
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIORGIO TALENTI

Problemi di derivata obliqua per equazioni ellittiche in due variabili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 22
(1967), n.4, p. 505-526.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_505_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Problemi di derivata obliqua per equazioni ellittiche in due variabili.

GIORGIO TALENTI (Genova) (*)

Sunto. - *Si dimostrano dei risultati relativi al problema della derivata obliqua per equazioni ellittiche in due variabili a coefficienti misurabili.*

Il problema della derivata obliqua consiste, come è noto, nel ricercare le soluzioni u di una equazione ellittica del secondo ordine, definite in un aperto Ω , che verificano una condizione al contorno del tipo seguente: $\frac{\partial u}{\partial l}$, derivata di u secondo una direzione l assegnata (variabile da punto a punto), assume sulla frontiera di Ω valori prescritti. Se l è normale alla frontiera $\partial\Omega$ di Ω , tale problema è quello di Neumann. Per le equazioni in due variabili il problema della derivata obliqua si connette anche con il problema di Dirichlet e con i problemi misti: infatti se l è tangente a $\partial\Omega$, il problema enunciato sopra equivale ad un problema di DIRICHLET, cioè a quello di ricercare una soluzione u definita in Ω , essendo noti a meno di una costante i valori di u sopra $\partial\Omega$; se l è tangente a $\partial\Omega$ in una parte connessa Σ_1 di $\partial\Omega$, e normale a $\partial\Omega$ nella restante parte $\Sigma_2 = \partial\Omega - \Sigma_1$, il problema equivale ad un problema misto, cioè consiste nel cercare la soluzione u in Ω , conoscendo (a meno di una costante) i valori di u sopra Σ_1 e i valori della derivata normale sopra Σ_2 .

Il problema della derivata obliqua per l'equazione di LAPLACE in due variabili è stato esaurientemente studiato da LIENARD [7] - [8], MUSKHELISHVILI [12], MIKHIL [10] (cfr. anche ROSATI [13]); VEKUA [16] ha esteso i risultati di Muskhelishvili ad equazioni in due variabili a coefficienti derivabili in senso generalizzato; analogamente FICHERA [4] per equazioni a coefficienti di classe C^1 . In base ai risultati di questi autori, si può così descrivere la natura del problema della derivata obliqua. Il problema non è sempre compatibile, cioè non sempre una soluzione esiste comunque si

(*) Questo lavoro fa parte dell'attività del gruppo N. 23 del C.N.R., a.a. 1966/67.

assegnino il dato al contorno g e il secondo membro f dell'equazione: perchè una soluzione esista è necessario che g ed f verificino un certo numero (eventualmente nullo) di condizioni di compatibilità; verificate queste condizioni di compatibilità, la soluzione è determinata a meno di un certo numero di autosoluzioni del problema omogeneo; il numero delle condizioni di compatibilità e delle autosoluzioni del problema omogeneo è determinato dall'andamento dell'asse obliquo l (1).

Il problema della derivata obliqua per equazioni ellittiche in più variabili o per equazioni non lineari è stato studiato nel caso regolare, cioè nel caso che l'angolo fra l'asse obliquo l e la normale a $\partial\Omega$ si mantenga $< \frac{\pi}{2}$; cfr. [2], [5], [6], [9], [11]. Recentemente EGOROV e KONDRAT'EV [3] hanno annunciato una ricerca sul problema della derivata obliqua non regolare per equazioni in più variabili.

Nel presente lavoro si studia il problema della derivata obliqua per equazioni ellittiche in due variabili, a coefficienti misurabili. Si considera un'equazione della forma:

$$(1) \quad a_{11}r + 2a_{12}s + a_{22}t = f$$

(notazioni di MONGE: $p = u_x$, $q = u_y$, $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$), con a_{11} , a_{12} , a_{22} funzioni misurabili di $z = x + iy$ e f a quadrato sommabile in un aperto limitato Ω ; si fa l'ipotesi di ellitticità:

$$(2) \quad 0 < \lambda_1 \leq a_{11}(z) \cos^2 \xi + 2a_{12}(z) \cos \xi \sin \xi + a_{22}(z) \sin^2 \xi \leq \lambda_2,$$

con λ_1 , λ_2 costanti. Le soluzioni dell'equazione (1) che consideriamo in questo lavoro sono di classe $W^{2,2}(\Omega)$. Come è noto, $W^{2,2}(\Omega)$ è la classe delle funzioni di quadrato sommabile in Ω , con derivate prime e seconde (nel senso delle distribuzioni) di quadrato sommabile in Ω ; la norma in $W^{2,2}(\Omega)$ è data da

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} (u^2 + p^2 + q^2 + r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy.$$

(4) Ad esempio, se si considera il problema di NEUMANN per l'equazione di LAPLACE $\Delta u = f$ con dato al contorno $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ (n = normale esterna a $\partial\Omega$), la condizione di compatibilità è una sola:

$$\int_{\Omega} f = \oint_{\partial\Omega} g;$$

la soluzione è determinata a meno di una arbitraria costante additiva.

Supponiamo che la frontiera Ω sia una curva chiusa di classe C^2 (indicheremo con $z = z(\varphi)$ l'equazione di $\partial\Omega$, φ è l'ascissa curvilinea). La condizione al contorno è:

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial l}(z(\varphi)) = g(\varphi) + \text{costante},$$

con g funzione di classe C^1 ; supponiamo che il versore l di direzione di φ di classe C^1 . La costante non è assegnata e serve per «assorbire» una condizione di compatibilità.

Per soluzioni di classe $W^{2,2}(\Omega)$ la condizione (3) deve essere precisata. Interpretiamo (3) nel senso seguente: la funzione $u \in W^{2,2}(\Omega)$ verifica (3) se esiste una successione di funzioni $u_n \in C^2(\Omega)$ tali che:

$$\frac{\partial u_n}{\partial l}(z(\varphi)) = g(\varphi) + \text{costante}, \quad \|u - u_n\|_{W^{2,2}(\Omega)} \rightarrow 0$$

(la costante potendo dipendere da n). Osserviamo che se $u \in W^{2,2}(\Omega)$ verifica la condizione (3) nel senso sopra dichiarato, allora la traccia di $\frac{\partial u}{\partial l}$ sopra $\partial\Omega$ differisce da g per una costante: ricordiamo infatti che, per i teoremi d'immersione di Sobolev, le derivate prime $p = u_x$ e $q = u_y$ di una funzione $u \in W^{2,2}(\Omega)$ hanno traccia sopra $\partial\Omega$ di potenza m -esima sommabile (qualunque sia $m \geq 1$), e vale la maggiorazione:

$$\left(\oint_{\partial\Omega} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} d\varphi \right)^2 \leq (\text{costante}) \iint_{\Omega} (p^2 + q^2 + r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy$$

con una costante indipendente da u ; se u_n tende a u in $W^{2,2}(\Omega)$, $\frac{\partial u_n}{\partial l}(z(\varphi)) = g(\varphi) + c_n$ tende (in media di ordine m) alla traccia di $\frac{\partial u}{\partial l}$.

I risultati di questo lavoro sussistono nelle ipotesi:

$$(4) \quad \frac{d\varpi}{d\varphi} + \kappa \geq 0$$

oppure

$$(5) \quad \frac{d\varpi}{d\varphi} + \kappa > 0$$

dove ϖ è l'angolo fra l e la normale esterna a $\partial\Omega$, κ è la curvatura di $\partial\Omega$. L'ipotesi (5) significa che il versore l ruota in verso antiorario rispetto ad un asse fisso, per es. rispetto all'asse x ;

(4) significa la stessa cosa, non escludendo però che l abbia direzione costante; ad esempio, (5) vale se si considera il problema di NEUMANN in un insieme strettamente convesso (per il problema di NEUMANN è $\varkappa = 0$), (4) vale ad esempio se l è costante, cioè se la condizione al contorno (3) è del tipo:

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(z(\varphi)) = g(\varphi) + \text{costante.}$$

Se l'ipotesi (4) non sussiste, la tecnica che adoperiamo non consente di maggiorare a priori le derivate seconde delle soluzioni di (1)-(3) in funzione dei soli dati del problema. Questo è in accordo con il fatto che, se (4) non vale, il problema omogeneo corrispondente a (1)-(3) (cioè quello con $f = g = 0$) può avere delle autosoluzioni che non sono nè costanti nè lineari; ricordiamo (cfr. il n° 1) che la condizione:

$$\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{d\varkappa}{d\varphi} + \varkappa \right) d\varphi \geq 0$$

è necessaria e sufficiente affinché *tutte* le autosoluzioni del problema:

$$\Delta u \equiv r + t = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial l}(z(\varphi)) = 0$$

siano polinomi di primo grado.

Si stabiliscono delle limitazioni a priori per le soluzioni del problema (1)-(3) (teorema 1). Queste limitazioni si ricavano dalla diseuguaglianza di Bernstein (cfr. [14], LEMMA 1) e da una formula di integrazione per l'hessiano (cfr. il Lemma del n° 3) (*).

(*) L'impiego della diseuguaglianza di Bernstein e di formule di integrazione per l'hessiano è la tecnica standard per lo studio delle equazioni ellittiche in due variabili a coefficienti misurabili (cfr. [14] e la bibliografia ivi raccolta); per una esposizione di questa tecnica cfr. anche Ladyzhenskaya-Uraltzeva [15], pp. 257-273. Queste autrici fanno un'osservazione sul problema della derivata obliqua che, nel caso qui in esame, si può così enunciare: per ogni soluzione u di classe $W^{2,2}(\Omega)$ di (1)-(3) vale la limitazione:

$$\iint_{\Omega} (p^2 + q^2 + r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \leq (\text{costante}) \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{dg}{d\varphi} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)^2$$

con una costante indipendente da u . Per stabilire questa diseuguaglianza (ferme restando le ipotesi dichiarate sulla regolarità di Ω , dell'asse obliquo

Si deduce immediatamente dalle limitazioni a priori il seguente teorema di unicità: due soluzioni di classe $W^{2,2}(\Omega)$ del problema (1)-(3)-(4) differiscono per una funzione lineare; se in più $\frac{d\bar{z}}{d\varphi} + z \neq 0$ (in particolare se si ha (5)), si dimostra che la differenza di due soluzioni (1)-(3)-(4) è costante. Osserviamo che questo teorema si applica in particolare al problema (1)-(6).

Dalle limitazioni a priori stabilite nel teor. 1 potrebbero dedursi dei teoremi di esistenza. In questo lavoro dimostriamo (teorema 3) l'esistenza di soluzioni di classe $W^{2,2}(\Omega)$ del problema (1)-(3)-(5) in un caso semplice: quello in cui l'incremento di \bar{z} (angolo fra l e la normale $\partial\Omega$), prodotto da un giro completo della frontiera di $\partial\Omega$, è nullo. Questa ipotesi assicura (come per l'equazione di LAPLACE) che è sufficiente una condizione di compatibilità per il dato al contorno e per il secondo membro dell'equazione. In particolare, se Ω è strettamente convesso, si deduce dal Teor. 3 un teorema di esistenza per il problema di NEUMANN, che estende in parte quello di BERS-NIREMBERG [1] ⁽³⁾.

1. - Notazioni, ipotesi, richiami di risultati noti.

i) a_{11}, a_{12}, a_{22} sono funzioni misurabili di $z = x + iy$; supponiamo che per ogni z e per ogni ξ reale:

$$(10) \quad 0 < \text{costante} = \lambda_1 \leq a_{11}(z) \cos^2 \xi + 2a_{12}(z) \cos \xi \sin \xi + a_{22}(z) \sin^2 \xi \leq \lambda_2 = \text{costante} < +\infty.$$

L è l'operatore così definito:

$$(11) \quad L = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

ii) Ω è un aperto limitato del piano z ; supponiamo che $\partial\Omega$ (frontiera di Ω) sia una curva di classe C^2 . $[0, \lambda] \ni \varphi \rightarrow z(\varphi) = x(\varphi) + iy(\varphi)$ è la rappresentazione parametrica di $\partial\Omega$, con φ ascissa curvilinea

l e di g) non è necessaria alcuna restrizione sull'andamento di l . Nel teorema 1 del presente lavoro si dimostra che, se vale (5), il termine $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ a secondo membro della disuguaglianza si può sopprimere. Ringrazio il prof. G. CIMMINO, che mi ha segnalato il libro di LADYZHENSKAYA-URALTZEVA e mi ha aiutato a consultarlo.

⁽³⁾ Nel lavoro di BERS-NIREMBERG Ω è un cerchio, l'equazione contiene le derivate prime e il termine non derivato, il secondo membro f è funzione limitata.

e $\lambda =$ lunghezza di $\partial\Omega$; φ è orientata in modo che il verso dello spostamento di $z(\varphi)$ al crescere di φ sia quello positivo (cioè antiorario).

Per definizione di φ , $|\dot{z}(\varphi)| = 1$, $\dot{z}(\varphi)$ è il versore della tangente a $\partial\Omega$, $-i\dot{z}(\varphi)$ è il versore della normale esterna a $\partial\Omega$ ($\dot{z} = dz/d\varphi$).

Indichiamo con ψ una funzione di φ classe $C^1([0, \lambda])$ tale che $\psi(\varphi)$ coincida per ogni φ con una determinazione di $\frac{1}{i} \log \dot{z}(\varphi)$; poniamo cioè:

$$(12) \quad \dot{z}(\varphi) = e^{i\psi}, \quad -i\dot{z}(\varphi) = e^{i\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Con questa notazione, la curvatura di $\partial\Omega$:

$$(13) \quad \kappa = \ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} \quad (\kappa^2 = |\ddot{z}|^2)$$

si può esprimere così:

$$(14) \quad \kappa = \frac{d\psi}{d\varphi}.$$

iii) l è un versore definito in ogni punto $z(\varphi)$ di $\partial\Omega$, che rappresentiamo così:

$$(15) \quad l = -i\dot{z}(\varphi)e^{i\vartheta}.$$

Osserviamo che: $\vartheta =$ multiplo di $2\pi +$ l'angolo (misurato in senso antiorario) fra la normale esterna $-i\dot{z}(\varphi)$ e il versore l (cioè l'angolo di cui la normale esterna deve ruotare in senso antiorario per sovrapporsi a l); supponiamo che ϑ sia funzione di φ di classe $C^1([0, \lambda])$ e che $\vartheta(\lambda) \equiv \vartheta(0) \pmod{2\pi}$, cioè $\vartheta(\lambda) - \vartheta(0)$ è un multiplo intero (positivo o negativo) di 2π .

Si ha: $l = e^{i\left(\vartheta + \psi - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\omega}$, con $\omega = \vartheta + \psi - \frac{\pi}{2}$, ψ definito da (12) (*).

(*) Con queste notazioni risulta:

$$\frac{\partial}{\partial l} = \cos \omega \frac{\partial}{\partial x} + \sin \omega \frac{\partial}{\partial y} = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial(-i\dot{z})} + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \dot{z}},$$

dove:

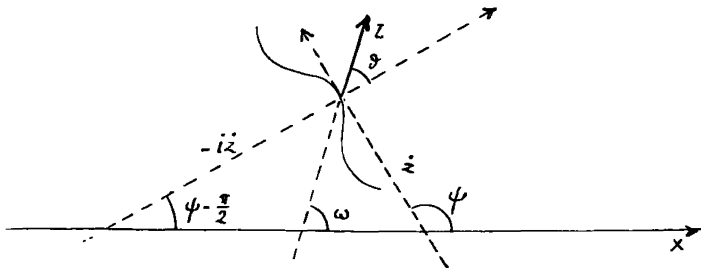
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} = \text{derivata tangente} \\ \frac{\partial}{\partial(-i\dot{z})} &= \dot{y} \frac{\partial}{\partial x} - \dot{x} \frac{\partial}{\partial y} = \text{derivata normale} \end{aligned}$$

Poniamo:

$$(16) \quad h = \frac{\Im(\lambda) - \Im(0)}{2\pi}, \quad k = \frac{\omega(\lambda) - \omega(0)}{2\pi};$$

h (rispettivamente k) è il numero di giri che il versore l compie attorno alla normale (rispettivamente attorno alla direzione dell'asse x) mentre il punto d'applicazione $z(\varphi)$ compie un giro completo in senso antiorario di $\partial\Omega$: ciascuno di questi giri è contato positivamente oppure negativamente a seconda che il verso della rotazione di l è antiorario oppure orario, cioè concorde oppure discorde con il verso dello spostamento di $z(\varphi)$. Osserviamo che $k = h + 1$; questa equazione segue da (14), che implica:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\Im}{d\varphi} + \kappa, \quad \int_0^\lambda \kappa d\varphi = 2\pi.$$



iv) Richiamiamo alcuni noti risultati sul problema della derivata obliqua per l'equazione di LAPLACE⁽⁵⁾. Consideriamo il problema:

$$(18) \quad u_{xx}(z) + u_{yy}(z) = 0 (z \in \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial l}(z(\varphi)) = g(\varphi) (0 \leq \varphi \leq \lambda, l = e^{i\omega}),$$

con g funzione hölderiana assegnata (per ottenere l'esistenza di soluzioni del problema (18), le ipotesi di regolarità sopra dichiarate per Ω e l sono sovrabbondanti: è sufficiente supporre che l e la tangente a $\partial\Omega$ siano hölderiane).

Il problema (18) è equivalente ad un problema di RIEMANN-HILBERT con indice uguale a $-2k = -2h - 2$ (h e k sono definiti

⁽⁵⁾ Per il contenuto di (iv) cfr. N. I. MUSKHELISHVILI [12], pp. 99-109 222-223.

da (16)). Il problema di RIEMANN-HILBERT consiste nel determinare una funzione $\Psi(z)$, analitica in un dato aperto, che verifica sulla frontiera dell'aperto una condizione del tipo: $\operatorname{Re} \alpha(z)\Psi(z) = \beta(z)$, con $\alpha(z)$ e $\beta(z)$ funzioni assegnate; l'indice di questo problema è l'incremento di $\frac{1}{\pi} \arg \overline{\alpha(z)}$ prodotto da un giro di z in senso antiorario sulla frontiera dell'aperto.

(18) è equivalente al seguente problema: trovare $\Psi(z)$, funzione di $z = x + iy$ analitica di Ω , tale che $\operatorname{Re} e^{i\omega}\Psi(z(\varphi)) = g(\varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq \lambda$) Infatti, se $u(z)$ è soluzione di (18), il gradiente complesso $\Psi(z) = u_x - iu_y$ di u (cioè la derivata della funzione analitica di $z = x + iy$ che ha $u(z)$ per parte reale) è funzione analitica in Ω tale che: $\operatorname{Re} e^{i\omega}\Psi(z(\varphi)) = \cos \omega u_x(z(\varphi)) + \operatorname{sen} \omega u_y(z(\varphi)) = \frac{\partial u}{\partial l} = g$; inversamente, se $\Psi(z)$ è analitica in Ω e verifica la condizione $\operatorname{Re} e^{i\omega}\Psi(z(\varphi)) = g(\varphi)$, allora $u(z) = \operatorname{Re} \int^z \Psi(z) dz$ è soluzione di (18). L'indice di questo problema è evidentemente uguale a

$$\frac{-\omega(\lambda) + \omega(0)}{\pi} = -2k = -2h - 2.$$

Teoremi noti sul problema di RIEMANN-HILBERT forniscono, a causa della connessione sopra discussa, il seguente teorema: Se $h \leq -1$, esiste una soluzione di (18), comunque si assegni g ; la soluzione generale di (18) contiene $-2h$ costanti arbitrarie. Se $h \geq 0$, esiste una soluzione di (18) se e solo se g verifica $2h + 1$ condizioni di compatibilità (cioè se g è ortogonale a $2h + 1$ funzioni opportune); verificate tali condizioni di compatibilità, la soluzione di (18) è determinata a meno di un'arbitraria costante additiva.

Le soluzioni di cui si parla nel precedente teorema sono, per definizione, soluzioni di classe $C^2(\Omega)$ con derivate prime continue nella chiusura di Ω . Se μ ($0 < \mu < 1$) è l'esponente di Hölder di g , tali soluzioni risultano di classe $C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$, cioè hanno derivate prime μ -hölderiane nella chiusura di Ω ; si può inoltre dimostrare che, se g ha derivata prima μ -hölderiana, le soluzioni sono di classe $C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$ ⁽⁶⁾.

(6) Cfr. [16], pp. 330-331. La regolarità delle soluzioni di (18) segue facilmente dalla rappresentazione delle soluzioni del problema di RIEMANN-HILBERT e dalle proprietà di regolarità degli integrali del tipo di Cauchy; cfr. [12], pp. 45-55.

2. - Enunciato dei risultati

TEOREMA 1. - Se:

$$(1.1) \quad \frac{d\bar{z}}{d\varphi} + z \geq 0,$$

allora per ogni funzione u tale che:

$$(1.2) \quad u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \frac{\partial u}{\partial l}(z(\varphi)) = g(\varphi) + \text{costante} \quad (0 \leq \varphi \leq \lambda),$$

risulta:

$$(1.3) \quad \iint_{\Omega} (r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \leq \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \left(\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial(l)} - \gamma\right)^2 d\varphi \int_0^\lambda \dot{g}^2 d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{3\lambda_1 + \lambda_2}{4\lambda_1} \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy,$$

dove γ è una costante arbitraria; in particolare:

$$(1.3)' \quad \iint_{\Omega} (r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \leq \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \left(\oint_{\partial\Omega} (p^2 + q^2) d\varphi \int_0^\lambda \dot{g}^2 d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{3\lambda_1 + \lambda_2}{4\lambda_1} \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy.$$

Se:

$$(1.4) \quad \frac{d\bar{z}}{d\varphi} + z > 0,$$

allora, per ogni funzione u che verifica (1.2) risulta:

$$(1.5) \quad \iint_{\Omega} (p^2 + q^2 + r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \leq C' \int_0^\lambda \dot{g}^2 d\varphi + C'' \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy,$$

dove C' e C'' sono costanti positive che dipendono solo da $\Omega, \lambda_1, \lambda_2, l$.

OSSERVAZIONE 1. - L'ipotesi (1.1) implica (cfr. (16) e il contenuto di (iii), n° 1):

$$(1.6) \quad h = \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \frac{d\bar{z}}{d\varphi} d\varphi \geq -\frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda x d\varphi = -1;$$

L'ipotesi (1.4) implica, per analogo motivo:

$$(1.7) \quad h \geq 0.$$

Da (1.3) segue in particolare che, nelle ipotesi (1.1):

$$\iint_{\Omega} (r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{3\lambda_1 + \lambda_2}{4\lambda_1} \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy$$

per ogni u tale che:

$$(1.2)' \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial u}{\partial l}(z(\varphi)) = \text{costante} \quad (0 \leq \varphi \leq \lambda)$$

Osserviamo che se (1.6) non è soddisfatta, la maggiorazione a priori:

$$\iint_{\Omega} (r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \leq (\text{costante indipendente da } u) \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy$$

con le condizioni (1.2)'

non sussiste per ogni operatore ellittico L .

Infatti, se $h \leq -2$ esistono funzioni armoniche in Ω che verificano (1.2)' e non sono funzioni lineari. Questa asserzione segue dal teorema ricordato nel n. prec., e si può verificare con il seguente esempio. Sia Ω il disco $\{z: |z| < 1\}$, $z = e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) l'equazione del suo contorno, $l = e^{i\varphi - n\varphi}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$); si ha: $z = -n\varphi$, dunque $h = -n \leq -2$;

$$\frac{\partial}{\partial l} = \cos(n\varphi) \frac{\partial}{\partial \rho} - \text{sen}(n\varphi) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

dove ρ, φ sono coordinate polari ($z = \rho e^{i\varphi}$). Si verifica immediatamente che il polinomio armonico di grado n :

$$u(z) = \rho^n \text{sen } n\varphi = \text{Im } z^n$$

è tale che:

$$\cos(n\varphi) \frac{\partial u}{\partial \rho} - \text{sen}(n\varphi) \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0;$$

dunque $u(z) = \rho^n \text{sen } n\varphi$ è una funzione armonica non lineare nel disco $|z| < 1$, tale che $\frac{\partial u}{\partial l}(e^{i\varphi}) = 0$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $l = e^{i(\varphi - n\varphi)}$).

Da (1.5) segue in particolare che, nella ipotesi (1.4):

$$\iint_{\Omega} (p^2 + q^2) dx dy \leq C'' \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy$$

per ogni u che verifica (1.2)'. Osserviamo che, se (1.4) non è

soddisfatta, la maggiorazione a priori:

$$\iint_{\Omega} (p^2 + q^2) dx dy \leq (\text{costante indipendente da } u) \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy$$

con le condizioni (1.2)'

non sussiste necessariamente: ad es. la maggiorazione non sussiste se $\frac{d^2}{d\varphi} + \kappa \equiv 0$. Infatti in tal caso $l = e^{i\omega}$ è costante; allora la funzione $u(z) = x \text{ sen } \omega - y \text{ cos } \omega$ verifica (1.2)', ha gradiente non nullo ed è soluzione della equazione omogenea $Lu = 0$.

Osserviamo infine una conseguenza di (1.3). Il minimo (rispetto a γ) del secondo membro di (1.3) si ha se γ è uguale al valor medio di $\partial u / \partial(i l)$ sopra $\partial\Omega$:

$$\gamma = \frac{1}{\lambda} \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial(i l)} d\varphi;$$

applicando la diseguaglianza di WIRTINGER.

$$\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial(i l)} - \gamma \right)^2 d\varphi \leq \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{\partial u}{\partial(i l)} \right)^2 d\varphi,$$

si ricava da (1.3):

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (p^2 + 2s^2 + t^2) dx dy &\leq \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda}{2\pi} \left(\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{\partial u}{\partial(i l)} \right)^2 d\varphi \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{\partial u}{\partial l} \right)^2 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{3\lambda_1 + \lambda_2}{4\lambda_1} \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 2. - Le maggiorazioni (1.3) e (1.5) sussistono in una classe funzionale più ampia di quella definita nelle condizioni (1.2).

DEFINIZIONE: $V(g)$ è la chiusura in $W^{2,2}(\Omega)$ dell'insieme di funzioni che verificano (1.2), essendo g un'assegnata funzione di classe $C^1([0, \lambda])$, con $g(0) = g(\lambda)$, $g'(0) = g'(\lambda)$ (osserviamo che $V(g)$ è convesso, non lineare se $g \not\equiv 0$; $V(0)$ è lineare).

Tenendo presente quanto è ricordato nell'introduzione sulla definizione di norma in $W^{2,2}(\Omega)$ e sulla traccia sopra $\partial\Omega$ delle derivate prime delle funzioni appartenute a $W^{2,2}(\Omega)$, si constata immediatamente che (1.3) e (1.5) sussistono per ogni $u \in V(g)$.

Segue subito dal Teorema 1 questo teorema di unicità:

TEOREMA 2. - Supponiamo $\frac{d\bar{z}}{d\varphi} + x \geq 0$ e consideriamo il problema: (i) $u \in V(g)$, (ii) $Lu = f$, dove $f \in L^2(\Omega)$.

Due soluzioni del problema (i)-(ii) differiscono per una funzione lineare; se $\frac{d\bar{z}}{d\varphi} + x \neq 0$, la differenza fra due soluzioni del problema (i)-(ii) è costante.

DIMOSTRAZIONE. - La differenza di due soluzioni di (i)-(ii) è una soluzione $u \in V(0)$ dell'equazione omogenea $Lu = 0$; allora, per (1.3) (cfr. la osservazione 2), le derivate seconde di u sono quasi ovunque nulle: questo implica, per un noto teorema sulle derivate generalizzate, che u è della forma $u(z) = \alpha x + \beta y + \gamma$. Se poniamo $\alpha = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \cos \delta$, $\beta = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \sin \delta$, si ha:

$\frac{u}{\partial l} = \alpha \cos \omega + \beta \sin \omega = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega - \delta)$; pertanto, se $\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\bar{z}}{d\varphi} + x \neq 0$ la condizione $\frac{\partial u}{\partial l} = \text{costante}$ implica $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, cioè $u(z) = \gamma$.

TEOREMA 3. - Supponiamo: $\partial\Omega$ di classe C^3 , l di classe C^2 , $\frac{d\bar{z}}{d\varphi} + x > 0$, $h = 0$ (cfr. (16) e la osservazione 1). Date comunque $g \in C^2(\partial\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$, esiste una soluzione del problema:

$$u \in V(g) \quad Lu = f.$$

3. - Dimostrazione del Teorema 1.

LEMMA. - Se u è tale che:

$$(3.1) \quad u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \frac{\partial u}{\partial l}(z(\varphi)) = g(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \lambda),$$

si ha:

$$(3.2) \quad \iint_{\Omega} (rt - s^2) dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} (p^2 + q^2) \left(\frac{d\bar{z}}{d\varphi} + x \right) d\varphi + \\ - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial(i\bar{l})} g d\varphi.$$

Ricordiamo che $\frac{d\bar{z}}{d\varphi} + x = d\omega/d\varphi$, dove ω è l'argomento di l .

DIMOSTRAZIONE. - Se $u \in C^3(\overline{\Omega})$, si ha:

$$rt - s^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial i}{\partial x} \left(p \frac{\partial q}{\partial y} - q \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial q}{\partial x} - q \frac{\partial p}{\partial x} \right),$$

dunque:

$$(3.3) \quad \iint_{\Omega} (rt - s^2) dx dy = \frac{1}{2} \oint_{+\partial\Omega} \left(p \frac{\partial q}{\partial y} - q \frac{\partial p}{\partial y} \right) dy + \left(p \frac{\partial q}{\partial x} - q \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx = \\ = \frac{1}{2} \oint_{+\partial\Omega} p dq - q dp.$$

Evidentemente (3.3) sussiste se $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Poniamo:

$$m = \frac{\partial u}{\partial(i\bar{l})}(z(\varphi)) = -\text{sen } \omega p(z(\varphi)) + \text{cos } \omega q(z(\varphi)),$$

$$n = \frac{\partial u}{\partial\bar{l}}(z(\varphi)) = \text{cos } \omega p(z(\varphi)) + \text{sen } \omega q(z(\varphi));$$

risulta:

$$p(z(\varphi)) = -m \text{sen } \omega + n \text{cos } \omega, \quad q(z(\varphi)) = m \text{cos } \omega + n \text{sen } \omega,$$

quindi:

$$(3.4) \quad p dq - q dp = ndm - m dn + (m^2 + n^2) d\omega = \\ = \left[n \frac{dm}{d\varphi} - m \frac{dn}{d\varphi} + (p^2 + q^2) \left(\frac{d\omega}{d\varphi} + \kappa \right) \right] d\varphi.$$

Integrando per parti e tenendo conto di (3.1):

$$(3.5) \quad \int_0^\lambda \left(n \frac{dm}{d\varphi} - m \frac{dn}{d\varphi} \right) d\varphi = mn \Big|_0^\lambda - 2 \int_0^\lambda m \frac{dn}{d\varphi} d\varphi = \\ = -2 \int_0^\lambda m \dot{g} d\varphi.$$

Da (3.3)-(3.4)-(3.5) segue (3.2).

OSSERVAZIONE. - Nel caso che Ω sia il disco $\{z: |z| \leq R\}$, si può ritrovare facilmente la formula (3.2) calcolando con le coordinate polari: $x = \rho \text{cos } \varphi$, $y = \rho \text{sen } \varphi$ ($\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Per questo proposito si deve ricordare l'espressione dell'hessiano in coordinate

polari:

$$(3.6) \quad rt - s^2 = \begin{vmatrix} u_{\rho\rho} & \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}u_\varphi\right) \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}u_\varphi\right) & \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}u_\rho \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}u_\rho^2 + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(u_\varphi u_{\rho\rho}) - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\frac{u_\varphi^2}{\rho}\right),$$

e la formula di integrazione che si deduce subito da (3.6):

$$(3.7) \quad \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} (rt - s^2) d\varphi = \\ = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[u_\rho^2(Re^{i\varphi}) - \frac{2}{R} u_\varphi(Re^{i\varphi}) u_{\rho\varphi}(Re^{i\varphi}) + \frac{1}{R^2} u_\varphi^2(Re^{i\varphi}) \right] d\varphi.$$

Le formule (3.6)-(3.7) consentono di verificare la formula (3.2) con alcuni esempi indicativi. Consideriamo

$$u(z) = f(\rho^n \operatorname{sen} n\varphi) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

con f funzione di classe C^2 ; si ha:

$$\cos(n\varphi)u_\rho - \operatorname{sen}(n\varphi)\frac{u_\varphi}{\rho} = 0,$$

cioè la derivata di u nella direzione $l = e^{i(\varphi - n\varphi)}$ è nulla identicamente.

Essendo: $\frac{d}{d\varphi}$ (argomento di l) = $1 - n \leq 0$, per (3.2) l'integrale dell'hessiano di u , esteso ad un disco qualsiasi, deve essere ≤ 0 ; applicando (3.6)-(3.7) si trova infatti:

$$rt - s^2 = -\frac{n^2(n-1)}{2\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \rho^{2n-2} f'^2(\rho^n \operatorname{sen} n\varphi), \\ \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} (rt - s^2) d\varphi = -\frac{n^2(n-1)}{2} R^{2n-2} \int_0^{2\pi} f'^2(R^n \operatorname{sen} n\varphi) d\varphi \leq 0.$$

Consideriamo:

$$u(z) = \rho^m e^{-(m+n)\varphi} \operatorname{sen} n\varphi \quad (m \geq 2; n = \pm 1, \pm 2, \dots);$$

la funzione u è di classe C^2 , si ha:

$$u_\rho(e^{i\varphi}) \cos n\varphi + u_\varphi(e^{i\varphi}) \operatorname{sen} n\varphi = 0,$$

che esprime l'annullarsi, in ogni punto della circonferenza $z=e^{i\varphi}$; della derivata di u nella direzione $l = e^{i(\varphi + n\varphi)}$. Applicando (3.6) si trova:

$$\int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} (rt - s^2) d\varphi = n^2 e^{-2(m+n)\pi} (1+n);$$

in accordo con (3.1), il segno di questa quantità è il segno di $1+n = \frac{d}{d\varphi}$ (argomento di l).

Dimostrazione del teorema 1. - Sia u una funzione che verifica (1.2). Si ha (cfr. [14], LEMMA 1):

$$(1.15) \quad r^2 + 2s^2 + t^2 + 2A(rt - s^2) \leq B(Lu)^2,$$

dove A, B sono costanti tali che:

$$(1.16) \quad A > \frac{1}{2} \left(\frac{K_1}{K_2} + \frac{K_2}{K_1} \right), \quad B \geq \frac{A^2 - 1}{2AK_1K_2 - K_1^2 - K_2^2};$$

in queste formule K_1 e K_2 sono gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, cioè:

$$K_1 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) - \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2},$$

$$K_2 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) + \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2},$$

$$\lambda_1 \leq K_1 \leq K_2 \leq \lambda_2.$$

Per (1.15), il LEMMA, e la diseguaglianza di SCHWARTZ:

$$(1.18) \quad \iint_{\Omega} (r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \leq -A \oint_{\partial\Omega} (p^2 + q^2) \left(\frac{d\bar{z}}{d\varphi} + \kappa \right) d\varphi +$$

$$+ 2A \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial(i\bar{l})} - \gamma \right) \dot{g} d\varphi + B \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy \leq$$

$$\leq -A \oint_{\partial\Omega} (p^2 + q^2) \left(\frac{d\bar{z}}{d\varphi} + \kappa \right) d\varphi + 2A \left(\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial(i\bar{l})} - \gamma \right)^2 d\varphi \int_0^\lambda \dot{g}^2 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ B \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy;$$

dunque, se vale (1.1) oppure (1.4):

$$(1.19) \quad \iint_{\Omega} (r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \leq 2A \left(\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{t}l} - \gamma \right)^2 d\varphi \int_0^\lambda \dot{g}^2 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + B \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy. \quad \left(\frac{d\bar{s}}{d\varphi} + \varkappa \geq 0 \right).$$

Come è noto, esistono due costanti positive C_1 , C_2 (dipendenti solo da Ω) tali che:

$$(1.20) \quad \iint_{\Omega} (p^2 + q^2) dx dy \leq C_1 \oint_{\partial\Omega} (p^2 + q^2) d\varphi + C_2 \iint_{\Omega} (r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy;$$

naggorando il secondo addendo al secondo membro di (1.20) con (1.18) (con $\gamma = 0$) e utilizzando la disuguaglianza:

$$(1.21) \quad 2 \left(\oint_{\partial\Omega} (p^2 + q^2) d\varphi \int_0^\lambda \dot{g}^2 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \varepsilon \oint_{\partial\Omega} (p^2 + q^2) d\varphi + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\lambda \dot{g}^2 d\varphi \quad (\varepsilon > 0),$$

si trova:

$$(1.22) \quad \iint_{\Omega} (p^2 + q^2) dx dy \leq \oint_{\partial\Omega} \left[C_1 - C_2 A \left(\frac{d\bar{s}}{d\varphi} + \varkappa - \varepsilon \right) \right] (p^2 + q^2) d\varphi + \\ + \frac{1}{\varepsilon} C_2 A \int_0^\lambda \dot{g}^2 d\varphi + C_2 B \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy;$$

se vale (1.4), si può prendere ε così piccolo che $\frac{d\bar{s}}{d\varphi} + \varkappa - \varepsilon > 0$, e la costante A così grande che $C_1 - C_2 A \left(\frac{d\bar{s}}{d\varphi} + \varkappa - \varepsilon \right) \leq 0$, quindi con tale scelta di A :

$$(1.23) \quad \iint_{\Omega} (p^2 + q^2) dx dy \leq \frac{1}{\varepsilon} C_2 A \int_0^\lambda \dot{g}^2 d\varphi + \\ + C_2 B \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy \quad \left(\frac{d\bar{s}}{d\varphi} + \varkappa > 0 \right);$$

Da (1.19) (con $\gamma = 0$) e (1.21) segue:

$$(1.24) \quad \iint_{\Omega} (r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \leq \frac{1}{\varepsilon} A \int_0^{\lambda} \dot{g}^2 d\varphi + \\ + A\varepsilon \oint_{\partial\Omega} (p^2 + q^2) d\varphi + B \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy;$$

come è noto esistono delle costanti positive C_3, C_4 (dipendenti solo da Ω) tali che:

$$(1.25) \quad \oint_{\partial\Omega} (p^2 + q^2) d\varphi \leq C_3 \iint_{\Omega} (p^2 + q^2) dx dy + C_4 \iint_{\Omega} (r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy;$$

inserendo questa disuguaglianza in (1.24) si trova:

$$(1.26) \quad \iint_{\Omega} (r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \leq \frac{A}{(1 - \varepsilon AC_4)\varepsilon} \int_0^{\lambda} \dot{g}^2 d\varphi + \\ + \frac{B}{1 - \varepsilon AC_4} \iint_{\Omega} (Lu)^2 dx dy + \frac{A\varepsilon}{1 - \varepsilon AC_4} C_3 \iint_{\Omega} (p^2 + q^2) dx dy. \\ \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{AC_4} \right)$$

Da (1.23)-(1.26) segue (1.5). La disuguaglianza (1.3) segue da (1.19) minimizzando la costante B , come è qui appresso indicato.

Ricordando le limitazioni $\lambda_1 \leq K_1 \leq K_2 \leq \lambda_2$ e tenendo presente che, come segue da (1.16), $A > 1$, si ricava facilmente:

$$\frac{A^2 - 1}{2AK_1K_2 - K_1^2 - K_2^2} \leq \max \left\{ \frac{1}{2\lambda_1^2} (A + 1), \frac{A^2 - 1}{2A\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right\} = \\ = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda_1^2} (A + 1) & \text{se } A \geq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_1} \\ \frac{A^2 - 1}{2A\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2} & \text{se } A \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_1} \end{cases};$$

il terzo membro è minimo per $A = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_1}$, e il suo valore minimo è $\frac{1}{4\lambda_1^2} (3\lambda_1 + \lambda_2)$.

OSSERVAZIONE. - La disuguaglianza (1.20) si può precisare così se Ω è un cerchio: se u è una funzione di classe C^2 nel disco

$|z| \leq R$, si ha:

$$(1.27) \quad \iint_{|z| < R} (p^2 + q^2) dx dy \leq R \int_0^{2\pi} [p'(Re^{i\varphi}) + q'(Re^{i\varphi})] R d\varphi + \\ + \iint_{|z| < R} (x^2 + y^2)(r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \quad (?).$$

Per dimostrare (1.27) si passa in coordinate polari ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$), tenendo presente che (cfr. (3.6)):

$$(1.28) \quad p^2 + q^2 = u^2_\rho + \frac{1}{\rho^2} u^2_\varphi, \\ r^2 + 2s^2 + t^2 = u^2_{\rho\rho} + 2\left(\frac{\partial}{\partial\rho} \frac{1}{\rho} u_\varphi\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho} u_\rho\right)^2 \geq \\ \geq u^2_{\rho\rho} + \left(\frac{\partial}{\partial\rho} \frac{1}{\rho} u_\varphi\right)^2;$$

si stabilisce la diseguaglianza:

$$\int_0^R \rho g^2(\rho) d\rho \leq R^2 g^2(R) + \int_0^R \rho^3 g'^2(\rho) d\rho,$$

dove g è funzione di classe C^1 nell'intervallo $[0, R]$ ⁽⁸⁾; con questa

(?) La diseguaglianza (1.20) si può dedurre da (1.27), applicando l'insieme Ω nel disco $|z| < 1$ con una trasformazione conforme. Ricordiamo che $\iint (\nabla u)^2 dx dy$ è un invariante per trasformazioni conformi.

(⁸) Integrando per parti:

$$\int_\varepsilon^R \rho g^2(\rho) d\rho = \frac{\rho^2}{2} g^2(\rho) \Big|_\varepsilon^R - \int_\varepsilon^R \rho^2 g(\rho) g'(\rho) d\rho \leq \frac{R^2}{2} g^2(R) + \\ + \int_\varepsilon^R \rho^{1/2} |g(\rho)| \rho^{3/2} |g'(\rho)| d\rho \leq \frac{R^2}{2} g^2(R) + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^R \rho g^2(\rho) d\rho + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^R \rho^3 g'^2(\rho) d\rho;$$

ne segue, risolvendo rispetto a $\int \rho g^2 d\rho$:

$$\int_\varepsilon^R \rho g^2(\rho) d\rho \leq R^2 g^2(R) + \int_\varepsilon^R \rho^3 g'^2(\rho) d\rho;$$

per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha la diseguaglianza da dimostrare.

diseguaglianza si maggiorano gli integrali rispetto a ρ :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho u^2_{\rho} d\rho \leq R^2 \int_0^{2\pi} u^2_{\rho}(Re^{i\varphi}) d\varphi + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 u^2_{\rho\rho} \rho d\rho,$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \frac{u^2_{\varphi}}{\rho^2} d\rho \leq R^2 \int_0^{2\pi} \frac{u^2_{\varphi}(Re^{i\varphi})}{R^2} d\varphi + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \rho} \right)^2 \rho d\rho$$

La diseguaglianza (1.25) si può così precisare se Ω è un cerchio: se u è funzione di classe C^2 nel disco $|z| \leq R$ si ha:

$$(1.29) \quad \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} [p^2(Re^{i\varphi}) + q^2(Re^{i\varphi})] R d\varphi \leq \iint_{|z| < R} (p^2 + q^2) dx dy +$$

$$+ \left[\iint_{|z| < R} (p^2 + q^2) dx dy \right] \iint_{|z| < R} (x^2 + y^2)(r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Per dimostrare (1.29) si procede così:

$$\frac{1}{2} R^2 \left[u^2_{\rho}(Re^{i\varphi}) + \frac{1}{R^2} u^2_{\varphi}(Re^{i\varphi}) \right] = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \left(u^2_{\rho} + \frac{u^2_{\varphi}}{\rho^2} \right) d\rho =$$

$$= \int_0^R \rho \left(u^2_{\rho} + \frac{u^2_{\varphi}}{\rho^2} \right) d\rho + \int_0^R \rho \left(u_{\rho} u_{\rho\rho} + \frac{u_{\varphi}}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \rho} \right) \rho d\rho \leq \int_0^R \rho \left(u^2_{\rho} + \frac{u^2_{\varphi}}{\rho^2} \right) d\rho +$$

$$+ \int_0^R \left(u^2_{\rho} + \frac{u^2_{\varphi}}{\rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} \rho \left(u^2_{\rho\rho} + \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \rho} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rho d\rho \leq \int_0^R \rho (p^2 + q^2) d\rho +$$

$$+ \int_0^R (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \rho (r^2 + 2s^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} \rho d\rho,$$

$$\frac{1}{2} R \int_0^{2\pi} \left[u^2_{\rho}(Re^{i\varphi}) + \frac{1}{R^2} u^2_{\varphi}(Re^{i\varphi}) \right] R d\varphi \leq \iint_{|z| < R} (p^2 + q^2) dx dy +$$

$$+ \iint_{|z| < R} (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (r^2 + 2s^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} dx dy,$$

e si applica la diseguaglianza di Schwartz per maggiorare il secondo addendo.

4. - Dimostrazione del Teorema 3.

È sufficiente dimostrare il teorema nel caso $g \equiv 0$. Infatti, essendo per ipotesi $h = 0$ e $g \in C^2$, per il teorema citato in (iii), n° 1, esiste una soluzione $v \in C^2(\bar{\Omega})$ del problema:

$$\Delta v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial l}(z(\varphi)) = g(\varphi) + \text{costante}$$

con una opportuna scelta della costante.

Allora, se cerchiamo la soluzione u del problema (i)-(ii) nella forma $u = v + w$, la funzione w è soluzione del problema:

$$w \in V(0), \quad Lw = f - Lv \in L^2(\Omega).$$

È conveniente introdurre lo spazio V , quoziente di $V(0)$ rispetto alla classe delle funzioni costanti in Ω (ricordiamo che $V(0)$ è lineare); in altri termini V è l'insieme delle (classi di) funzioni del tipo: $u + \text{costante arbitraria}$, con $u \in V(0)$. Poniamo:

$$(3.2) \quad \|u\|_V^2 = \iint_{\Omega} (p^2 + q^2 + r^2 + 2s^2 + t^2) dx dy.$$

Osserviamo che V è uno spazio di Banach rispetto alla norma (3.2). Evidentemente (3.2) definisce una norma in V (infatti una funzione di classe $W^{2,2}(\Omega)$, con derivate prime quasi ovunque nulle, è costante in Ω); dimostriamo che V è completo. Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni tali che:

$$u_n \in V(0), \quad \|u_m - u_n\|_V \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow +\infty).$$

Osserviamo che, se k è una costante:

$$(3.3) \quad \|u - k\|_{W^{2,2}(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} (u - k)^2 dx dy + \|u\|_V^2 \geq \|u\|_V^2;$$

per la disuguaglianza di Poincaré:

$$\iint_{\Omega} (u - u_{\Omega})^2 dx dy \leq (\text{costante}) \iint_{\Omega} (p^2 + q^2) dx dy \leq (\text{costante}) \|u\|_V^2$$

$$\left(u_{\Omega} = \frac{1}{\text{mis } \Omega} \iint_{\Omega} u dx dy \right);$$

dunque:

$$(3.4) \quad \|u - u_{\Omega}\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq (\text{costante}) \|u\|_V.$$

Per (3.4) la successione di funzioni $u'_n = u_n - (u_n)_\Omega$ è tale che $\|u'_m - u'_n\|_{W^{2,2}(\Omega)} \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow +\infty$). Esiste allora $u \in W^{2,2}(\Omega)$ tale che $\|u'_n - u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \rightarrow 0$; poichè $V(0)$ è chiuso ed evidentemente $u_n \in V(0)$, risulta $u \in V(0)$; infine, per (3.3), si ha: $\|u_n - u\|_V \leq \|u'_n - u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \rightarrow 0$. Questo prova la completezza di V . Osserviamo che, per ogni $f \in L^2(\Omega)$, il problema:

$$(3.5) \quad u \in V(0), \quad \Delta u = f$$

ha soluzione (unica, nella classe V). Sia infatti $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$; per l'ipotesi $h = 0$, $l \in C^2$ e per quanto detto nel n. 1, esiste una soluzione u_n del problema:

$$u_n \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \Delta u_n = f_n, \quad \frac{\partial u_n}{\partial l}(z(\varphi)) = \text{costante} \quad (0 \leq \varphi \leq \lambda),$$

con una opportuna scelta della costante (in dipendenza di n). Per l'ipotesi $\frac{d\lambda}{d\varphi} + \kappa > 0$ e il teorema 1:

$$\|u_m - u_n\|_V \leq C_0 \|f_m - f_n\|_{L^2(\Omega)},$$

dove la costante C_0 dipende solo da Ω . Allora, per la dimostrata completezza di V , esiste una funzione $u \in V(0)$ tale che $\|u - u_n\|_V \rightarrow 0$; evidentemente:

$$\|\Delta u - f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2} \|u - u_n\|_V, \text{ dunque } \Delta u = f.$$

Stabiliti la completezza di V e il teorema di esistenza per il problema (3.5), la dimostrazione del teorema 3 si conclude con una tecnica standard.

Accenniamo al procedimento. Si definisce $L_k = kL + (1 - k)\Delta$ per $0 \leq k \leq 1$; l'operatore L_k verifica una condizione del tipo (10), con delle costanti indipendenti da k , dunque per il teorema 1 si ha la maggiorazione a priori:

$$(3.6) \quad \|u\|_V \leq C \|L_k u\|_{L^2(\Omega)} \quad (u \in V(0)),$$

con una costante C indipendente da k .

Si chiama E l'insieme dei k ($0 \leq k \leq 1$) tali che l'equazione $L_k u = f$ ha soluzione $u \in V(0)$ per ogni $f \in L^2(\Omega)$.

Per quanto è sopra dimostrato, $k = 0$ appartiene ad E ; servendosi di (3.6) e della completezza di V , si dimostra che se $k_0 \in E$, allora ogni k tale che $0 \leq k \leq 1$, $|k - k_0| < \frac{1}{C(2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{\frac{1}{2}}}$, appartiene ancora ad E . Ne segue che $k = 1$ appartiene ad E , cioè l'asserto da dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. BERS-L. NIRENBERG, *On linear and non-linear elliptic boundary value problems in the plane*, Convegno Internaz. sulle Equazioni a Derivate Parziali, Trieste 1954.
- [2] G. BOULIGAND-G. GIRAUD-P. DELENS, *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel*, Parigi, (1935).
- [3] JU. V. EGOROV-V. A. KONDRAT'EV, *A problem with an oblique derivative*, Soviet Mathematics, vol. 7, n. 5, (1966).
- [4] G. FICHERA, *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari*, Rend. Mat. Appl. 17, (1958).
- [5] R. FIORENZA, *Sui problemi di derivata obliqua per le equazioni ellittiche*, Ricerche di Mat., VIII, (1959).
- [6] — —, *Sui problemi di derivata obliqua per le equazioni ellittiche non lineari in due variabili*, Ricerche di Mat. VIII, (1959).
- [7] A. LIENARD, *Problème plan de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel*, J. Ecole Polytechnique, p. 144, (1938).
- [8] — —, *Nouveau mémoire sur le problème de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel*, J. Ecole Polytechnique, p. 145, (1939).
- [9] E. MAGENES, *Il problema della derivata obliqua regolare per le equazioni ellittico-paraboliche del secondo ordine in m variabili*, Rend. Mat. Appl., p. 16, (1957).
- [10] S. G. MIKHLIN, *Integral equations*, Pergamon Press, (1957).
- [11] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer, (1955).
- [12] N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular integral equations*, Groningen, (1953).
- [13] F. ROSATI, *Su alcuni problemi di derivata obliqua*, Rend. Mat. Appl., p. 23, (1964).
- [14] G. TALENTI, *Equazioni lineari ellittiche in due variabili*, Le Matematiche, XXI, (1966).
- [15] O. A. LADYZHENSKAYA-O. A. URALTZEVA, *Equazioni lineari e quasilineari di tipo ellittico*, (in russo) Mosca, (1964).
- [16] I. N. VEKUA, *Generalized analytic functions*, Pergamon Press, (1962).