Bollettino Unione Matematica Italiana

Romolo Musti

Alcune proprietà delle trasformazioni puntuali tra spazi proiettivi ordinari che posseggono rette quasi-ipercaratteristiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 469–477.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_469_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Alcune proprietà delle trasformazioni puntuali tra spazi proiettivi ordinari che posseggono rette quasi-ipercaratteristiche.

ROMOLO MUSTI (Bologna) (*)

Sunto. - *Si dà una nuova caratterizzazione della nozione di retta ipercaratteristica in senso debole. Si introduce la nozione di retta quasi-ipercaratteristica e si dimostra che se una trasformazione fra spazi proiettivi ordinari possiede in ogni coppia regolare di punti corrispondenti due coppie di rette quasi-ipercaratteristiche corrispondenti, in ciascuno dei due spazi il piano di tali rette inviluppa in generale una famiglia di superficie. Si danno condizioni necessarie e sufficienti affinchè tali superficie siano piane.*

1. – Sia T una trasformazione puntuale fra due spazi proiettivi ordinari S, $\bar{S}$ e $(A, \bar{A})$ una coppia regolare di punti corrispondenti. Ho chiamato, in un precedente lavoro (1), ipercaratteristica in senso debole una retta caratteristica (2) r per A quando esiste una omografia tangente (sono ∞^2) K a T in $(A, \bar{A})$ tale che per ogni curva γ passante semplicemente per A ed in A tangente ad r, le curve $T\gamma$ e $K\gamma$, corrispondenti di γ in T e K rispettivamente, abbiano in $\bar{A}$ un contatto geometrico del 3° ordine. Nello stesso lavoro ho anche dimostrato che condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni E_3 piano tangente ad una retta caratteristica r per A sia trasformato in E_3 piano è che r sia ipercaratteristica in senso debole.

In questa Nota darò dapprima una nuova caratterizzazione della nozione di retta ipercaratteristica in senso debole. Più precisamente dimostrerò che una retta r per A è ipercaratteristica in senso debole se e solo se tre piani per essa sono caratteristici (3)

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca Matematica n. 26 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) Cfr. R. MUSTI, *Sugli E_3 piani corrispondenti in una trasformazione puntuale fra spazi poiettivi*, Boll. U.M.I., Ser. III, n. 3, (1966), p. 283.

(2) L'ipotesi che r sia caratteristica è superflua perchè implicita nelle condizioni che seguono.

(3) Un piano per A si dice caratteristico se la calotta del secondo ordine di centro $\bar{A}$ della superficie corrispondente è piana. Condizione neces-

e inoltre é inflessionale di specie superiore (4). Lasciando cadere quest'ultima condizione, chiamerò *quasi-ipercaratteristica* una retta r per A se tre piani per essa sono caratteristici. Si riconosce che se una retta r per A è quasi-ipercaratteristica esiste un pennello di E_2, il cui piano chiamerò *singolare*, di centro A e tangenti a r i cui E_3 piani sono tutti trasformati da T in E_3 piani. Si prova anche che se r ed s sono due rette quasi-ipercaratteristiche uscenti da A (distinte), il loro piano è caratteristico.

Si considerano poi (n. 3) le trasformazioni che posseggono, in ogni coppia regolare $(A, \bar{A})$ di punti corrispondenti, due coppie di rette (r, s), $(\bar{r}, \bar{s})$ quasi-ipercaratteristiche corrispondenti che non siano, in ciascuno dei due spazi, generatrici base doppie dei due sistemi di coni cubici che forniscono le rette caratteristiche uscenti rispettivamente da A e $\bar{A}$. Si dimostra che i piani caratteristici rs, $\overline{rs}$ inviluppano sempre sistemi di superficie caratteristiche corrispondenti che sono piani se e solo se i piani singolari relativi alle rette r, s $(\bar{r}, \bar{s})$ coincidono.

2. - Sia T una trasformazione differenziabile di classe C^3 fra due spazi proiettivi ordinari $S, \bar{S}$ ed $(A, \bar{A})$ una coppia regolare di punti corrispondenti che assumiamo come origini di due sistemi proiettivi di riferimento in $S, \bar{S}$ rispettivamente. La T può sempre rappresentarsi localmente, nell'intorno della coppia considerata, con le equazioni (5)

$$\bar{x}_i = x_i + \varphi^i(x) + \psi^i(x) + [4] \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

avendo posto

$$\varphi^i(x) = \sum_{j,\,k} b^i_{jk} x_j x_h\,, \quad \psi^i(x) = \sum_{j,\,h,\,k} c^i_{jhk} x_j x_h x_h$$

e avendo indicato con [4] i resti degli sviluppi.

Premettiamo che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un piano per A sia caratteristico è che esista una omografia K tangente a T in $(A, \bar{A})$ la cui K-linearizzante sia tale che le rette K-linearizzanti delle rette della stella di centro A appartengano tutte al piano π.*

saria e sufficiente affinchè un piano per A sia caratteristico è che contenga tre (almeno) rette caratteristiche uscenti da A. Cfr. L. MURACCHINI, *Alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali fra spazi*, Boll. U.M.I., Ser. III, n. 2, (1952), pp. 123-128.

(4) M. VILLA, *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, Boll. U.M.I.. Ser. III, vol. II, (1947), p. 188.

(5) Cfr. M. VILLA, *Lezioni di Geometria*, vol. II, Cedam (1965), p. 332.

La condizione è sufficiente. Supposto che esista una tale omografia, essa puó sempre rappresentarsi con le equazioni

$$\bar{x}_i = x_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

ed il piano π può sempre ridursi ad avere l'equazione $x_3 = 0$. La trasformazione K–linearizzante è allora

$$l'_1 = \varphi^1(l), \qquad l'_2 = \varphi^2(l), \qquad l'_3 = \varphi^3(l) = 0$$

ove si indichino con $\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = \frac{x_3}{l_3}$ le equazioni di una retta p per A e con $\frac{x_1}{l_1'} = \frac{x_2}{l_2'} = \frac{x_3}{l_3'}$ quelle della retta p' K–linearizzante. Segue che sono caratteristiche le rette del piano π determinate dal sistema

$$\begin{cases} l_3 = 0 \\ l_1\varphi^2(l) - l_2\varphi^1(l) = 0. \end{cases}$$

Il piano π è pertanto piano caratteristico.

La condizione è necessaria. Supponiamo infatti che almeno tre delle rette caratteristiche giacciano nel piano π che assumiamo come piano $x_3 = 0$. Tali rette debbono ottenersi come intersezione di ciascuno dei tre coni cubici

$$x_2\varphi^1(x) - x_1\varphi^2(x) = 0$$

$$x_3\varphi^1(x) - x_1\varphi^3(x) = 0$$

$$x_3\varphi^2(x) - x_2\varphi^3(x) = 0$$

col piano $x_3 = 0$. Gli ultimi due coni però non possono intersecarsi sul piano $x_3 = 0$ in più di due rette, tranne che non sia identicamente

$$\varphi^3(x_1,\ x_2,\ 0) = 0$$

cioè

$$b^{3}_{11} = b^{3}_{12} = b^{3}_{22} = 0.$$

Segue immediatamente l'asserto.

Possiamo ora dimostrare che: *Una retta per A è ipercaratteristica in senso debole se e solo se tre piani per essa sono caratteristici ed è inflessionale di specie superiore.*

Si assuma la retta come retta $x_2 = x_3 = 0$. Le condizioni perchè essa sia ipercaratteristica in senso debole sono (6)

a) $$b^{2}_{11} = b^{3}_{11} = b^{2}_{13} = b^{3}_{12} = 0,\ b^{2}_{21} = b^{3}_{31}$$

(6) Cfr. R. Musti, op. cit. in (1), pp. 283-284.

$b)$ $$\overset{3}{c}_{111} = \overset{2}{c}_{111} = 0.$$

Per il teorema precedentemente dimostrato si trova facilmente che, perchè il piano $x_2 + \lambda x_3 = 0$ sia caratteristico, occorre e basta che λ soddisfi contemporaneamente le condizioni

$$\overset{3}{b}_{22}\lambda^3 + (\overset{2}{b}_{22} - 2\overset{3}{b}_{23})\lambda^2 + (\overset{3}{b}_{33} - 2\overset{2}{b}_{23})\lambda + \overset{2}{b}_{33} = 0$$

$$\overset{3}{b}_{12}\lambda^2 + (\overset{2}{b}_{12} - \overset{3}{b}_{13})\lambda - \overset{2}{b}_{13} = 0$$

$$\overset{3}{b}_{11}\lambda + \overset{2}{b}_{11} = 0.$$

Vi sono dunque tre piani caratteristici per la retta considerata se e solo se hanno luogo le $a)$. Le $b)$ d'altra parte, come è noto, hanno luogo se e solo se la retta (caratteristica) $x_2 = x_3 = 0$ è inflessionale di specie superiore.

Osserviamo intanto che se valgono le $a)$ e non le $b)$, cioè se tre piani per la retta caratteristica $x_2 = x_3 = 0$ sono caratteristici senza che la retta sia iperinflessionale (e quindi non ipercaratteristica in senso debole) tutti e solo gli E_2 di centro A tangenti ad r del piano π di equazione

$$\overset{3}{c}_{111} x_2 - \overset{2}{c}_{111} x_3 = 0$$

hanno la proprietà che ogni E_3 piano per ciascuno di essi è trasformato dalla T in E_3 piano (7). Chiameremo *quasi-ipercaratteristica* una retta siffatta e *singolare* il piano π.

Ogni piano per una retta ipercaratteristica in senso debole è ovviamente singolare.

Osserviamo ancora che *se due rette distinte per A sono quasi-ipercaratteristiche il loro piano è caratteristico.* Assumendo infatti le due rette come rette $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_3 = 0$ dovrà aversi

$$\overset{2}{b}_{11} = \overset{2}{b}_{13} = \overset{3}{b}_{11} = \overset{3}{b}_{12} = \overset{2}{b}_{12} - \overset{3}{b}_{13} = 0$$

$$\overset{1}{b}_{22} = \overset{1}{b}_{23} = \overset{3}{b}_{12} = \overset{3}{b}_{22} = \overset{1}{b}_{12} - \overset{3}{b}_{23} = 0.$$

L'annullarsi di $\overset{3}{b}_{11}$, $\overset{3}{b}_{12}$, $\overset{3}{b}_{22}$ permette di determinare una omografia tangente K la cui K-linearizzante associa ad ogni retta della stella di centro A una retta del piano $x_3 = 0$. Il piano delle due rette è pertanto caratteristico. (8)

(7) Cfr. R. Musti, op. cit. in (1), p. 283.

(8) É ovvio che anche il piano di due rette ipercaratteristiche in senso debole è caratteristico.

3. - Consideriamo una trasformazione puntuale analitica T tra due spazi proiettivi ordinari S, $\bar{S}$ e sia A_0, B_0 una coppia regolare di punti corrispondenti in S, $\bar{S}$ rispettivamente. Associamo a ciascun punto della coppia, nel relativo spazio, un riferimento proiettivo per cui A_0 e B_0 siano punti fondamentali chiamando A_i, B_i $(i = 1, 2, 3)$ i rimanenti punti fondamentali.

Valgono le formule [9]

$$\begin{aligned} dA_i &= \sum_{0}^{3}{}_h \omega_{ih} A_h \\ dB_i &= \sum_{0}^{3}{}_h \tau_{ih} B_h \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Se le rette A_0A_i, B_0B_i $(i = 1, 2, 3)$ si corrispondono in una omografia K tangente a T in A_0, B_0, si ha

$$\tau_{0i} = \omega_{0i}. \tag{1}$$

Porremo $\omega_{0i} = \omega_i$.

Le direzioni caratteristiche relative alla coppia A_0, B_0 sono quelle relative alle ω_i che annullano la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \omega_i \\ \Omega_i \end{matrix} \right\| = 0$$

dove le Ω_i sono le forme, dipendenti da K,

$$\frac{1}{2}\Omega_i = \Sigma\, b^i_{rs}\omega_r\omega_s \text{ [10]}.$$

Valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \tau_{ii} - \omega_{ii} - \tau_{00} + \omega_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\omega_i} \\ \tau_{ri} - \omega_{ri} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\omega_r} \end{aligned} \tag{2}$$

ottenute per differenziazione esterna dalle (1).

Imponendo che le rette $\omega_1 = \omega_3 = 0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ siano quasi-ipercaratteristiche, scegliendo opportunamente l'omografia tan-

[9] Per i procedimenti seguiti si veda ad es.: E. Čech, *Géométrie projective différentielle des corrispondances entre deux espaces*, I, II, III, « Cas. pro Pest. Mat. a Fys. », 74, 75, pp. 32-48, 123-136, 137-157 (1950).

[10] Cfr. L. Muracchini, *Trasformazioni puntuali fra due spazi che posseggono un'unica congruenza di curve caratteristiche*, Rend. Sem. Mat. Un. e Polit., Torino, 12, (1952-53) pag. 165.

gente, le forme Ω_i si possono ridurre nella forma

$$\Omega_1 = -2\alpha\omega_1^2 + 2\beta\omega_1\omega_3 + 2\gamma\omega_3^2$$

$$\Omega_2 = -2\delta\omega_2^2 + 2\varepsilon\omega_2\omega_3 + 2\eta\omega_3^2$$

$$\Omega_3 = 0.$$

Se le rette $\omega_1 = \omega_3 = 0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$ non sono generatrici base doppie della rete dei coni cubici

$$\sum_{ij}(\omega_i\Omega_j - \omega_j\Omega_i)\mu_{ij} = 0$$

deve aversi $\alpha \neq 0$, $\delta \neq 0$.

Le (2) diventano quindi

$$
\begin{aligned}
\tau_{11} - \omega_{11} - \tau_{00} + \omega_{00} &= -2\alpha\omega_1 + \beta\omega_3 \\
\tau_{21} - \omega_{21} &= 0 \\
\tau_{31} - \omega_{31} &= \beta\omega_1 + 2\gamma\omega_3 \\
\tau_{12} - \omega_{12} &= 0 \\
\tau_{22} - \omega_{22} - \tau_{00} + \omega_{00} &= -2\delta\omega_2 + \varepsilon\omega_3 \\
\tau_{32} - \omega_{32} &= \varepsilon\omega_2 + 2\eta\omega_3 \\
\tau_{13} - \omega_{13} &= 0 \\
\tau_{23} - \omega_{23} &= 0 \\
\tau_{33} - \omega_{33} - \tau_{00} + \omega_{00} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

La derivazione esterna conduce tra l'altro alle seguenti relazioni

$$
\begin{aligned}
\alpha\omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_3 \\
\delta\omega_{23} &= h\omega_2 + k\omega_3 .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Discende che

$$d\omega_3 \wedge \omega_3 = 0.$$

Dunque:

I piani caratteristici $\omega_3 = 0$ in ciascuno dei due spazi inviluppano sempre sistemi di superficie caratteristiche.

La forma differenziale quadratica delle asintotiche di una superficie caratteristica, integrale di $\omega_3 = 0$, è ([11]) nello spazio di A

$$\varphi = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}$$

([11]) Si veda ad esempio: E. CARTAN, *Sur la déformation projéctive des surfaces*, Ann. Ec. Normale Sup., 3 (37) 1920.

cioè

$$\varphi = \frac{a}{\alpha}\,\omega_1^2 + \frac{h}{\delta}\,\omega_2^2 .$$

Le superficie $\omega_3 = 0$ sono quindi piani se e solo se

$$a = h = 0. \tag{5}$$

Vediamo subito che le (5) hanno luogo se e solo se il piano singolare π_1

$$\overset{3}{c}_{111}\omega_2 - \overset{2}{c}_{111}\omega_3 = 0$$

relativo alla retta quasi-ipercaratteristica $\omega_2 = \omega_3 = 0$ coincide col piano singolare π_2

$$\overset{3}{c}_{222}\omega_1 - \overset{1}{c}_{222}\omega_3 = 0$$

relativo alla retta quasi-ipercaratteristica $\omega_1 = \omega_3 = 0$.

Stabiliamo a questo scopo alcune formule che forniscono i coefficienti del 3° ordine degli sviluppi locali delle coordinate proiettive non omogenee del punto $\bar{A}$ $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ in funzione di quelle del punto A (x_1, x_2, x_3).

Siano

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 - \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_3 + \gamma x_2^3 + \Sigma\, c^1{}_{jkh} x_l x_k x_h + \dots \\ \bar{x}_2 &= x_2 - \delta x_2^2 + \varepsilon x_2 x_3 + \eta x_3^2 + \Sigma\, c^2{}_{jkh} x_j x_k x_k + \dots \\ \bar{x}_3 &= x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \Sigma\, c^3{}_{jkh} x_j x_k x_h + \dots \end{aligned} \tag{6}$$

gli sviluppi in questione.

Esprimendo che il punto A, di coordinate x_1, x_2, x_3 rispetto al riferimento mobile di S, è fisso in questo spazio si ottengono le relazioni ([12])

$$\begin{aligned} dx_1 &= -\omega_1 + (\omega_{00} - \omega_{11})x_1 - \omega_{21}x_2 - \omega_{31}x_3 + \\ &\quad + \omega_{10}x_1^2 + \omega_{20}x_1x_2 + \omega_{30}x_1x_3 \\ dx_2 &= -\omega_2 - \omega_{12}x_1 + (\omega_{00} - \omega_{22})x_2 - \omega_{32}x_3 + \\ &\quad + \omega_{10}x_1x_2 + \omega_{20}x_2^2 + \omega_{30}x_2x_3 \\ dx_3 &= -\omega_3 - \omega_{13}x_1 - \omega_{23}x_2 + (\omega_{00} - \omega_{33})x_3 + \\ &\quad + \omega_{10}x_1x_3 + \omega_{20}x_2x_3 + \omega_{30}x_3^2 . \end{aligned} \tag{7}$$

([12]) Cfr. E. Cartan, *La théorie des groups finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, Paris, Gauthier-Villars, 1937.

Analoghe relazioni si ottengono per il punto $\bar{A}$ di $\bar{S}$

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
d\bar{x}_1 &= -\tau_1 + (\tau_{00} - \tau_{11})\bar{x}_1 - \tau_{21}\bar{x}_2 - \tau_{31}\bar{x}_3 + \\
&\quad + \tau_{10}\bar{x}_1^2 + \tau_{20}\bar{x}_1\bar{x}_2 + \tau_{30}\bar{x}_1\bar{x}_3 \\
d\bar{x}_2 &= -\tau_2 - \tau_{12}\bar{x}_1 + (\tau_{00} - \tau_{22})\bar{x}_2 - \tau_{32}\bar{x}_3 + \\
&\quad + \tau_{10}\bar{x}^1\bar{x}_2 + \tau_{20}\bar{x}^2 + \tau_{30}\bar{x}_2\bar{x}_3 \\
d\bar{x}_3 &= -\tau_3 - \tau_{13}\bar{x}_1 - \tau_{23}\bar{x}_2 + (\tau_{00} - \tau_{33})\bar{x}_3 + \\
&\quad + \tau_{10}\bar{x}_1\bar{x}_3 + \tau_{20}\bar{x}_2\bar{x}_3 + \tau_{30}\bar{x}_3^2 .
\end{aligned}
$$

Differenziando la terza delle (6) si ha

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
d\bar{x}_3 &= (3\overset{3}{c}_{111}x_1^2 + 6\overset{3}{c}_{112}x_1x_2 + 6\overset{3}{c}_{113}x_1x_3 + 3\overset{3}{c}_{112}x_2^2 + \\
&\quad + 6\overset{3}{c}_{123}x_2x_3 + 3\overset{3}{c}_{133}x_3^2)dx_1 + (3\overset{3}{c}_{222}x_2^2 + 6\overset{3}{c}_{221}x_1x_2 + \\
&\quad + 6\overset{3}{c}_{223}x_2x_3 + 3\overset{3}{c}_{211}x_1^2 + 6\overset{3}{c}_{123}x_1x_3 + 3\overset{3}{c}_{233}x_3^2)dx_2 + \\
&\quad + (1 + 3\overset{3}{c}_{333}x_3^2 + 6\overset{3}{c}_{331}x_1x_3 + 6\overset{3}{c}_{332}x_2x_3 + 3\overset{3}{c}_{311}x_2^1 + \\
&\quad + 6\overset{3}{c}_{312}x_1x_2 + 3\overset{3}{c}_{322}x_2^2)dx_3 + \Sigma\,(d\overset{3}{c}_{jkh})x_jx_kx_h + \dots .
\end{aligned}
$$

Identificando il secondo membro di (9), ove siano state sostituite le (7), con il secondo membro della terza delle (8), ove si siano sostituite le (6), si ottengono, fra le altre, le seguenti relazioni

$$
\begin{aligned}
-3\overset{3}{c}_{111}\omega_1 - 3\overset{3}{c}_{211}\omega_2 - 3\overset{3}{c}_{311}\omega_3 &= \alpha\tau_{13} \\
-3\overset{3}{c}_{222}\omega_2 - 3\overset{3}{c}_{122}\omega_1 - 3\overset{3}{c}_{322}\omega_3 &= \delta\tau_{23}
\end{aligned}
$$

che, tenuto conto delle (3) e (4), possono scriversi

$$
\begin{aligned}
-3\overset{3}{c}_{111}\omega_1 - 3\overset{3}{c}_{211}\omega_2 - 3\overset{3}{c}_{311}\omega_3 &= a\omega_1 + b\omega_3 \\
-3\overset{3}{c}_{222}\omega_2 - 3\overset{3}{c}_{122}\omega_2 - 3\overset{3}{c}_{322}\omega_3 &= h\omega_2 + k\omega_3 .
\end{aligned}
$$

Si ha quindi $a = h = 0$ se e solo se $\overset{3}{c}_{111} = \overset{3}{c}_{222} = 0$, cioè se e solo se i piani π_1 e π_2 coincidono (col piano $\omega_3 = 0$).

Concludendo:

Sia T una trasformazione puntuale fra spazi proiettivi ordinari S, $\bar{S}$ che possiede in ogni coppia regolare di punti corrispondenti $(A, \bar{A})$ due rette distinte quasi-ipercaratteristiche, non generatrici base doppie della rete dei coni cubici che individua le rette carat-

teristiche. I piani di tali rette inviluppano una famiglia $\mathfrak{F}$ di superficie caratteristiche che sono piani se e solo se coincidono i piani singolari relativi alle due rette.

In particolare:

1°) *se una delle due rette considerate è ipercaratteristica in senso debole, la famiglia $\mathfrak{F}$ è una famiglia di piani se e solo se il piano singolare relativo della retta quasi-ipercaratteristica coincide col piano delle due rette;*

2°) *se le rette considerate sono entrambe ipercaratteristiche in senso debole, la famiglia $\mathfrak{F}$ è sempre una famiglia di piani.*

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 29 luglio 1967.