BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

LUCA ESPOSITO

Risultati di regolarità per una classe di problemi ellittici in ipotesi deboli di crescita e differenziabilità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 103–106.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_103_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 103-106

Risultati di regolarità per una classe di problemi ellittici in ipotesi deboli di crescita e differenziabilità.

LUCA ESPOSITO

L'argomento principale di questa tesi riguarda, le proprietà di differenziabilità degli estremali degli integrali multipli del calcolo delle variazioni, e più in generale, le proprietà di regolarità delle soluzioni deboli dei sistemi ellittici nonlineari.

Assegnato un integrale variazionale

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} f(x, u, Du)\, dx\,, \tag{1}$$

con $\Omega \subset \mathcal{R}^n$, $u : \Omega \to \mathcal{R}^N$, ed $f : \mathcal{R}^{nN} \to \mathcal{R}$, i principali problemi proposti da Hilbert in relazione alla minimizzazione del funzionale (1) sono:

i) XX Problema di Hilbert: esistenza dei punti di minimo in una opportuna classe di funzioni ammissibili.

ii) XIX Problema di Hilbert: proprietà di differenziabilità dei punti di minimo.

Una strategia ormai classica per affrontare il problema i) consiste nell'utilizzare i metodi diretti del calcolo delle variazioni. L'idea è ben nota e consiste nel dotare l'insieme K, delle funzioni ammissibili (funzioni test), di una topologia nella quale K sia sequenzialmente compatto ed $\mathcal{F}$ sia semicontinuo inferiormente. Le due esigenze sono naturalmente in contrasto ma un buon compromesso si ottiene per un'ampia classe di integrali variazionali lavorando negli spazi di Sobolev. Nel contesto ampio degli spazi di Sobolev è relativamente semplice provare l'esistenza dei minimi di (1) ma tale semplicità è compensata dalla difficoltà di provare, quando possibile, la differenziabilità in senso classico, o più in generale qualche tipo di regolarità per il minimo.

Secondo la congettura formulata da Hilbert, i minimi di $\mathcal{F}$ sono tanto più regolari quanto più è regolare l'integrando f, risultando analitici se f è analitico. La congettura di Hilbert fu provata per i minimi di classe C^1 grazie al contributo di vari autori tra i quali citiamo S. Bernstein, J. Leray, J. Schauder, R. Caccioppoli, C.B. Morrey. Il passo fondamentale per provare la regolarità C^1 dei minimi in $W^{1,p}$ fu poi effettuato per $N = 1$ da Ennio De Giorgi in un famoso lavoro del 1957 (vedi [2]). Lo stesso De Giorgi provò successivamente che, nel caso vettoriale $N > 1$, non è possibile ottenere per i minimi di (1) gli stessi risultati di regolarità in tutto l'aperto Ω ma ci si deve accontentare di provare risultati di regolarità parziale, al di fuori cioè di un insieme singolare di misura nulla.

Sulla scia dei risultati ottenuti da De Giorgi il problema della regolarità $C^{1,\alpha}$ dei minimi di (1) per $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{R}^N)$, $p > 1$, $N \geq 1$ è stato ampiamente sudiato da vari autori, nelle ipotesi di crescita standard

(2) $$|z|^p \leq f(x, u, z) \leq L(\mu + |z|)^p, \qquad \mu \geq 0\,,$$

sia nel caso scalare ($N = 1$), che nel caso vettoriale ($N > 1$). Per ottenere la regolarità $C^{1,\alpha}$ dei minimi di (1) è necessario che l'integrando f, oltre a soddisfare adeguate condizioni di ellitticità, sia abbastanza regolare, ed usualmente si suppone che sia f di classe C^2 rispetto a z e tale che

(3) $$|f_{zz}(x, u, z)| \leq c(\mu + |z|)^{p-2}.$$

Sebbene però la condizione di crescita (2) implichi un controllo sulle derivate prime di f, e cioè

(4) $$|f_z(x, u, z)| \leq c(\mu + |z|)^{p-1},$$

si possono riportare esempi semplici di funzioni convesse di classe C^2 rispetto a z che verificano (2) ma non (3). La condizione (3) è effettivamente superflua per ottenere la regolarità $C^{1,\alpha}$. Questo fatto era già noto nel caso vettoriale ($N > 1$) grazie ad un risultato contenuto in [1] dove si prova la regolarità *parziale* $C^{1,\alpha}$ in assenza della condizione (3).

Uno dei risultati principali di questa tesi consiste nel far vedere che nel caso scalare ($N = 1$) si può provare la regolarità *globale* $C^{1,\alpha}$ senza assumere la (3) (vedi [3]). Per provare tale risultato si fa uso di una tecnica di approssimazione introdotta in [3], che consiste nell'approssimare il funzionale $\mathcal{F}$ con funzionali $\mathcal{F}_\varepsilon$ che verificano la (3); il punto cruciale è provare poi per i minimi u_ε di $\mathcal{F}_\varepsilon$, stime a priori che non coinvolgono le costanti presenti in (0.3). Si ottiene poi il risulato tramite un passaggio al limite. Tale tecnica è stata successivamente adattata anche al caso dei sistemi ellittici nonlineari (vedi [4]) per ottenere, l'esistenza delle derivate seconde (in L^2) nel caso vettoriale, e la lipschitzianità nel caso scalare, per le soluzioni deboli di sistemi ellittici nonlineari del tipo

(5) $$\operatorname{div} A(Du) = 0 \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega),$$

in ipotesi di sola continuità per il campo $A : \mathcal{R}^{nN} \to \mathcal{R}^{nN}$.

Il risultato principale è contenuto nel seguente

TEOREMA 1. – *Sia $A : \mathcal{R}^{nN} \to \mathcal{R}^{nN}$ continuo e soddisfacente la condizione di monotonia*

$$\langle A(z_1) - A(z_2), z_1 - z_2 \rangle \geq \nu(\mu^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2)^{\frac{p-2}{2}} |z_1 - z_2|^2,$$

e la condizione di crescita

$$|A(z)| \leq L(\mu^2 + |z|^2)^{\frac{p-1}{2}},$$

con $\mu \geq 0$, $L > 0$ per ogni $z \in \mathcal{R}^{nN}$, e sia $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{R}^{nN})$ soluzione locale del sistema (5), *allora $V(Du) = (\mu^2 + |Du|^2)^{\frac{p-2}{4}} \in W^{1,2}_{loc}(\Omega; \mathcal{R}^{nN})$ e per ogni $B_R(x_0) \subseteq \Omega$ e $0 < \varrho < R$ si ha*

$$\int_{B_\varrho} |DV(Du)|^2 dx \leq \frac{c}{(R-\varrho)^2} \int_{B_R} (\mu^2 + |Du|^2)^{\frac{p}{2}} dx\,.$$

Osserviamo daltronde che non tutte le equazioni nonlineari ellittiche sono equazioni di Eulero di un qualche funzionale $\mathcal{F}$. Questa osservazione ci offre lo spunto per ricordare che a dispetto di tale distinzione, per quel che riguarda la regolarità $C^{0,\alpha}$ le tecniche dimostrative sono comuni ai due problemi ed infatti sia i minimi degli integrali variazionali che le soluzioni delle equazioni ellittiche nonlineari sono quasi-minimi sotto opportune ipotesi di crescita di un funzionale integrale. Ricordiamo che un quasi-minimo del funzionale $\mathcal{F}$ è una funzione u che soddisfa per qualche $Q \geq 1$ (Per $Q = 1$ si ottiene la definizione di minimo locale)

$$\mathcal{F}(u, \operatorname{supp} \varphi) \leq Q\,\mathcal{F}(u + \varphi, \operatorname{supp} \varphi)$$

per ogni $\varphi \in C_0^1(B_R)$. La nozione di quasi-minimo è stata introdotta da Giaquinta e Giusti e consente di unificare la trattazione di problemi variazionali diversi per ottenere la regolarità Hölderiana. Per ciò che riguarda la regolarità $C^{1,\alpha}$ una analoga funzione unificatrice è svolta dalla nozione di ω-minimo introdotta da G. Anzellotti. Una funzione u è un ω $-$minimo del funzionale $\mathcal{F}$ se e solo se esiste una funzione reale, positiva, nondecrescente, nulla in zero, $\omega : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$ tale che

$$\mathcal{F}(u, B_R(x)) \leq (1 + \omega(R))\,\mathcal{F}(u + \varphi, B_R(x))\,,$$

per ogni palla $B_R(x) \subset\subset \Omega$ e per ogni funzione φ di classe C^1 a supporto compatto in $B_R(x)$. La relazione fra la nozione di ω-minimo e la nozione di quasi-minimo non è stata ancora chiarita. In particolare fino a poco tempo fa non era noto per gli ω-minimi di un funzionale del tipo (1) se valessero le proprietà di regolarità $C^{0,\alpha}$ necessarie per ottenere la regolarità $C^{1,\alpha}$. Questo problema è stato affrontato e risolto in collaborazione con A. Dolcini ed N. Fusco nelle ipotesi di crescita del tipo (2) e successivamente esteso in collaborazione con G. Mingione nelle ipotesi di crescita più generali per le quali era già nota la regolarità $C^{0,\alpha}$ dei quasi-minimi, contribuendo a sistemare le questioni aperte da Anzellotti.

Ritornando infine alla condizione di crescita (2) per il funzionale (1) si può pensare di sostituirla con una condizione di crescita non-standard del tipo

$$|z|^p \leq f(z) \leq L(\mu + |z|)^q, \qquad q \geq p\,. \tag{6}$$

Il problema della regolarità per i minimi dei funzionali integrali nell'ipotesi di crescita non-standard è stato recentemente studiato con particolare interesse, spesso in connessione con problemi di elasticità nonlineare. Per funzionale di questo genere i metodi diretti consentono di ottenere soluzioni in $W^{1,p}(\Omega; \mathcal{R}^N)$ e non nello spazio di Sobolev di esponente più alto, ovvero in $W^{1,q}(\Omega, \mathcal{R}^N)$. Questa circostanza evidenzia i problemi che ci sono nell'investigare sulla regolarità più alta dei minimi non soddisfacendo tali minimi le ipotesi di integrabilità necessarie affinché possa essere utilizzata l'equazione di Eulero associata al funzionale. Questa difficoltà è stata superata provando che sotto opportune ipotesi su f, ogni minimo di classe $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{R}^N)$ è in realtà di classe $W^{1,q}(\Omega, \mathcal{R}^N)$ (vedi [5]). Le ipotesi richieste per $f \in C^2(\mathcal{R}^{nN})$ sono le seguenti

$$|z|^p \leq f(z) \leq L(1 + |z|^q)$$

$$|D^2 f(z)| \leq L(1 + |z|^{q-2})$$

$$\nu |z|^{p-2} |\lambda|^2 \leq \langle D^2 f(z)\lambda, \lambda\rangle$$

per ogni $z, \lambda \in \mathcal{R}^{nN}$ con $L > 1$, $\nu > 0$ e p, q tali che

$$2 \leq p < q$$

$$q < p + 2\left\{1, \frac{p}{n}\right\}.$$

A partire da questo risulato si riesce poi a dimostrare la maggiore differenziabilità delle soluzioni. Per quel che riguarda infine la teoria della regolarità parziale $C^{1,\alpha}$ nelle ipotesi di crescita non-standard non esiste ancora una teoria adeguatamente sviluppata. Un risultato interessante a riguardo è stato ottenuto da N. Fusco e J. Hutchinson nell'ambito dei funzionali policonvessi, ovvero funzionali la cui densità di energia è una funzione convessa nei minori della matrice (Du), cioè

$$f(Du) = g(Du, \wedge_1 Du, \wedge_2 Du, \ldots, \wedge_k Du)$$

$$g \text{ convessa}, \qquad k = \max\{n, N\}.$$

Lo studio di questi funzionali è fortemente motivato da problemi di elasticità non lineare. La parte finale della tesi è dedicata allo studio di funzionali policonvessi e si prova un risultato ottenuto in collaborazione con G. Mingione sulla regolarità parziale di funzionali policonvessi la cui densità di energia è completamente degenere. Il modello dei funzionali trattati, in due dimensioni, è il seguente

$$\int_\Omega (|Du|^2 + |Du|^p + |Ad\,Du|^p + |det\,Du|^p)\,dx.$$

Si estende così al caso di funzionali degeneri il risultato di regolarità parziale precedentemente provato da N. Fusco e J. Hutchinson per funzionali non degeneri.

BIBLIOGRAFIA

[1] Acerbi E., N. Fusco, *A regularity theorem for minimizers of quasi-convex integrals*, Arch. Rat. Mech. Anal., **99** (1987), 261-281.

[2] De Giorgi E., *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino (Classe di Sci. mat., fis. e nat.), (3) **3** (1957), 33-44.

[3] Esposito L., *A remark on $C^{1,\alpha}$ regularity of minimizers*, Ricerche di Matematica, **XLV** 2°, (1996), 311-327.

[4] Esposito L. and G. Mingione, *Some remark on the regularity of weak solutions of degenerate elliptic systems*, Rev. Mat. Univ. Complutense Madrid., (11) **1** (1998), 203-219.

[5] Esposito L., F. Leonetti and G. Mingione, *Higher integrability for minimizers of integral functionals with (q, p) growth*, Preprint n. 166 (1977), Univ. Parma.

Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
e-mail: posito@matna3.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Nicola Fusco, Università di Firenze