Fabrizio Colombo

Problemi inversi, equazioni quasilineari e semigruppi analitici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 97–100.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_97_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 97-100

Problemi inversi, equazioni quasilineari e semigruppi analitici.

FABRIZIO COLOMBO

Nella presente tesi vengono studiati alcuni problemi diretti ed inversi, con metodi basati sulla teoria dei semigruppi analitici e su risultati di regolarità massimale relativi ad equazioni differenziali ed integrodifferenziali paraboliche. Sono stati considerati i seguenti quattro problemi principali:

$\mathcal{P}_1$ – Un problema inverso relativo a materiali *non omogenei* con memoria.

La versione astratta del problema fisico, relativa allo spazio di Banach X è la seguente: *determinare una funzione* $u:[0, T] \to X$ *ed un operatore* $H:[0, T] \to \mathcal{L}(X)$ *che soddisfino le equazioni*:

$$(1) \quad u'(t) = (B_1 + B_2)\, u(t) + \int_0^t H(t-s)(B_1 + B_2)\, u(s)\, ds + f(t), \qquad t \in [0, T]$$

$$(2) \qquad u(0) = u_0$$

$$(3) \qquad \Phi(u(t)) = G(t), \qquad t \in [0, T]$$

dove assumiamo che $f:[0, T] \to X$ sia una funzione nota e $u_0 \in X$ sia un elemento dato, mentre $B_1: \mathcal{D}(B_1) \subset X \to X$ e $B_2: \mathcal{D}(B_2) \subset X \to X$ sono operatori lineari chiusi con *differenti* domini $\mathcal{D}(B_1)$ e $\mathcal{D}(B_2)$ densi in X, mentre Φ è un funzionale lineare e continuo in $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X))$ e $G:[0, T] \to \mathcal{L}(X)$ è una funzione nota a valori nello spazio degli operatori. Per studiare materiali non omogenei decomponiamo l'operatore ellittico nella somma $B_1 + B_2$ di operatori commutanti nel senso dei risolventi. Tale decomposizione è utile al fine di trovare un sistema equivalente di equazioni di Volterra di seconda specie al quale si possono applicare argomenti di punto fisso.

$\mathcal{P}_2$ – Combustione di un materiale *omogeneo* con memoria termica.

Benché venga considerato un materiale la cui densità è variabile a causa della combustione, si tratta il caso in cui il nucleo di convoluzione ha una dipendenza dalle coordinate spaziali praticamente trascurabile. La versione astratta del problema fisico, relativa allo spazio di Banach X è: *determinare tre funzioni*

$u:[0, T]\to X$, $\varrho:[0, T]\to X$ *e* $h:[0, T]\to \mathbf{R}$ *che soddisfino le equazioni*:

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t h(t-s)\, Au(s)\, ds + f(u(t), \varrho(t)), \qquad t \in [0, T], \tag{4}$$

$$\varrho'(t) = B\varrho(t) + g(u(t), \varrho(t)), \qquad t \in [0, T], \tag{5}$$

$$u(0) = u_0, \qquad \varrho(0) = \varrho_0, \tag{6}$$

$$\Phi(u(t)) = l(t), \qquad t \in [0, T], \tag{7}$$

dove $A: \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ e $B: \mathcal{D}(B) \subset X \to X$ sono operatori lineari chiusi (con domini, in generale, non densi in X). Supponiamo che $f: X \times X \to X$ e $g: X \times X \to X$ siano due operatori non lineari e che u_0, ϱ_0 siano funzioni assegnate in opportuni spazi di Banach, $l:[0, T] \to \mathcal{L}(X)$ sia una funzione a valori reali ed infine Φ sia un funzionale lineare e limitato in $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X))$.

$\mathcal{P}_3$ – Un particolare approccio alle equazioni quasilineari paraboliche negli spazi $C^k(\overline{\Omega})$.

Si studia una classe di equazioni di evoluzione in spazi di Banach:

$$u'(t) = A(t, u(t))\, u(t) + f(t, u(t)), \qquad t \in [0, T], \tag{8}$$

$$u(0) = u_0. \tag{9}$$

Si considerano tre spazi di Banach $D \subset X_\alpha \subset X$ con immersioni continue, dove X_α $(0 < \alpha < 1)$ è uno spazio intermedio tra X e D. Le funzioni non lineari A e f sono definite in $[0, T] \times \mathcal{O}$, dove $\mathcal{O}$ è un insieme aperto in X_α, ed hanno valori in $\mathcal{L}(D, X)$, X rispettivamente. Il dato iniziale u_0 appartiene allo spazio intermedio X_α.

$\mathcal{P}_4$ – Generazione di semigruppi analitici.

Consideriamo operatori fortemente ellittici di ordine $2m$, in forma non-variazionale, con generali condizioni al contorno omogenee:

$$A(x, D) := \sum_{|\alpha| \leq 2m} A_\alpha(x)\, D^\alpha, \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{10}$$

$$B_j(x, D) := \sum_{|\beta| \leq m_j} B_{j\beta}(x)\, D^\beta, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{11}$$

Supponiamo che i coefficienti $A_\alpha(x)$, $B_{j\beta}(x)$ e la frontiera $\partial\Omega$, dove Ω è un aperto limitato in $\mathbf{R}^n$, soddisfino opportune condizioni di regolarità. Si dimostra che gli operatori $A(x, D)$ generano semigruppi analitici negli spazi $W_B^{k,p}(\Omega)$ e $C_B^k(\overline{\Omega})$ definiti in (13) e (14), rispettivamente, dove $k = 1, 2, \dots$ e $1 < p < +\infty$.

Esponiamo ora quali relazioni intercorrono e quali metodi vengono utilizzati per studiare i primi tre problemi. $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ sono la versione astratta di alcuni problemi fisici. Supponiamo che gli operatori B_1 e B_2 relativi al problema $\mathcal{P}_1$, A e B relativi a $\mathcal{P}_2$ e $A(0, u_0)$ relativo a $\mathcal{P}_3$ siano i generatori di semigruppi analitici in opportuni spazi di Banach in modo tale che, grazie alla formula di variazione delle costanti arbitrarie, si possano trasformare le equazioni integro–differenziali dei problemi $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ e l'equazione differenziale di $\mathcal{P}_3$ in equazioni non lineari di Volterra di seconda specie. Utilizzando poi argomenti di punto fisso, si dimostra l'esistenza, l'unicità e la dipendenza continua dai dati per le rispettive soluzioni. Per dimostrare i principali risultati relativi alla formulazione astratta dei problemi, sono di cruciale importanza i risultati di regolarità ottimale per equazioni paraboliche.

I risultati astratti trovano diverse applicazioni se sono noti i risultati di generazione di semigruppi in certi spazi di Banach. Grazie infatti ai teoremi trovati risolvendo $\mathcal{P}_4$, si possono scegliere particolari spazi di Banach X e dare esempi concreti. Per $\mathcal{P}_1$ si sceglie lo spazio $X = L^p(\Omega_1; W_0^{1,p}(\Omega_2))$ e la generazione di semiguppi analitici segue dai teoremi di generazione trovati risolvendo $\mathcal{P}_4$. I teoremi di generazione dimostrati per $\mathcal{P}_4$ valgono anche per sistemi di equazioni differenziali con particolari condizioni al contorno. Per $\mathcal{P}_2$ si prende $L^p(\Omega)$ e, infine per $\mathcal{P}_3$ si sceglie come spazio base lo spazio delle funzioni continue. In questi due ultimi casi sono ben noti i teoremi di generazione. Le ragioni di tali scelte sono ampiamente esposte nell'introduzione della tesi.

1. – Alcuni risultati principali.

Enunciamo solo alcuni dei più importanti risultati dimostrati nella tesi. Per ulteriori definizioni di spazi o insiemi rimandiamo alla tesi data la brevità della presente nota. I Teoremi 1, 2 e 3 che seguono sono relativi rispettivamente ai problemi $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$.

TEOREMA 1. – *Sia $\mathcal{G}(m)$ l'insieme dei dati ammissibili definito in* (4.10) *cap.* 1 *della tesi. Sia $(f, G, u_0) \in \mathcal{G}(m)$ per qualche $T_0 > 0$, $p \in (1, +\infty)$ e sia $\sigma \in (0,1)\setminus\{1/p\}$. Allora esiste un $T^* \in (0, T_0]$ tale che per ogni $T \in (0, T^*]$ il problema* (1)-(3) *ammette un'unica soluzione $(u, H) \in \mathcal{U}^{2+\sigma,p}(B_2, B_1+B_2) \times W^{\sigma,p}((0,T); \mathcal{K})$, dove $\mathcal{K}$ indica una sottoalgebra chiusa in $\mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(\mathcal{D}(B_1) \cap \mathcal{D}(B_2))$ e $\mathcal{U}^{2+\sigma,p}(B_2, B_1+B_2)$ indica opportuni spazi di Sobolev.*

Per nuclei indipendenti dalle variabili spaziali ricordiamo il lavoro [2].

TEOREMA 2. – *Sia $\overline{u} \subset \mathcal{O} \cap \overline{D}^{\alpha}$. Le funzioni A e f soddisfino le ipotesi* (2.8), (2.9), (2.10) *e* (2.11) *del cap.* 3 *della tesi. Esista un intorno $\mathcal{O}_0$ di $\overline{u}$ in X_α e delle costanti positive R, δ, C dipendenti solo da $\overline{u}$, per ogni $s \in [0, T[$ e per ogni $u_0 \in \mathcal{O}_0 \cap \overline{D}^{|\alpha|}$. Allora il problema* (8)-(9) *ha un'unica soluzione classica $u = u(\cdot, u_0) \in Y(\alpha, \theta) \cap C(I; X_\alpha)$ dove $I = [s, s+\delta \wedge T]$. Inoltre esiste una costante $c > 0$ tale che $\|u\|_{Y(\alpha,\theta)} \leqslant c$.*

Per analoghi risultati relativi a problemi semilineari vedi [3].

Siano $\{B_j(\cdot, D)\}_{j=1,\dots,m}$ gli operatori definiti in (11). Se $p \in (1, \infty)$ e $k = 1, \dots, 2m$ definiamo

$$W_B^{k,p}(\Omega) =: \{u \in W^{k,p}(\Omega);\ B_j(\cdot, D)u = 0 \ \ su\ \partial\Omega\ \ se\ \ m_j < k\}, \tag{12}$$

$$C_B^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega});\ B_j(\cdot, D)u = 0 \ \ su\ \partial\Omega\ \ se\ \ m_j < k\}, \tag{13}$$

$$D(A_{k,p}) = \{u \in W_B^{2m,p}(\Omega);\ Au \in W_B^{k,p}(\Omega)\}, \qquad A_{k,p}u = Au, \quad u \in D(A_{k,p}), \tag{14}$$

$$D(A_{k,\infty}) = \left\{u \in \bigcap_{p>n} W_B^{2m,p}(\Omega);\ Au \in C_B^k(\overline{\Omega})\right\}, \qquad A_{k,\infty}u = Au, \quad u \in D(A_{k,\infty}) \tag{15}$$

TEOREMA 3. – *Siano* $1 \leqslant k \leqslant 2m-1$, $1 < p < \infty$, *supponiamo che valgano le ipotesi* (2.1)-(2.7) *del cap.* 4 *della tesi e che* $B_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\partial\Omega)$, $\forall j : m_j < k$. *Allora l'operatore* $A_{k,p}$ *genera un semigruppo analitico in* $W_B^{k,p}(\Omega)$. *Più precisamente, esistono delle costanti* $c_p > 0$ *e* $\omega_p > 0$ *tali che se* $Re\lambda > \omega_p$ *e* $f \in W_B^{k,p}(\Omega)$ *allora la soluzione* u *delle* (10)-(11) *soddisfa la stima*

$$\sum_{s=0}^{2m-k} |\lambda|^{1-s/2m} \|u\|_{W^{k+s,p}(\Omega)} \leqslant \tag{16}$$

$$\leqslant c_p \left\{ \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + |\lambda|^{k/2m} \sum_{j=1}^{m} |\lambda|^{1-m_j/2m} \|\tilde{g}_j\|_{L^p(\Omega)}\, |\lambda|^{k/2m} \sum_{j=1}^{m} \|\tilde{g}_j\|_{W^{2m-m_j,p}(\Omega)} \right\} \tag{17}$$

dove c_p, ω_p *non dipendono dai dati e da* λ.

Un teorema di generazione analogo vale per gli spazi $C_B^k(\overline{\Omega})$. Altri interessanti teoremi di generazione si trovano in [1].

Ringrazio di cuore Alessandra Lunardi (Parma) e Vincenzo Vespri (Firenze) per avermi seguito nella ricerca che ha portato ai teoremi raccolti nei capitoli 3 e 4 della tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] CANNARSA P. and VESPRI V., *Generation of analytic semigroups in the* L^p *topology by elliptic operators in* $\mathbf{R}^n$, *Israel J. Math.*, **61** (1988), 235-255.

[2] LORENZI A. and PAPARONI E., *Direct and inverse problem in the theory of materials with memory*, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **87** (1992), 105-138.

[3] LUNARDI A., *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, *Birkhäuser Verlag* (*Basel*) (1995).

Dipartimento di Matematica, Università di Milano
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo VIII
Direttore di Ricerca: Prof. Alfredo Lorenzi