ENRICO GIUSTI

Funzioni coseno periodiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 478–485.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_478_0>

Funzioni coseno periodiche.

ENRICO GIUSTI (Pisa) (*)

Sommario. - *Si studiano funzioni "coseno" periodiche in spazi di Banach.*

0. - Introduzione.

Sia X uno spazio di BANACH con norma $\|\cdot\|$. Una funzione coseno C [2] [4] [5] è un'applicazione della retta reale $\mathbb{R}$ in $\mathcal{L}(X, X)$ (1), continua nella topologia forte, e verificante le relazioni:

$$C(t+s) + C(t-s) = 2\,C(t)C(s) \qquad \forall\, t,\ s \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$C(0) = I. \tag{2}$$

Il generatore di una funzione coseno C è l'operatore lineare chiuso

$$A = C''(0)$$

con dominio:

$$D_A = \{x \in X:\ C(t)x \in C^2(\mathbb{R};\ X)\,(^2)\}.$$

È noto [6] [1] che affinchè un operatore chiuso A con dominio D_A denso in X generi una funzione coseno è necessario e sufficiente che la funzione

$$F(\lambda) = \lambda R(\lambda^2,\ A) \tag{3}$$

verifichi le relazioni:

$$\|F^{(k)}(\lambda)\| \leq \frac{M\ k!}{(Re\lambda - \omega)^{k+1}} \qquad \forall\lambda:\ Re\lambda > \omega \tag{4}$$

dove M ed ω sono costanti non negative ($k = 0, 1, \ldots$).

In questa nota si ricercheranno le ulteriori condizioni da imporre all'operatore A affinchè la funzione coseno da esso generata risulti periodica (di periodo 2π).

Nel § 1 si dimostrerà il seguente teorema:

TEOREMA [1.1]. - *Sia A un operatore lineare chiuso, generatore di una funzione coseno C in uno spazio di Banach X. Condizione*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R.

(1) $\mathcal{L}(X, X)$ è algebra degli operatori lineari continui di X in X.

(2) $C^k(\mathbb{R};\ X)$ è lo spazio delle funzioni definite in $\mathbb{R}$ a valori in X, k volte differenziabili con continuità nella topologia di X.

necessaria e sufficiente affinchè sia $C(t) = C(2\pi + t)$ *è che la funzione*:

(5) $$Q(\lambda) = (1 - e^{-2\pi\lambda})\, F(\lambda)$$

risulti analitica intera.

Nel § 2 si esaminerà la convergenza della "serie di FOURIER" di C.

1. - Dimostrazione del teorema [1.1]

La necessità segue dalla seguente relazione, valida per $\lambda \neq ik$ (k intero):

(6) $$F(\lambda) = (1 - e^{-2\pi\lambda})^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda t} C(t) dt.$$

La (6) è conseguenza immediata della periodicità di C se $Re\lambda > 0$; in generale si può verificarla direttamente ricordando le (1), (3) ed osservando che per $x \in D_A$:

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{C(t)x - x}{2t^2}.$$

Per provare la sufficienza stabiliamo dapprima il seguente lemma:

LEMMA [1.2] - *Sia A generatore di una funzione coseno e tale che $Q(\lambda)$ definita in* (5) *sia analitica intera. Allora il risolvente $R(\lambda, A) = F(\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda}$* (3) *è una funzione analitica nell'intero piano λ eccetto al più i punti $\lambda = -k^2$ (k intero) nei quali ha un polo del primo ordine.*

DIMOSTRAZIONE. - Ovviamente $R(\lambda, A)$ è analitica per λ non reale negativo. Se $\lambda \to -s^2$ ($s > 0$ non intero) con parte immaginaria positiva (risp. negativa) $\sqrt{\lambda}$ tende ad is (risp. $-is$). In ogni caso

(7) $$R(\lambda, A) = F(\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda} \to \frac{F(is)}{is} = \frac{F(-is)}{-is}$$

dato che $F(\lambda) = -F(-\lambda)$.

Che nei punti $\lambda = -k^2$ (k intero) il risolvente abbia poli del prim'ordine segue immediatamente dalla (5). I residui in tali punti sono gli operatori:

(8) $$\begin{cases} P_k = \dfrac{Q(ik)}{\pi} & k > 0 \\[2ex] P_0 = \dfrac{Q(0)}{2\pi} & \end{cases}$$

c.v.d.

(3) Si sceglie per $\sqrt{\lambda}$ la determinazione per cui $Re\lambda \geq 0 \to Re\sqrt{\lambda} \geq 0$

Possiamo dimostrare ora la seconda parte del teorema. Sia $G(s)$ il semigruppo analitico generato da A (vedi [1]). Basterà provare che $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall s > 0$ e $\forall x \in X$ si ha:

$$C(2\pi + t)G(s)x = C(t)G(s)x. \tag{9}$$

D'altra parte [1]:

$$C(t)G(s)x = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \cos(\sqrt{-\lambda t})\, e^{\lambda s} R(\lambda, A)\, d\lambda \quad (^4) \tag{10}$$

dove $\Gamma = \Gamma_+ \bigcup \Gamma_-$, essendo

$$\Gamma_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \varepsilon + \tau e^{\pm i\varphi};\ 0 \leq \tau < +\infty\}$$

con $\varepsilon > 0$, $\pi/2 < \varphi < \pi$; ed il senso di percorrenza di Γ è tale da lasciare a sinistra l'origine.

La (9) segue allora, per il teorema dei residui, dalla (10), in virtù del lemma [1.2] e dell'assoluta convergenza dell'integrale a secondo membro di (10).

2. - Sviluppi in serie di Fourier.

PROPOSIZIONE [2.1] - *Gli operatori P_k definiti dalle* (8) *hanno le seguenti proprietà:*

$$P_k P_h = \delta_{hk} P_k \tag{11}$$

(12) Posto $V_k = P_k(X)$ si ha $V_k = \{x \in D_A : Ax = -k^2 x\}$

DIMOSTRAZIONE. - Siano C_k e C_h due cerchi di centri $-k^2$, $-h^2$ e raggi ρ_k e ρ_h rispettivamente ($\rho_k < \rho_h < 1$).

Si ha:

$$\begin{aligned} P_k P_h &= (2\pi i)^{-2} \int_{C_k} R(\lambda, A)\, d\lambda \int_{C_h} R(\mu, A) d\mu = \\ &= (2\pi i)^{-2} \int_{C_k} d\lambda \int_{C_h} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\mu - \lambda}\, d\mu = \\ &= (2\pi i)^{-2} \left[\int_{C_\lambda} R(\lambda, A) d\lambda \int_{C_h} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} + \int_{C_h} R(\mu, A) d\mu \int_{C_k} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \right] = \\ &\delta_{hk} (2\pi i)^{-1} \int_{C_k} R(\lambda, A) d\lambda = \delta_{hk} P_k . \end{aligned}$$

(4) $\operatorname{Cos}(\sqrt{-\lambda t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{2n}}{(2n)!}$.

Veniamo ora alla (12). Se $x \in X$, allora

$$P_k x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_k} R(\lambda,\ A) x d\lambda$$

per cui $P_k x \in D_A$; inoltre

$$A P_k x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_k} (\lambda R(\lambda,\ A) x - x) d\lambda = -k^2 P_k x .$$

Viceversa se $x \in D_A$ ed $Ax = -k^2 x$, allora $R(\lambda, A)x = (\lambda + k^2)^{-1} x$, per cui:

$$P_k x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_k} (\lambda + k^2)^{-1} x d\lambda = x$$

c.v.d.

È evidente che se $x \in V_k$ ed $f(\lambda)$ è una funzione analitica in un intorno di $-k^2$, allora

$$f(A)x = f(-k^2)x.$$

In particolare $x \in V_k$:

$$C(t)x = \cos(kt)x\cdot$$

Teorema [2.2] - *Se $x \in D_A$ allora*

(13) $$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(kt) P_k x = C(t)x$$

uniformemente in t.

Dimostrazione. - La serie a primo membro converge uniformemente. Infatti, essendo $\| P_k \| \leq M$, si ha:

$$\| \sum_{k=n}^{N} \cos(kt) P_k x \| \leq M \| Ax \| \sum_{k=n}^{N} k^{-2}.$$

Sia $C_0(t)x$ la somma della serie a primo membro; la funzione $C_0(t)x - C(t)x$ è tale che

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} [C_0(t) - C(t)] x dt = 0 \ \forall k \ \text{ intero}$$

e quindi $C_0(t)x = C(t)x$.

c.v.d.

La questione della convergenza della serie a primo membro di (13) resta in generale aperta; nel caso però in cui X sia uno spazio di HILBERT si può dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA [2.3] – *Sia $C(t)$ una funzione coseno periodica di periodo 2π in uno spazio di Hilbert H. Posto:*

$$(14)\qquad P_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, C(t)dt & k \neq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} C(t)dt & k = 0 \end{cases}$$

allora per ogni $x \in H$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(kt) P_k x = C(t)x$$

uniformemente in t.

La dimostrazione seguirà da due lemmi:

LEMMA 2.4 – *Siano (x, y) il prodotto scalare ed $\|x\|$ la norma in H. Il nuovo prodotto scalare*

$$(15)\qquad ((x, y)) = \int_0^{2\pi} (C(t)x, C(t)y)dt$$

induce in H una norma $|||x|||$ equivalente alla norma $\|x\|$.

DIMOSTRAZIONE. – *i)* $((x, y))$ è un prodotto scalare. L'unica proprietà forse non evidente è la disuguaglianza di SCHWARTZ. Si ha:

$$|((x, y))| \leq \int_0^{2\pi} |(C(t)x, C(t)y)| dt \leq \int_0^{2\pi} \| C(t)x\| \; \| C(t)y \| dt \leq$$

$$\leq \left\{ \int_0^{2\pi} \| C(t)x\|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^{2\pi} \| C(t)y\|^2 dt \right\}^{1/2} = |||x||| \; |||y|||$$

ii) Bisogna dimostraziore ora che esistono due costanti positive ν e μ tali che:

$$(16)\qquad \nu \|x\| \leq |||x||| \leq \mu \|x\| \qquad \forall x \in H.$$

La seconda di queste disuguaglianze è ovvia, dato che $\| C(t)\| \leq M$. Per $x \in H$ e $0 < \varepsilon < 1$ poniamo:

$$K_\varepsilon = \{ t \in [0, 2\pi] : \| C(t)x \| < \varepsilon \|x\| \}.$$

Dalla (1) con $s = t = u/2$ si ha:

$$x + C(u)x = 2C^2(u/2)x$$

da cui, se $u \in K_\varepsilon$:

$$2M \| C(u/2)x \| \geq 2 \| C^2(u/2)x \| \geq (1 - \varepsilon) \| x \| .$$

Sia ora $\varepsilon < 1/(2M + 1)$; allora

$$\| C(u/2)x \| > \varepsilon \| x \| \qquad \forall u \in K_\varepsilon$$

ed analogamente

$$\| C(2\pi - u/2)x \| = \| C(u/2)x \| > \varepsilon \| x \| \qquad \forall u \in K_\varepsilon .$$

Da quanto detto segue che per $\varepsilon < (2M + 1)^{-1}$ i tre insiemi K_ε.

$$J_\varepsilon = \{ t \in [0, \pi] : 2t \in K_\varepsilon \}$$

$$J'_\varepsilon = \{ t \in [\pi, 2\pi] : 2\pi - t \in J_\varepsilon \}$$

sono a due a due disgiunti, misurabili (poichè tale è K_ε), ed inoltre:

$$\text{mis} (J_\varepsilon \cup J'_\varepsilon) = \text{mis } K_\varepsilon \leq \pi. \tag{17}$$

Dalla (17) segue la prima diseguaglianza (16); infatti

$$\int_0^{2\pi} \| C(t)x \|^2 dt = 2 \| x \|^2 \int_0^\infty \varepsilon \text{ mis} \left\{ t \in [0, 2\pi] : \| C(t)x \| \geq \varepsilon \| x \| \right\} d\varepsilon \geq$$

$$\geq 2 \| x \|^2 \pi \int_0^{1/(2M+1)} \varepsilon d\varepsilon = \frac{\pi}{(2M + 1)^2} \| x \|^2$$

c.v.d.

LEMMA [2.5] - *Siano P_k gli operatori* (14). *Si ha* $\forall x, y \in H$:

$$((P_k x, y)) = ((x, P_k y)) \tag{18}$$

DIMOSTRAZIONE. - Possiamo limitarci a considerare gli operatori $R_k = \pi P_k (k \neq 0)$ ed $R_0 = 2\pi P_0$. Si ha:

$$((x, R_k y)) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} (C(s)x, C(t)C(s)y) ds dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} (C(s)x, C(t + s)y) ds dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} (C(s)x, C(t - s)y) ds dt.$$

Con un cambiamento di variabili $v = t$, $u = s + t$ nel primo integrale, e $v = t$, $u = s - t$ nel secondo, si ha:

$$19) \qquad ((x, R_k y)) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} du \int_0^u e^{ikv} (C(u-v)x, C(u)y) dv + \right.$$

$$+ \int_{2\pi}^{4\pi} du \int_{u-2\pi}^{2\pi} e^{ikv}(C(u-v)x, C(u)y)dv + \int_{-2\pi}^{0} du \int_{-u}^{2\pi} e^{ikv}(C(u+v)x, C(u)y)dv +$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi - u} e^{ikv}(C(u+v)x, C(u)y)dv \right\}.$$

D' altra parte:

$$(20) \qquad \int_{2\pi}^{4\pi} du \int_{u-2\pi}^{2\pi} e^{ikv}(C(u-v)x, C(u)y)dv = \int_0^{2\pi} du \int_{2\pi-u}^{2\pi} e^{ikv}(C(u+v)x, C(u)y)dv$$

$$(21) \qquad \int_{-2\pi}^{0} du \int_{-u}^{2\pi} e^{ikv}(C(u+v)x, C(u)y)dv = \int_0^{2\pi} du \int_u^{2\pi} e^{ikv}(C(u-v)x, C(u)y)dv$$

dove si è tenuto conto della periodicità di $C(t)$ e del fatto che $C(t)$ è una funzione pari. Introducendo nella (19) le (20), (21) si ottiene:

$$((x, R_k y)) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikv}(C(u)C(v)x, C(u)y)du dv$$

da cui segue la (18) cambiando v in $-v$ e tenendo ancora conto delle proprietà di $C(t)$.

c.v.d.

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema [2.3]. Si suppone H munito del prodotto scalare $((x, y))$. Sia N un intero positivo.

Il proiettore $\sum_{k=0}^{N} P_k$ è autoaggiunto, è quindi $|||\sum_{k=0}^{N} P_k||| = 1$. D' altra parte i proiettori P_k sono ortogonali; quindi $\forall x \in H$:

$$|||\sum_{k=0}^{N} P_k x|||^2 = \sum_{k=0}^{N} |||P_k x|||^2 \leq |||x|||^2.$$

Allora qualunque sia t:

$$|||\sum_{k=0}^{N} \cos(kt) P_k x|||^2 \leq \sum_{k=0}^{N} |||P_k x|||^2 \leq |||x|||^2$$

da cui, per ogni N:

$$|||\sum_{k=0}^{N} \cos(kt) P_k ||| \leq 1 \tag{22}$$

Dalla (22) e dal teorema 2.2 segue allora la tesi. Infatti sia $x \in H$; $\forall \varepsilon > 0$ esiste $y \in D_A$ tale che $||x - y|| < \varepsilon$; in corrispondenza di tale y esiste un N tale che $\forall t \in \mathbb{R}$

$$||\sum_{k=0}^{N} \cos(kt) P_k y - C(t) y|| < \varepsilon.$$

Ma allora

$$||\sum_{k=0}^{N} \cos(kt) P_k x - C(t)x|| \leq ||\sum_{k=0}^{N} \cos(kt) P_k (x - y)|| +$$

$$+ ||\sum_{k=0}^{N} \cos(kt) P_k y - C(t) y|| + || C(t)(x - y) || \leq$$

$$\leq \frac{2M + 1}{\sqrt{\pi}} M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon \leq (2M + 3) M\varepsilon .$$

c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Da Prato - E. Giusti, *Una caratterizzazione dei generatori di funzioni coseno astratte*, Boll. U.M.I. Vol. XXII (1967).

[2] H. C. Fattorini, *The Cauchy problem for differential equations of any order in linear topological snaces*, preprint.

[3] E. Hille - R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. **31** (1957).

[4] S. Kurepa, *A cosine functional equation in Banach algebras*, Acta Sc. Math. (Szeyed) **23** (1962).

[5] S. Kurepa, *A cosine functional equation in Hilbert spaces*, Com. J. Math. **12** (1960).

[6] M. Sova, *Cosine operator functions*, Rozprawy Matematyczne XLIX (1966).

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U.M.I.
il 9 agosto 1967.