni la funzione f definita dalla formula (5) realizza il suo massimo nell'origine. Ora abbiamo, tenendo conto delle (13) per $x^\alpha = 0$

$$f = (c^1)^2 + \dots + (c^N)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - 2c^i x^i + c^\alpha p^\alpha_{jk} x^j x^k + \dots$$

i termini non scritti essendo del terzo ordine.

Ne risulta che perchè f abbia un massimo nell'origine dobbiamo avere $c^i = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, dunque il punto C deve essere nello spazio normale in O e poi la forma quadratica

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 + c^\gamma p^\alpha_{jk} x^j x^k \tag{14}$$

deve essere definita negativa. Ora questo può aver luogo solamente se nella famiglia di forme quadratiche

$$c^\alpha \varphi_\alpha = c^\alpha p^\alpha_{jk} x^j x^k$$

ne esiste una definita positiva (o negativa).

Tenendo conto del fatto che le equazioni

$$\varphi_\alpha = 0 \qquad (\alpha = n + 1, \dots, N)$$

definiscono le direzioni asintotiche, ne risulta che il punto O può essere punto di massimo per f solamente se in O le direzioni asintotiche sono immaginarie.

Si potrebbe ottenere lo stesso risultato considerato come funzione F definita su V_n la funzione

$$F = c^1 f^1 + \dots + c^N f^N \tag{14'}$$

e richiedendo che O sia un massimo o un minimo di F.

Osserviamo altresì che la trasformazione puntuale (13) ci dice che ad un punto $P(x^1, \dots, x^n)$ di V_n vicino ad O corrisponde, tenendo conto solamente dei termini del secondo ordine, il punto Q

$$y^i = x^i, \qquad y^\alpha = -\frac{1}{2} p^\alpha_{jk} x^j x^k.$$

Questo punto è definito dunque per mezzo delle sole seconde forme fondamentali di V_n e coincide con P solo nel caso in cui la direzione individuata da O e P è una direzione asintotica.

Abbiamo così il teorema:

Se in un qualunque punto O di V_n le trasformazioni puntuali del secondo ordine associate hanno dei punti uniti nello spazio tangente in O a V_n, diversi da O, la varietà non può essere chiusa.

Altrimenti detto per un punto di massimo o di minimo la trasformazione quadratica (13), possiede per $x^\alpha = 0$, un punto unito isolato in O.

Ritornando alla trasformazione puntuale (13) osserviamo che questa trasformazione conserva la sua forma per delle trasformazioni ortogonali delle x^i e delle x^α.

Supponiamo dunque di prendere

$$\bar{x}^i = c^i_j x^j \,, \quad \bar{x}^\alpha = c^\alpha_\beta x^\beta \tag{14''}$$

dove le c^i_j e le c^α_β soddisfano le condizioni di ortogonalità.

Le prime formule (13) ci danno

$$\bar{y}^i = c^i_j y^j = \bar{x}^i + c^i_j x^\lambda p^\lambda_{jk} x^k$$

e perciò dobbiamo avere

$$c^i_j x^\lambda p^\lambda_{jk} x^k = \bar{x}^\mu \bar{p}^\mu_{il} \bar{x}^l$$

ciò che ci dice che le p^λ_{jk} si devono trasformare secondo le formule

$$c^i_j p^\lambda_{jk} = c^\mu_\lambda \bar{p}^\mu_{il} c^l_k .$$

Moltiplicando per $c^s_k c^\rho_\lambda$ e sommando si hanno le formule

$$\bar{p}^\rho_{is} = c^i_j c^s_k p^\lambda_{jk} c^\rho_\lambda . \tag{15}$$

In modo analogo le seconde formule (13) ci danno

$$\bar{y}^\alpha = \bar{x}^\alpha - \frac{1}{2} c^\alpha_\beta p^\beta_{jk} x^j x^k + c^\alpha_\beta x^\lambda p^\beta_{\lambda j} x^j$$

ma tenendo conto delle (15) ne risulta che

$$\bar{y}^\alpha = \bar{x}^\alpha - \frac{1}{2} \bar{p}^\alpha_{jk} \bar{x}^j \bar{x}^k + \bar{x}^\mu \bar{q}^\alpha_{\mu s} \bar{x}^s$$

dove abbiamo per le torsioni le formule di trasformazione

$$\bar{q}^\alpha_{\beta l} = c^l_j c^\alpha_\rho c^\beta_\lambda q^\rho_{\lambda j} . \tag{15'}$$

Abbiamo dunque il teorema:

Per una trasformazione ortogonale (14'') *nello spazio tangente e nello spazio normale di* V_n, *i coefficienti della trasformazione puntuale associata si cambiano secondo le formule* (15) *e* (15').

Riguardo alle formule (15) esse ci dicono che rispetto a delle trasformazioni ortogonali nello spazio tangente le quantità p^λ_{ij}

$(\lambda = n+1, \dots, N)$ costituiscono N-n tensori del secondo ordine. Possiamo supporre allora che uno di questi tensori, per esempio il primo, sia stato ridotto alla forma canonica e cioè che $p^{n+1}_{ij} = 0$ per $i \neq j$.

Naturalmente possiamo supporre che una almeno delle quantità p^{n+1}_{ii} sia diversa da zero, per esempio, possiamo supporre che $p^{n+1}_{11} \neq 0$.

In questo caso le formule (15), per una trasformazione nello spazio normale ci danno

$$\bar{p}^{\rho}_{11} = c^{\rho}_{\lambda} p^{\lambda}_{11}$$

ciò che ci dice che le p^{λ}_{11} costituiscono le componenti di un vettore non nullo. Possiamo allora scegliere le c^{ρ}_{λ} in modo che si abbia

$$\bar{p}^{\rho}_{11} = 0 \qquad (\rho > n+1).$$

Infatti questo si ottiene prendendo

$$\bar{p}^{n+1}_{11} = \sqrt{(p^{n+1}_{11})^2 + \dots + (p^{N}_{11})^2},$$

$$= c^{n+1}_{\lambda} \frac{p^{\lambda}_{11}}{\sqrt{(p^{n+1}_{11})^2 + \dots + (p^{N}_{11})^2}} \qquad (\lambda = n+1, \dots, N).$$

Ora esiste sempre una trasformazione ortogonale con una linea o colonna date ad arbitrio.

Abbiamo dunque il teorema:

Utilizzando le trasformazioni (14″) *possiamo sempre supporre che siano verificate per la trasformazione puntuale* (13) *le condizioni*

$$p^{n+1}_{jk} = 0, \ (j \neq k), \ p^{n+1}_{11} \neq 0, \ p^{\rho}_{11} = 0 \ (\rho > n+1). \tag{16}$$

Consideriamo allora un punto P la cui proiezione sia nello spazio tangente sull'asse x^1, dunque un punto per cui si ha $x^2 = \dots = x^n = 0$.

Le formule (13) si scrivono allora

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 + x^{n+1} p^{n+1}_{11} x^1 \\ y^i &= 0 \qquad (i = 2, \dots, n) \\ y^{n+1} &= x^{n+1} - \frac{1}{2} p^{n+1}_{11} (x^1)^2 + x^{\lambda} q^{n+1}_{\lambda 1} x^1 \\ y^{\alpha} &= x^{\alpha} + x^{\lambda} q^{\alpha}_{\lambda 1} x^1 \ (\alpha > n+1). \end{aligned} \tag{17}$$

Esse ci dicono che lo spazio lineare

$$x^2 = \dots = x^n = 0$$

è uno spazio invariante. Se aggiungiamo le equazioni

$$x^{n+2} = \dots = x^N = 0$$

si ottiene un piano (x^1, x^{n+1}) che è un piano invariante ossia si ha $y^\alpha = 0$ $(\alpha > n+1)$ se le torsioni sono nulle.

Dunque si ha il teorema:

Una trasformazione (13) *senza torsioni possiede sempre dei piani invarianti, aventi un asse nello spazio tangente e un asse nello spazio normale.*

Ne risulta che la presenza delle torsioni può avere come risultato l'assenza di piani invarianti della trasformazione puntuale (13).

Supponiamo che le torsioni siano nulle e che $N \leq 2n$.

Allora si può aver un caso particolare di trasformazioni puntuali (13) aventi $N - n$ piani invarianti e $2n - N$ rette invarianti e cioè le equazioni (13) si scrivono

$$(18)\qquad \begin{aligned} y^i &= x^i + x^{n+i} p^{n+i}_{ii} x^i \\ y^{n+i} &= x^{n+i} - \frac{1}{2} p^{n+i} (x^i)^2 \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \dots, N-n)$$
$$y^k = x^k \qquad (k = N-n+1, \dots, n).$$

È facile vedere che questo caso è realizzato per $N = 2n$ dal toro T_n, del quale abbiamo già dato le formule d'immersione nello spazio E_{2n}. Infatti prendendo in accordo colle formule (10″)

$$y^i = \sin x^i(1 + t^i), \qquad y^{n+i} = -1 + \cos x^i(1 + t^i)$$

si ottengono le formule (18) per $N = 2n$ se si pone

$$t^i = x^{n+i}, \qquad p^{n+i}_{ii} = 1.$$

Dunque la trasformazione puntuale (17) per $N = 2n$ conviene al toro T_n. Per $N < 2n$ la trasformazione puntuale (17) corrisponde ai cilindri, definiti come prodotto diretto di $N - n$ cerchi e $2n - N$ rette.

Per esempio, il cilindro propriamente detto dello spazio ordinario per cui dunque $N = 3$ e $n = 2$, che è dunque il prodotto di un cerchio e di una retta, ammette l'immersione

$$(19)\qquad x = \sin\theta(1 + t), \qquad y = -1 + \cos\theta(1 + t), \qquad z = u$$

dove θ, t, u sono coordinate curvilinee.

Ora la trasformazione puntuale (13) rispetto all'origine $\theta = t = u = 0$ si scrive

$$x = \theta + \theta t, \qquad y = t - \frac{\theta^2}{2}, \qquad z = u \tag{20}$$

e coincide colle formule (18) per $x^1 = \theta$, $x^2 = u$, $x^3 = t$, $p^3_{11} = 1$.

Osserviamo adesso che notando con $q^\alpha_{\alpha jk}$ i termini del secondo ordine delle Y^a_α dati dalle formule (11) si possono scrivere le (13) utilizzando anche i termini del terzo ordine sotto la forma

$$\begin{aligned} y^i &= x^i + x^\lambda p^\lambda_{ij} x^j + x^\lambda q^i_{\lambda jk} x^j x^k \\ y^\alpha &= x^\alpha - \frac{1}{2} p^\alpha_{jk} x^j x^k - \frac{1}{6} p^\alpha_{jkl} x^j x^k x^l + x^\lambda (q^\alpha_{\lambda j} x^j + q^\alpha_{\lambda jk} x^j x^k \end{aligned} \tag{21}$$

supponendo che le $x^1, \ldots, x^n$ siano delle coordinate normali di V_n nell'origine. Ora dalla condizione (6) di normalità delle Y^a_α risultano le formule

$$q^\alpha_{\beta jk} + q^\beta_{\alpha jk} + p^\alpha_{ij} p^\beta_{ik} + q^\lambda_{\alpha j} q^\lambda_{\beta k} = 0 \tag{22}$$

che servono a definire le quantità $q^\alpha_{\beta jk}$ e siccome le $q^\alpha_{\beta jk}$ sono simmetriche in j, k, dobbiamo avere le condizioni

$$p^\alpha_{ij} p^\beta_{ik} - p^\alpha_{ik} p^\beta_{ij} = q^\lambda_{\beta i} q^\lambda_{\alpha k} - q^\lambda_{\beta k} q^\lambda_{\alpha j}. \tag{23}$$

Nello stesso tempo le (6′) si scrivono in virtù delle (22)

$$Y^i_\alpha - Y^\lambda_\alpha \left(p^\lambda_{jk} x^j + \frac{1}{2} p^\lambda_{jlk} x^j x^l \right) + \ldots = 0$$

ciò che ci dà

$$q^k_{\lambda jl} = \frac{1}{2} p^\lambda_{kjl} - \frac{1}{2} \left(q^\lambda_{\alpha l} p^\lambda_{jk} + q^\lambda_{\alpha j} p^\lambda_{lk} \right)$$

e queste formule insieme colle (22) servono a definire i termini del terzo grado della trasformazione puntuale (21) lasciando arbitrarie le quantità

$$q^\alpha_{\beta jk} - q^\beta_{\alpha jk}.$$

Ora supponiamo che siano verificate le condizioni (16), dunque che si abbia $p^{n-1}_{jk} = 0$ $(j \neq k)$ e che lo spazio sia senza torsioni. In questo caso le formule (23) per $\alpha = n + 1$, $\beta > n + 1$ si scrivono

$$(p^{n+1}_{kk} - p^{n+1}_{ll}) p^\beta_{kl} = 0$$

e questo ci dice che se $p^{n+1}_{kk} \neq p^{n+1}_{ll}$ si deve avere $p^\beta_{kl} = 0$ $(k \neq l)$.

Se $p_{kk}^{n+1} = p_{ll}^{n+1}$ allora per una trasformazione ortogonale delle sole variabili x^k, x^l possiamo ridurre p_{kl}^{n+2} a zero e questo ci dice che esiste un sistema di coordinate ortogonali $x^1, \dots, x^n$ in cui tutte le forme quadratiche $p_{jk}^{\alpha} x^j x^k$ sono ridotte alla forma canonica. Abbiamo il teorema:

Data una varietà differenziabile V_n immersa in E_N senza torsioni, la trasformazione puntuale quadratica associata può essere presa sotto la forma canonica

$$
(24) \qquad \begin{aligned} y^i &= x^i + x^\lambda p_{ii}^\lambda x^i \\ y^\alpha &= x^\alpha - \frac{1}{2} p_{jj}^\alpha (x^j)^2. \end{aligned}
$$

Questa forma canonica ci dice che nell'origine i simboli di RIEMANN R_{ijkl} con tre o quattro indici distinti sono nulli mentre quelli con due indici distinti si scrivono

$$
(25) \qquad R_{ij,ij} = p_{ii}^\alpha p_{jj}^\alpha .
$$

Basta utilizzare per questo le formule di GAUSS nell'origine.

Ora considerando le quantità p_{ii}^α come le componenti di un vettore v_i, dunque un vettore situato nello spazio euclideo E_{N-n}, le formule (25) ci dicono che abbiamo

$$
(26) \qquad R_{ij,ij} = v_i \times v_j
$$

dove $\times$ significa prodotto scalare. Indicando con θ_{ij} l'angolo dei vettori v_i, v_j abbiamo dunque

$$
(27) \qquad R_{ij,ij} = l_i l_j \cos \theta_{ij}
$$

dove l_i, l_j sono le lunghezze dei vettori v_i, v_j.

Ne risulta che il segno delle qualità $R_{ij,ij}$ è dato da $\cos \theta_{ij}$ e siccome nel nostro caso $R_{ij,ij}$ ci dà la curvatura della faccetta x^i, x^j ne risulta che nello spazio V_n la curvatura della faccetta piana x^i, x^j è negativa se l'angolo θ_{ij} è ottuso e si può dimostrare che se tutti questi angoli sono ottusi $N - n$ deve essere più grande di $n - 2$, dunque che uno spazio V_n senza torsioni con curvature piane negative non può essere immerso in E_{2n-2}.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 28 giugno 1967