Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Corrado Mascia

Onde viaggianti ed equazioni di reazione-convezione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 111–114.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_111_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 111-114

Onde viaggianti ed equazioni di reazione-convezione.

CORRADO MASCIA

Nella tesi di dottorato ho studiato il comportamento qualitativo delle soluzioni entropiche del problema di Cauchy per equazioni di reazione-convezione del tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = g(u) & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{R} & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

In particolare ho rivolto l'attenzione per la maggior parte del lavoro allo studio dei profili asintotici per tempi grandi.

Il problema (1) è una versione semplificata di modelli fisici più complessi che emergono in vari contesti applicati. Le due funzioni f e g che determinano la struttura dell'equazione rappresentano, rispettivamente, *fenomeni di convezione e di reazione* presenti tra le quantità in considerazione.

La combinazione del termine convettivo e di quello reattivo dà luogo a fenomeni più complessi rispetto agli effetti di pura convezione e pura reazione, e, quindi, non prevedibili se non si considera l'interazione dei due termini. L'equazione (1) gode della proprietà di tenere conto dei due effetti, reazione e convezione, e di avere, nonostante la sua forma relativamente semplice, un'ampia famiglia di soluzioni d'onda. L'analisi del ruolo di queste onde nel comportamento generale delle soluzioni di (1), della loro stabilità e delle loro possibili interazioni, oltre ad essere interessante di per sé, può dare indicazioni sul tipo di analisi da attuare per studiare casi più generali e modelli applicati specifici.

L'equazione in (1) è un'equazione quasilineare del primo ordine di tipo iperbolico. È noto che la struttura nonlineare dell'equazione impedisce l'esistenza di soluzioni globali classiche per il problema di Cauchy (1) anche se il dato iniziale u_0 è regolare (vedi [4]). Questo accade indipendentemente dalla presenza di g. È possibile, infatti, che il gradiente della soluzione diverga in tempo finito in qualche punto del dominio in considerazione. Per avere esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati si introduce il concetto di soluzione entropica, che rappresenta, tra tutte le soluzioni deboli, quella «fisicamente accettabile» (vedi [2]).

La tesi si occupa delle proprietà qualitative di queste soluzioni entropiche. Prima di tutto ho affrontato il caso di flusso f convesso, lasciando maggior libertà alla funzione g (per semplicità, ho supposto g con zeri semplici). In queste ipotesi la teoria delle caratteristiche generalizzate, introdotta in [1], permette un'analisi estremamente precisa e dettagliata. Ho considerato il dato iniziale u_0 del tipo perturbazione del dato di Riemann

$$u_0^R(x) = \begin{cases} u_l & x < 0\,, \\ u_r & x \geqslant 0\,, \end{cases}$$

per qualche u_l, $u_r \in \mathbb{R}$ in modo che u_0 «mantenga le proprietà all'infinito del dato u_0^R», ovvero che esista $L > 0$ tale che l'insieme $u_0(-\infty, -L)$ sia contenuto nello stesso dominio di attrazione dello zero di g che contiene anche u_l, e che $u_0(L, +\infty)$ sia contenuto nello stesso di u_r. In questa parte ho seguito la strategia del lavoro [3], in cui si erano considerate perturbazioni a supporto compatto del dato di Riemann.

Il comportamento per tempi grandi della soluzione è rappresentato una *famiglia di onde viaggianti*, cioè di soluzioni del tipo

$$u(x, t) = \phi(x - ct), \qquad (c \in \mathbb{R}),$$

che sono *non interagenti*, cioè ordinate secondo le loro velocità di propagazione c.

Enuncio una versione semplificata del Teorema sul comportamento asintotico. (Uso la notazione $a \wedge b := \min\{a, b\}$ e $a \vee b := \max\{a, b\}$).

TEOREMA 1. – *Siano $g(u_l) = g(u_r) = 0$ con $g'(u_l)$ e $g'(u_r)$ negativi, e sia u_0 tale che $u_0(\mathbb{R}) \subseteq [u_l \wedge u_r, u_l \vee u_r]$, $u_0(x) = u_l$ per ogni $x \leqslant -L$ e $u_0(x) = u_r$ per ogni $x \geqslant L$ per qualche $L > 0$. Sia u la soluzione entropica del problema di Cauchy* (1).

(1) *Se $u_l > u_r$, allora esistono $T > 0$ e $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tale che $u(x, t) = \phi(x - ct)$ per ogni $t \geqslant T$ dove $\phi(\xi) := u_l$ se $\xi < \xi_0$ e $\phi(\xi) := u_r$ se $\xi \geqslant \xi_0$.*

(2) *Se $u_l < u_r$, detti $u \equiv w_1 < w_2 < \cdots < w_{2n+1} \equiv u_r$ gli zeri di g in $[u_l, u_r]$, esistono n onde viaggianti $\phi_i(x - c_i t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ con $c_i = f'(w_{2i})$, $\phi_i(-\infty) = w_{2i-1}$, $\phi_i(+\infty) = w_{2i+1}$ tali che $v(x, t) := w_{i+1} \wedge (w_i \vee u(x, t))$ converge quasi-uniformemente a $\phi_i(x - c_i t)$.*

La convergenza quasi-uniforme è dovuta al fatto che le onde viaggianti limite possono presentare punti di discontinuità. Nel caso in cui $\phi \in C(\mathbb{R})$, la convergenza è uniforme.

In generale la famiglia di onde non interagenti *non* è univocamente determinata dagli stati asintotici u_l, u_r. L'unicità del profilo asintotico si può recuperare in un senso opportuno: in collaborazione con C. Sinestrari (vedi [3]), abbiamo dimostrato che esiste una classe di dati iniziali ampia (intersezione di aperti densi in L^1) che genera soluzioni il cui profilo asintotico è lo stesso del problema di Riemann non perturbato.

Dato che le onde viaggianti del problema (1) sono l'elemento chiave per individuare il comportamento asintotico, nel Capitolo 3 ho studiato in modo approfondito tali soluzioni, ancora sotto l'ipotesi di convessità, determinandone esistenza, regolarità e carattere di stabilità. Per brevità, ometto il contenuto di questa parte.

Per dimostrare i risultati suscritti è indispensabile ipotizzare che la funzione f' sia strettamente crescente. L'ipotesi di convessità di f implica proprietà forti sulla struttura delle soluzioni entropiche che permettono facilitazioni tecniche non banali. A priori non c'è nessun motivo per cui, nel caso in cui non valga la monotonia di f', non debbano valere analoghe proprietà per il comportamento asintotico.

Gli ultimi due Capitoli sono dedicati proprio all'analisi del caso di flusso f *non convesso*. Se si tralascia l'ipotesi di convessità, già per il problema di Riemann (che nel caso convesso può essere risolto esplicitamente) la situazione diventa estremamente più complicata. Per questo motivo ho studiato questo problema sotto ipotesi più generali sul flusso, restringendo l'attenzione ad una funzione di reazione g con una struttura particolare.

Ho dimostrato che esistono, anche in questo caso, onde viaggianti che connettono gli zeri di g, generalizzando l'analogo risultato del caso convesso.

TEOREMA 2. – *Sia $f \in C^1([0, 1])$ con un numero finito di cambi di convessità, e sia $g \in Lip([0, 1])$ tale che $g(0) = g(1) = 0$ e $g(s) > 0$ per ogni $s \in (0, 1)$.*

Allora esistono onde viaggianti $\phi(x - ct)$ con ϕ monotona e $\phi(-\infty) = 0$, $\phi(+\infty) = 1$ se e solo se la velocità c dell'onda è tale che

$$c \leqslant c_* := \inf_{s \in (0, 1]} \frac{f(s) - f(0)}{s - 0}.$$

Inoltre, fissata la velocità, il profilo ϕ dell'onda è unico.

Passando allo studio del comportamento asintotico del problema di Riemann, ho dimostrato che il dato iniziale $u_0 = \chi_{(0, +\infty)}$ (χ_I denota la funzione caratteristica di I) evolve verso l'onda viaggiante che connette 0 con 1 con velocità estremale c_*.

Nel seguito, indico con $u^R = u^R(x, t)$ la soluzione di entropia del problema (1) con $u_0(x) = \chi_{(0, +\infty)}(x)$ e con $\phi_* = \phi_*(\xi)$ il profilo d'onda di (1) con $\phi_*(-\infty) = 0$, $\phi_*(+\infty) = 1$, velocità c_* e supp $\phi_* = [0, +\infty)$.

TEOREMA 3. – *Siano vere le ipotesi del Teorema 2. Inoltre, se $c_* = f'(0)$, sia $f'/g \in L^1(0, \varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$.*

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme N_ε con mis $N_\varepsilon < \varepsilon$ tale che

$$\lim_{t \to +\infty} \|u^R(\cdot + c_* t, t) - \phi_*(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus N_\varepsilon)} = 0 .$$

Nel caso non convesso le caratteristiche generalizzate non possono essere più utilizzate (se non in casi particolari). Per questo motivo l'approccio che ho utilizzato è stato diverso da quello dei lavori precedenti e si è basato sull'uso dei teoremi di confronto, tramite la costruzione di opportune sopra- e sottosoluzioni.

Nell'ultimo Capitolo della tesi, ho considerato ancora il caso di flusso non convesso, sotto ipotesi più generali sulla funzione g. In questa parte, ho dimostrato due risultati principali: uno di regolarizzazione della soluzione ed uno di comportamento asintotico.

Il risultato di *regolarizzazione* generalizza una proprietà ben nota del problema (1) con flusso convesso: dati iniziali crescenti danno luogo a soluzioni continue. Nel caso non convesso questa proprietà non vale e possono comparire discontinuità. Sotto ipotesi aggiuntive, ho dimostrato che *le soluzione con dato iniziale crescente diventano continue in tempo finito.*

Le ipotesi che assicurano la continuità sono collegate alla struttura delle onde viaggianti del problema. Infatti si assume che f e g siano tali che ogni onda elementare che connette zeri di g sia continua (inoltre occorre ipotizzare anche che f' sia strettamente crescente vicino agli zeri di g).

TEOREMA 4. – *Sia $g \in Lip(\mathbb{R})$ con zeri isolati, sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che f' è strettamente crescente in un intorno di ogni zero di g. Infine, per ogni $S = (s_1, s_2)$ con $s_1, s_2 \in \{g=0\}$ e $0 \notin g(S)$, se $g(S) > 0$ siano $f'(s) > f'(s_1)$ e $(f(s) - f(s_2))/(s - s_2) \leqslant f'(s_2)$ per ogni $s \in S$, se $g(S) < 0$ siano $f'(s) < f'(s_2)$ e $(f(s) - f(s_1))/(s - s_1) \geqslant f'(s_1)$ per ogni $s \in S$.*

Allora, se u_0 è monotona crescente, esiste $T > 0$ tale che la soluzione di (1) *è continua per ogni $t \geqslant T$.*

Riguardo al comportamento asintotico ho esteso un risultato analogo a quello del caso convesso. Ho dimostrato che un'ampia classe di dati iniziali evolve verso una famiglia di onde viaggianti non interagenti; queste onde sono la generalizzazione di quelle del caso convesso. Occorrono, però, restrizioni sulle funzioni f e g, e sul dato iniziale u_0: si richiede che le onde asintotiche di (1) siano tutte continue e che i dati iniziali non abbiano oscillazioni attorno agli zeri di g. L'enunciato finale è molto simile a quello del Teorema 1.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. M. DAFERMOS, *Generalized Characteristics and the Structure of Solutions of Hyperbolic Conservation Laws*, Indiana Univ. Math., **26** (1977), 1097-1119.

[2] S. N. KRUŽKOV, *First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables*, Mat. Sbornik, 81 (1970), 228-255; Math. USSR Sbornik, **10** (1970), 217-243.

[3] C. MASCIA e C. SINESTRARI, *The Perturbed Riemann Problem for a Balance Law*, Advances Differential Equations, **2** (1997), 779-810.

[4] J. SMOLLER, «Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations», Springer-Verlag, New York, U.S.A. (1983).

Dipartimento di Matematica «G.Castelnuovo», Università di Roma «La Sapienza»
e-mail: mascia@mat.uniroma1.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma) - Ciclo IX
Direttore di Ricerca: Prof. A. Tesei, Università di Roma «La Sapienza»