Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marco D'Anna

Modulo canonico di anelli ridotti di dimensione uno e semigruppi loro associati. t-successioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 27–30.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_27_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 27-30

Modulo canonico di anelli ridotti di dimensione uno e semigruppi loro associati. t-successioni.

Marco D'Anna

Sia $(R, \mathcal{M})$ un anello locale, di dimensione uno, ridotto, Noetheriano e sia $\overline{R}$ la chiusura integrale di R nel suo anello totale delle frazioni $Q(R)$. Siano $\mathcal{P}_i$, $i=1, \ldots, n$, i primi minimali di R. Se $\overline{(R/\mathcal{P}_i)}$ è la chiusura integrale di $R/\mathcal{P}_i$ nel suo campo dei quozienti $Q(R/\mathcal{P}_i)$, si ha che $R \subset R/\mathcal{P}_1 \times \ldots \times R/\mathcal{P}_n$, $\overline{R} \cong \overline{(R/\mathcal{P}_1)} \times \ldots \times \overline{(R/\mathcal{P}_n)}$ e $Q(R) \cong Q(R/\mathcal{P}_1) \times \ldots \times Q(R/\mathcal{P}_n)$. Assumiamo inoltre che R sia analiticamente non-ramificato, cioè che il completamento $\mathcal{M}$-adico $\widehat{R}$ di R sia anch'esso un anello ridotto o, equivalentemente, che $\overline{R}$ sia un R-modulo di tipo finito (in particolare si ha che il conduttore $\mathcal{C} := (R : \overline{R})$ non è l'ideale nullo).
Una classe fondamentale di esempi di anelli che verificano queste ipotesi è costituita dagli anelli locali di curve algebriche nei loro punti singolari.

Ad R è possibile associare un sottosemigruppo di $\mathbf{N}^d$ (dove d è il numero dei primi minimali di $\widehat{R}$, che coincide col numero degli ideali massimali di $\overline{R}$; geometricamente, d rappresenta il numero dei rami della singolarità). Tale semigruppo è definito considerando un qualsiasi elemento r di $Q(R)$ come un elemento di $Q(R/\mathcal{P}_1) \times \ldots \times Q(R/\mathcal{P}_n)$ e definendo $v(r) = (v_{1,1}(r_1), \ldots, v_{1,h_1}(r_1), v_{2,1}(r_2), \ldots, v_{n,h_n}(r_n))$ (dove $v_{i,j}: Q(R/\mathcal{P}_i) \rightarrow \mathbf{Z} \cup \infty$ è la valutazione associata al DVR $V_{i,j} := (\overline{(R/\mathcal{P}_i)})_{\mathcal{M}_{i,j}}$ ottenuto localizzando $R/\mathcal{P}_i$ nell'ideale massimale $\mathcal{M}_{i,j}$; si noti che $\sum_{i=1}^{n} h_i = d$); dunque, ponendo $S = v(R) := \{v(r) : r \in R, \quad r \notin (R)\}$ (dove $Z(R)$ è l'insieme dei divisori dello zero di R), si ottiene il sottosemigruppo di $\mathbf{N}^d$ cercato.

Nell'ipotesi che il campo residuo di R sia isomorfo a quelli di tutti gli anelli $V_{i,j}$ (in questo caso R si dice *residualmente razionale*) e che $|R/\mathcal{M}| \geq d$, le proprietà di R sono legate strettamente a quelle di $v(R)$. Quest'ultima ipotesi è verificata, ad esempio, nel caso in cui il campo residuo sia algebricamente chiuso.

L'oggetto della mia ricerca è dunque lo studio dei suddetti anelli tramite l'uso dei semigruppi loro associati.

A partire dagli anni '70 sono stati trovati risultati in questo senso, considerando il caso particolare che si ottiene quando, nelle notazioni precedentemente introdotte, $n = d = 1$. In questo caso R si dice *analiticamente irriducibile*, $\overline{R}$ è un DVR ed il semigruppo $S = v(R)$ associato ad R è un semigruppo numerico (cioè un sottomonoide di $(\mathbf{N}, +)$ tale che $|\mathbf{N} \setminus S| < \infty$. Alla base di questi studi è un teorema di E. Kunz (1970) (cfr. [8]) che caratterizza gli anelli di Gorenstein come quelli che hanno semigruppo associato simmetrico (cioè tale che, detto $g = g(S) := \max(\mathbf{N} \setminus S)$, $x \in S \Leftrightarrow g - x \in S$).

A partire dagli anni ottanta si è iniziato studiare il caso generale (ovvero il caso di singolarità con più rami). In particolare, il teorema di Kunz è stato esteso da A. Campillo, F. Delgado e K. Kiyek in [3], dando un'opportuna generalizzazione della nozione di semigruppo simmetrico

Nei primi due capitoli della presente tesi dimostro risultati connessi con la nozione di modulo canonico. Per anelli R di dimensione uno si può definire il modulo cano-nico come un ideale frazionario ω che abbia la seguente proprietà di dualità, per ogni ideale frazionario I di R: $\omega:(\omega: I) = I$ (parlando di ideale frazionario si suppone sempre che contenga un elemento che non sia un divisore dello zero). Nelle ipotesi assunte nella presente tesi, poiché $\widehat{R}$ è un anello ridotto, si ha che R ha sempre un ideale canonico; inoltre, per l'ipotesi $|R/\mathcal{M}| \geq d$, si può sempre assumere che $R \subseteq \omega \subseteq \overline{R}$. In [7] J. Jäger dimostra, nel caso dei domini analiticamente irriducibili, che sotto questa condizione gli ideali canonici sono caratterizzati dal loro insieme dei valori (nel senso che preciseremo in seguito).

Per poter utilizzare al meglio la tecnica dello studio di tali anelli con l'ausilio dei semigruppi loro associati, mostro come si possa assumere l'ipotesi aggiuntiva che gli anelli quoziente $R/\mathcal{P}_i$ siano analiticamente irriducibili (il che equivale a dire, nelle notazioni introdotte precedentemente, che $n = d$). Infatti, passando al completamento $\mathcal{M}$-adico $\widehat{R}$ di R, si cade in questa situazione, ed i semigruppi associati ad R ed $\widehat{R}$ coincidono (cfr. Proposizione I.1.1). Inoltre questa ipotesi aggiuntiva permette di capire meglio alcune caratteristiche del semigruppo dei valori in relazione ai primi minimali di R.

Nella seconda sezione del primo capitolo definisco la funzione numerica $d(\_ \setminus \_)$ che permette di calcolare le lunghezze: se I e J sono due ideali frazionari di R, $I \supseteq J$, allora $\lambda_R(I/J) = d(v(I) \setminus v(J))$ (cfr. Proposizione I.2.2). Questo risultato è un fatto chiave per trasferire informazioni numeriche a livello di teoria degli anelli ed è vero solo se R è residualmente razionale. L'introduzione della funzione $d(\_ \setminus \_)$, porta a sviluppare una breve teoria degli ideali di semigruppo (ovvero insiemi $E \subseteq \mathbf{Z}^d$, tali che $E + S \subseteq E$ e per i quali esiste un elemento $s \in S$ tale che $s + E \subseteq S$), per stabilire quali siano gli ideali di semigruppo per cui ha senso definire tale funzione. La proprietà necessaria è che tutte le catene "saturate" di punti di un ideale E tra due estremi fissati abbiano la stessa lunghezza (cfr. proprietà (**E4**)).

Il risultato centrale del primo capitolo, e che permette di sviluppare anche il secondo capitolo, è la caratterizzazione degli ideali canonici di R in termini del loro insieme dei valori (risultato che generalizza al caso degli anelli ridotti quello di [7] per i domini). Più precisamente, nella terza sezione del primo capitolo introduco la definizione di *ideale canonico di semigruppo* K di S e dimostro che K verifica la succitata proprietà (**E4**) (cfr. Teorema I.3.6 e Corollario I.3.7); questo risultato, relativamente semplice da provare nel caso $d = 2$, si è rivelato particolarmente difficile da provare in generale.

Utilizzando questa proprietà di K, nella quarta parte del capitolo si può finalmente dimostrare la caratterizzazione degli ideali canonici di R tramite il loro insieme di valori (cfr. Teorema I.4.1):

TEOREMA 1. – *Sia I un ideale frazionario di R, $R \subseteq I \subseteq \overline{R}$ e sia K l'ideale canonico di $v(R)$. Allora si ha:*

$$I \text{ è un ideale canonico di } R \Leftrightarrow v(I) = K\,.$$

Le prime quattro sezioni del primo capitolo costituiscono, essenzialmente, il contenuto di [5].

Nell'ultima parte del primo capitolo studio gli anelli *quasi-Gorenstein*, la cui definizione e le cui proprietà sono legate al modulo canonico: un anello si dice quasi-Gorenstein se $\mathcal{M}\omega = \mathcal{M}$ (dove ω è un ideale canonico di R tale che $R \subseteq \omega \subseteq \overline{R}$). Inoltre è possibile dare una definizione analoga per i semigruppi; si hanno, allora, i cosiddetti semigruppi *quasi-simmetrici* che permettono di caratterizzare gli anelli quasi-Gorenstein (cfr. Proposizione I.5.5). I risultati esposti in quest'ultimo paragrafo sono stati ottenuti in gran parte in collaborazione con V. Barucci e R. Fröberg

Nel secondo capitolo mi concentro sul caso particolare degli anelli il cui completamento ha due soli primi minimali ($d = 2$). I semigruppi con cui si ha a che fare sono, quindi, sottosemigruppi di $\mathbf{N}^2$. Per questi semigruppi si riesce ad ottenere un maggior numero di informazioni rispetto al caso generale. In particolare ottengo una descrizione dei semigruppi quasi-simmetrici di tipo due (Proposizione II.1.16) in termini di «simmetria» dei loro elementi ed una descrizione dell'ideale canonico K di tali semigruppi (Teorema II.1.17).

Nella seconda sezione, a partire da questi risultati e dal Teorema I.4.1, arrivo a dimostrare una caratterizzazione (Teorema II.2.5) degli anelli massimali con conduttore fissato (sempre nel caso $d = 2$), cioè tali che ogni loro sovranello contenuto in $\overline{R}$ ha un conduttore strettamente più grande del conduttore di R. Rispetto al caso dei domini analiticamente irriducibili studiato, ad esempio, in [2], si ottiene che gli anelli di Gorenstein e quelli di quasi-Gorenstein di tipo due (detti anelli di Kunz) non sono gli unici anelli massimali con conduttore fissato; lo sono però se si assume che il campo residuo di R sia algebricamente chiuso. I risultati di questa seconda sezione del capitolo sono stati ottenuti in collaborazione con V. Barucci e R. Fröberg (cfr. [1]).

Nel terzo capitolo introduco il concetto di *t-successione* di R, il cui studio permette di caratterizzare alcune classi particolari di anelli. Tra queste vi sono gli anelli quasi-Gorenstein, e quelli tali che $\lambda_R(\overline{R}/\mathcal{C}) = (t(R)+1)\,\lambda_R(R/\mathcal{C}) - a$, dove $t(R)$ indica il tipo di Cohen-Macaulay di R ed a è un intero minore del tipo di R (se $a = 0$ tali anelli vengono detti *di lunghezza massima*).

Nella seconda sezione studio gli anelli *di Arf* che sono gli anelli per cui le t-successioni danno più informazioni sul semigruppo ad essi associato (crf. Proposizione III.2.11). L'introduzione di tali anelli ha un significato geometrico legato al concetto di «multiplicity sequence». Essi sono definiti come quegli anelli per cui ogni ideale regolare ed integralmente chiuso è stabile. Inoltre risulta naturale dare la definizione di *semigruppo di Arf*; per questi semigruppi ha senso definire la nozione di t-successione. Si ottiene, allora, che un anello è di Arf se e soltanto se il semigruppo ad esso associato è di Arf e le loro t-successioni coincidono (Proposizione III.2.12).

Nel caso dei domini analiticamente irriducibili (sezione III.3), la definizione di t-successione è sempre ben posta anche per i semigruppi associati (semigruppi numerici, in questo caso) e risulta legata strettamente al modulo canonico. Questo fatto permette di ottenere informazioni riguardanti ω^2 e il «blowing-up» del modulo canonico (cfr. anche [4]).

Infine, nella quarta parte del capitolo studio le t-successioni dei semigruppi numerici; a questo livello, infatti, è possibile ottenere ulteriori risultati (tra cui un algoritmo per il calcolo delle t-successioni) e caratterizzare le successioni composte da 3 o 4 interi, che sono t-successioni di qualche semigruppo (cfr. Teoremi III.4.5 e III.4.6 e Algoritmo III.4.13; cfr. anche [6]).

BIBLIOGRAFIA

[1] BARUCCI V., D'ANNA M. and FRÖBERG R., *The semigroup of values of a one-dimensional local ring with two minimal primes* preprint (1997).

[2] BARUCCI V. and FRÖBERG R., *Maximality properties for one-dimensional analy-tically irreducible local Gorenstein rings*, Mathematica Scandinavica (to appear).

[3] CAMPILLO A, DELGADO F. and KIYEK K., *Gorenstein property and symmetry for one-dimensional local Cohen-Macaulay rings*, Manuscripta Math., **83** (1994), 405-423.

[4] D'ANNA M., *Canonical module and one-dimensional analytically irreducible Arf domains*, Proceedings of the Fes Conference on Commutative Ring Theory, Dekker Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **185** (1997).

[5] D'ANNA M., *Canonical module of a one-dimensional reduced local ring*, Comm. Algebra, **25(9)** (1997), 2939-2965.

[6] D'ANNA M., *Type sequences of numerical semigroups*, Semigroup Forum, **56** (1998), 1-31.

[7] JÄGER J., *Längeberechnungen und kanonische Ideale in eindimensionalen Ringen*, Arch. Math., **29** (1977), 504-512.

[8] KUNZ E., *The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring*, Proc. Amer. Math. Soc., **25** (1970), 748-751.

Dipartimento di Matematica, Università di Catania
e-mail: mdanna@dipmat.unict.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma «la Sapienza») - Ciclo VIII
Direttore della ricerca: Prof. M. Fontana (Università di Roma III)